

ロピタルの定理を巡って

数学月間企画講演会（第16回）

東京大学（駒場）数理科学研究科棟

大山 陽介 （徳島大学）



2025 年 10 月 5 日

QR コードからこの講演のスライドを見ることができます

<https://researchmap.jp/painleve/presentations/50874879>

1. いわゆるロピタルの定理について

ロピタルの定理

$f(x), g(x)$ が区間 (a, b) で微分可能とする。

$a < c < b$ となる c に対して $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ かつ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在し、さらに c の近傍 ($\neq c$) において $g'(x) \neq 0$ が成り立つならば

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ロピタルの定理は受験生・大学生に好まれて、入試に使っていいかどうかよく話題になる

ここでは試験などの話は触れないで、ロピタルの定理もしくはロピタル本人について語る

1.1 高校教科書での扱い



コーシーの平均値の定理

関数 $g(x)$, $h(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能であるとし, $h(a) \neq h(b)$ さらに, $g'(x)$ と $h'(x)$ は开区間 (a, b) で同時には 0 とならないものとします。このとき, 次のことが成り立ちます。

コーシーの平均値の定理

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)} \quad (a < c < b)$$

となる c が存在する。



ロピタルの定理

コーシーの平均値の定理において, $g(a)=h(a)=0$ の場合は

$$\frac{g(b)}{h(b)} = \frac{g'(c)}{h'(c)} \quad (a < c < b)$$

となる c が存在することになります。ここで, $b \rightarrow a$ となるとき $c \rightarrow a$ となることから, 次のことが成り立ちます。

ロピタルの定理

$$g(a)=h(a)=0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

高校では**発展**でしか扱っていない
実教の現行の版では扱っていない
東京書籍や啓林館でも扱いがある

7 実教数Ⅲ 303

数学Ⅲ

◎著者 岡本和夫

ほか 10 名 (別記)

●発行所 実教出版株式会社

代表者 戸塚雄武

東京都千代田区五番町 5

平成24年 3月 6日 校定済

平成25年 1月20日 印刷

平成25年 1月25日 発行

●発行所 実教出版株式会社

〒102-8377 東京都千代田区五番町 5

電話〈営業〉(03)3238-7777

〈編集〉(03)3238-7788

〈総務〉(03)3238-7700

2. ギヨーム・ド・ロピタルについて

ギヨーム・ド・ロピタル (1661年6月7日–1704年2月2日)

Guillaume-Francois-Antoine de l'Hospital, Marquis de Sainte-Mesme et du Montellier, Comte d'Entremont, Seigneur d'Ouques, la Chaise, le Bréau et autres lieux, gouverneur des ville et château de Dourdan. (Fontenelle [16], [43])

ギヨーム・フランソワ・アントワーヌ・ド・ロピタル：サント＝メム侯爵およびモンテリエ侯爵、アントルモン伯爵、ウク、ラ・シェーズ、ル・ブレオおよびその他の地域の領主、ドゥールダンの町および城の統治者

書くときは

Guillaume de l'Hospital (ギヨーム・ド・ロピタル)

もしくは

Marquis de l'Hospital (ロピタル侯爵)

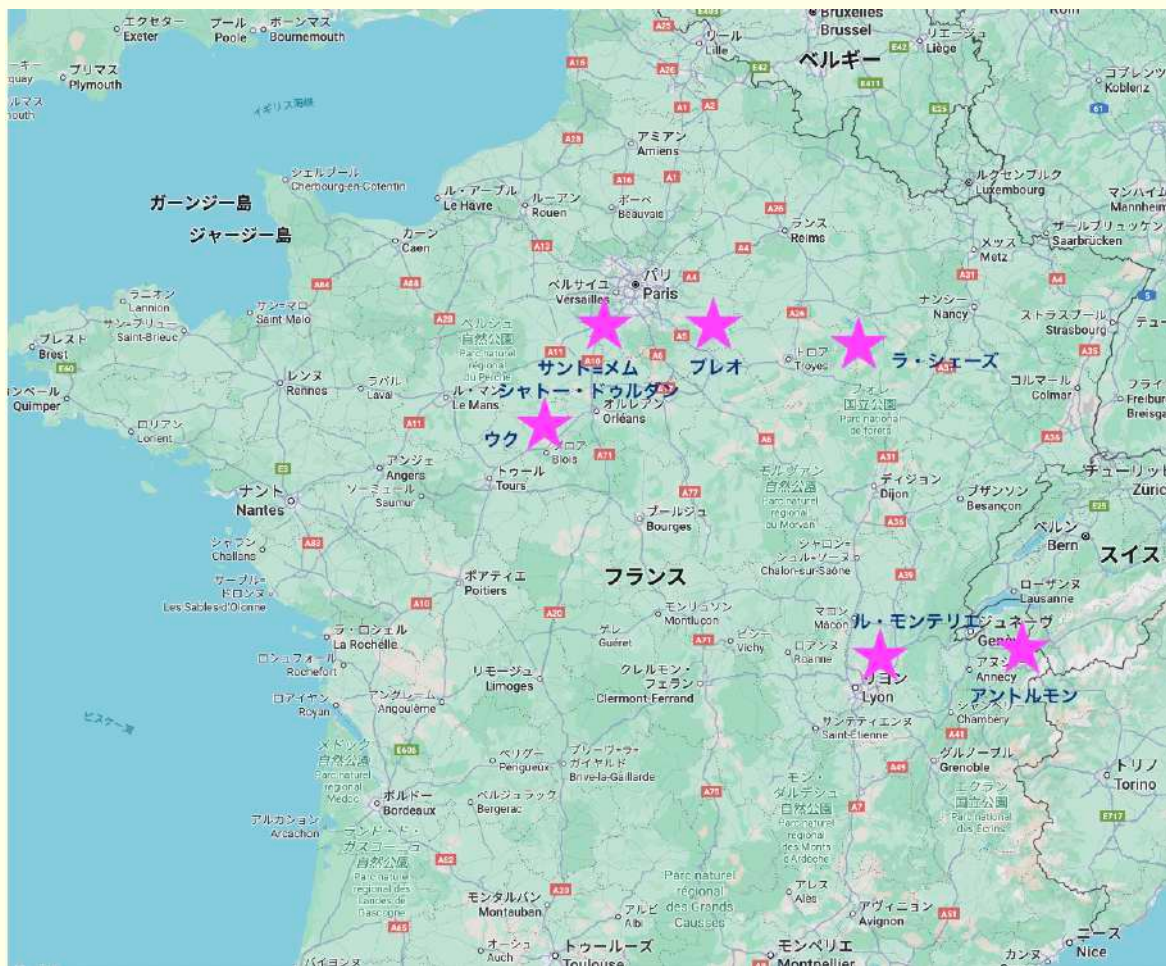
が良いかもしれない。

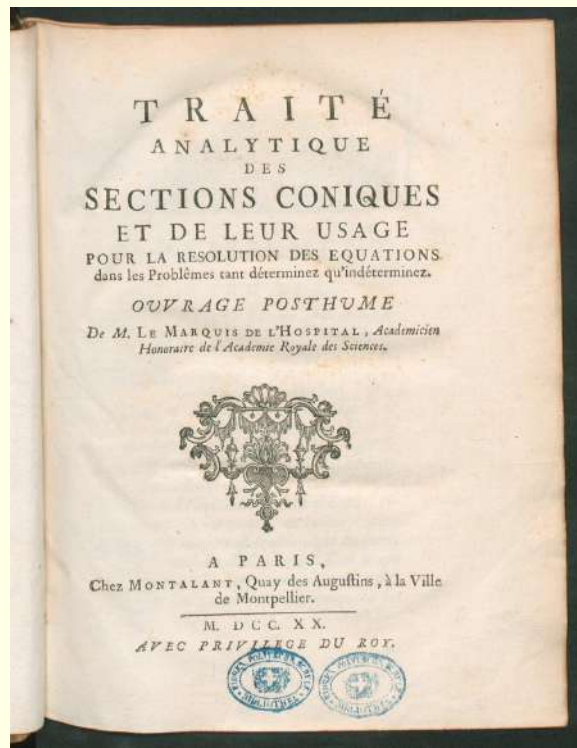
l'Hospital **か** **l'Hôpital** **か**

s が脱落して**アクサン・シルコンフレクス** ô になったと思われる

アカデミー・フランセーズの正書法改革が1740年でロピタルの時代は過渡期

近年は発音に則して**l'Hopital** も多いようにも思われる



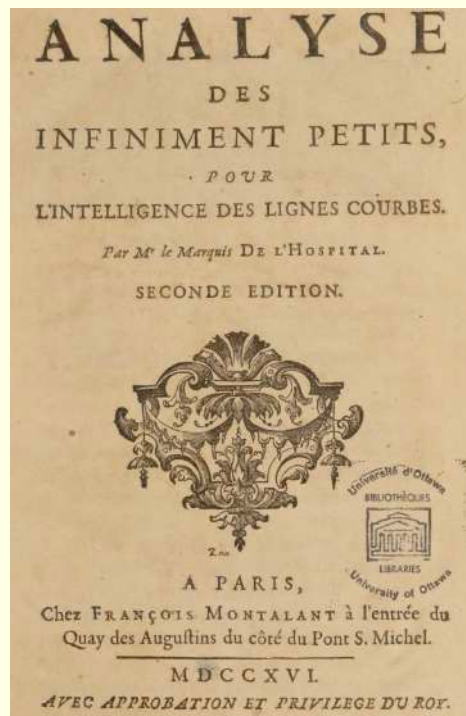
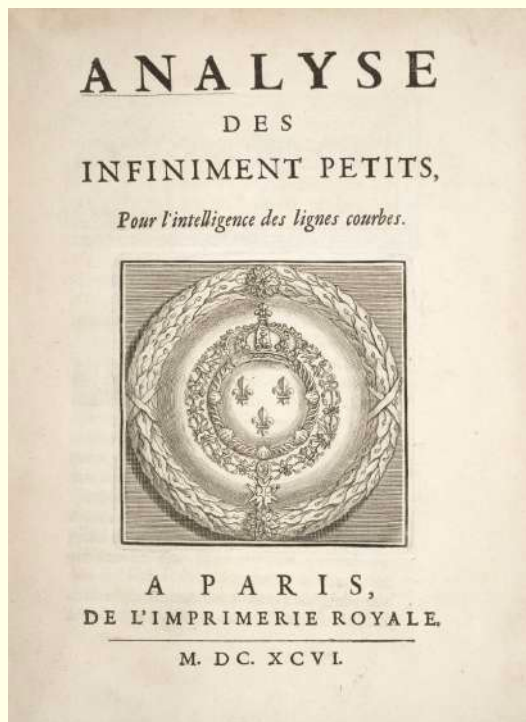


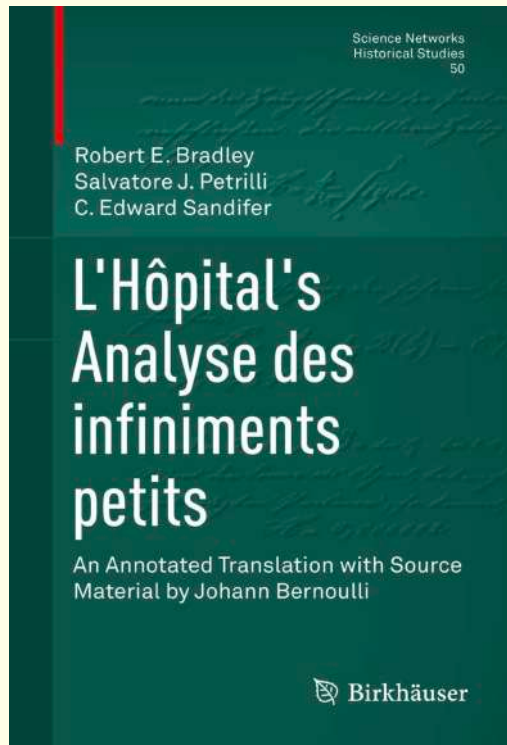
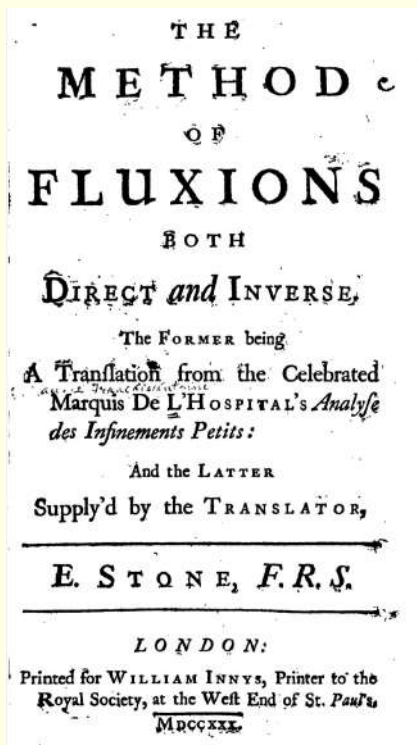
Traité analytique des sections coniques, 1707 (死後に発刊)

「円錐曲線に関する解析的考察」 [21]

Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes

『曲線を理解するための無限小の解析』 1696, 1716 (2ed)





1696 表紙 (Smithsonian Libraries)

1696 初版 1716 第2版 1730 英訳 [20, 22] (原題 *Infiniments* は多分誤植)

R. E. Bradley, S. J. Petrilli, C. E. Sandifer (Birkhaeuser; 2015) [7]

ロピタルの本は全10章、本文は181ページである。

内容は代数函数で定義される**曲線に関する微分学**で積分はない。

ロピタルの定理は第9章の冒頭 p.145 に解説されている

DES INFINIMENT PETITS. I. Part. 145

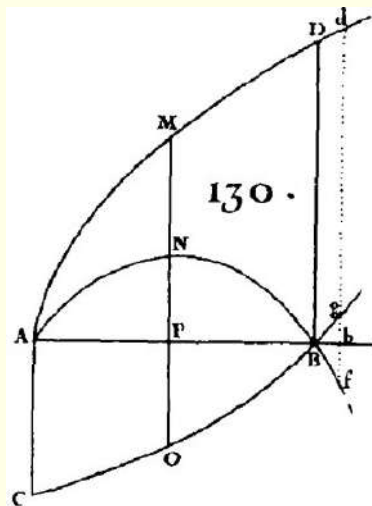
SECTION IX.

*Solution de quelques Problèmes qui dépendent des
Méthodes précédentes.*

PROPOSITION I.

Problème.

163. SOIT une ligne courbe AMD ($AP = x$, $PM = y$, FIG. 130.
 $AB = a$) telle que la valeur de l'appliquée y soit exprimée
par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur de-
viennent chacun zero lorsque $x = a$, c'est-à-dire lorsque le point
P tombe sur le point donné B. On demande quelle doit être
alors la valeur de l'appliquée BD.



曲線 ANB が $y = f(x)$, COB が $y = g(x)$ で表され、
 $AB = a$, $f(a) = f(B) = 0$, $g(a) = g(B) = 0$ とする.

曲線 AMD が函数 $a \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ である。

問題：BD の長さを求めよ。

B の近くで微少にずらすと、曲線 AMD の定義より

$$\frac{bd}{AB} = \frac{bf}{bg}$$

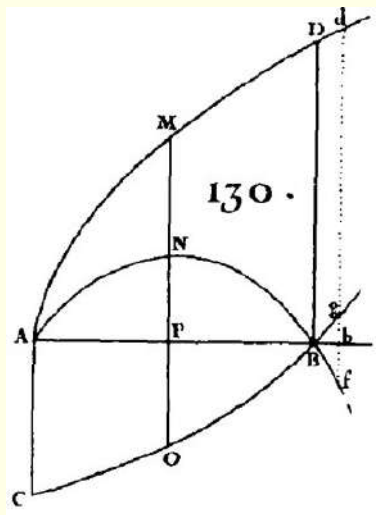
となっている。 $Bb = dx$ と考えて

$$\text{bf} = f'(B)dx, \text{ gb} = g'(B)dx$$

となるので $\text{bd} \rightarrow \text{BD}$ の極限を取ると

$$\frac{\text{BD}}{\text{AB}} = \frac{f'(B)}{g'(B)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

となる。



3.1.2 ロピタルの定理の例

定理に続いて、2つの例が挙げられている。

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \frac{16}{9}a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}} = 2a$$

後者は、代数的に証明できる。

前者はロピタルの定理が有効な例

Nr. 11

De l'Hôpital an Johann Bernoulli

Paris, 27. Juni 1693

Vorlage: O in St. - Der Brief wurde am 20. Juni angefangen, aber erst am 27. beendet.
Adresse wie bisher. - Siegel.

à Paris ce 20^e. juin 1693.

Je suis extrêmement surpris, Monsieur, de ce que vous n'avez fait aucune réponse à ma dernière, et je ne sçais à quoi attribuer ce silence¹⁾. je ne le veux pas cependant imiter, et j'aime mieux faire toutes sortes d'auances pour me conserver vôte amitié dont je fais un tres grand cas, que de risquer de la voir diminuer par la discontinuation du commerce qui est entre nous. Mr. l'abbé Bignon me vint trouver il y a quelques jours et me pria de faire l'honneur à l'Académie des sciences (ce sont ses termes) d'assister quelques fois aux conférences qui s'y tiennent, ce que j'acceptai, et j'y allai hier pour la 1^{re}. fois. Vous pouvez conter que je ne perdrai point les occasions de vous rendre service et de vous procurer ici quelque établissement solide. j'y vis Mr. Varignon qui me paroit fort de vos amis, il me donna un petit papier, où est la question suiuvante qu'il m'a dit que vous lui avez envoyée. soit l'equation

$$\frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = y$$

EXEMPLE I.

164. Soit $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il est clair que lorsque $x = a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'est-pourquoy l'on prendra la différence $\frac{a^3 dx - 2x^3 dx}{\sqrt[4]{2a^3x - x^4}} - \frac{a^2 dx}{\sqrt[3]{a^2x}}$ du numérateur, & on la divisera par la différence $-\frac{a^2 dx}{\sqrt[4]{a^2x}}$ du dénominateur, après avoir fait $x = a$, c'est-à-dire qu'on divisera $-\frac{a^3}{\sqrt[4]{a^2}}$ par $-\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^2}}$ ce qui donne $\frac{a}{\sqrt[4]{a^2}}$ pour la valeur cherchée de BD .

EXEMPLE II.

165. Soit $y = \frac{ax - ax^2}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$, lorsque $x = a$.

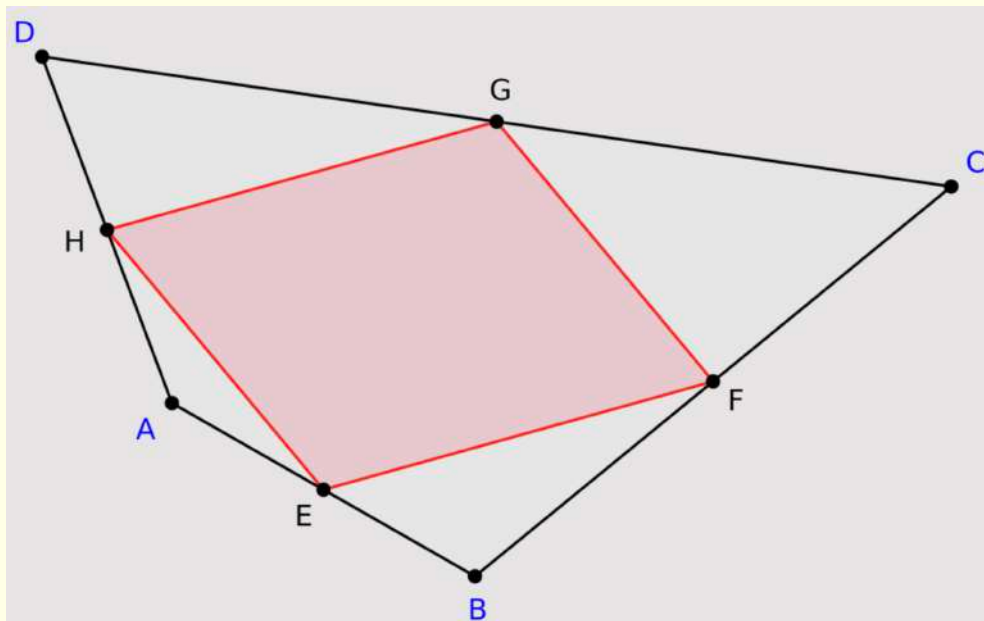
On pourroit résoudre cet exemple sans avoir besoin du calcul des différences, en cette sorte.

Ayant ôté les incommensurables, on aura $axx - 2aax + 2aax - axy - 2a^2x + a^3 + ayy - 2a^2y = 0$, qui étant divisé par $x - a$, se réduit à $axx - a^3 + 2aay - ayy = 0$; & substituant a pour x , il vient comme auparavant $y = 2a$.

最初の例は友人の **Pierre Varignon** へヨハンが出した問題が元になっている
1693年ロピタルからヨハンにあてた手紙
(Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Bd I, Springer, 1955; Bd 2,3 もある [8])
単純な誤答としては $x = a$ を代入して
$$\frac{a^2 - a^2}{a - a} = a + a = 2a$$
 とするものがある

ヴァリニョンの定理

任意の四角形の辺の中点を結んでできた四角形が平行四辺形になる。
もとの四角形が凸の場合、平行四辺形の面積は四角形の半分になる。



・ヨハンとヴァリニョンとの間の手紙が多く残されている

Analyse des infiniment petits (以下 Analyse) は

1696 年の初版は著者なし、序文にはベルヌーイらに対する感謝 viii, xii

P R E F A C E.

des païs jusqu'ici inconnus; & il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. M^r *Bernoulli* ont été les premiers qui se sont aperçus de la beauté de ce calcul: ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de surmonter des difficultés qu'on n'auroit jamais osé tenter auparavant.

Au reste je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de M^r *Bernoulli*, sur tout à celles du jeune presentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes & de celles de M. *Leibnis*. C'est-pourquoy je consens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser.

viii) 両ベルヌーイ氏 (兄ヤコブと弟ヨハン) は、微積分の美しさに初めて気づきました。挑戦することも考えられなかったような困難を超えるまででに、微積分を押し上げました。

xii) 私は両ベルヌーイ氏、特に **Groningen 大学の教授である若きベルヌーイ氏の啓示から多くを学びました**。私は両氏の発見とライプニッツ氏の発見を積極的に用いました。彼らが私に残してくださるものだけで満足し、彼らが望むだけ多くのものを主張することに同意します。

4. ヨハン・ベルヌーイの書簡

ベルヌーイとロピタルの間の書簡は書簡集 [8] として残っている (1955 出版)

[注釈] **1879 年** この書簡は**グスタフ・エネストレーム** (Gustav Hjalmar Eneström, 1852–1923) が発見

ヨハン・ベルヌーイ Johann Bernoulli, 1667–1748、ロピタルは 1661 年生)

1691 年 ヨハン (24 歳) はロピタル侯爵 (30 歳) に個人指導

1692 年秋 **バーゼル**に戻る、以降も **1702 年**まで文通した

1694 年 博士号を取得

1695 年 オランダのフローニンゲン大学の教授就任

1705 年 バーゼルに戻る。兄ヤコブが務めていたバーゼル大学の数学教授職に

ヨハン vs ロピタル・最初の論争 SOLUTION DU PROBLEME QUE M. DE BEAUNE

ロピタルの **1692 年**の論文

Mr. G***,

Solution du probleme que
M. de Beaune, *Journal des
Sçavans*, 1692, 401–403. [19]

デ・ボーンの問題 “逆正接
問題で、 $y' = \frac{1}{y}$ などを解け”

ロピタルはこの問題の答えをヨハンから教えてもらったのに匿名で発表

proposa autrefois à M. Descartes, & que l'on trouve dans la
79. de ses lettres, tome 3. Par Mr. G***

PROBLEME.

UNE ligne droite quelconque N étant donnée, & ayant
mené deux autres lignes indéfinies AC, AI, en sorte
que l'angle C AI soit de 45 degrez; on demande la maniere
de décrire la courbe ABB qui soit de telle nature que si l'on
mène d'un de ses points quelconques B, l'ordonnée BC &

1691.

I i i i

1694年3月 ヨハンに対して、ロピタルは年300リーブルを送ることにした

1695年7月 200 リーブル

1696年6月 Analyse 出版直後の300 リーブル、合計800 リーブル

Nr. 20

De l'Hôpital an Johann Bernoulli

Paris, 17. März 1694

°je vous donnerai avec plaisir une pension^{oo} de trois cent livres, qui commencera du premier janvier de cette presente année, et je vous enverrai deux cent livres pour la premiere demie année à cause des journaux que vous m'avez envoyés, et l'autre demie année sera de cent cinquante livres et ainsi à l'avenir. je vous promets d'augmenter dans peu cette pension que je sçais bien estre tres modique, et ce sera si tost que mes affaires seront un peu debrouillées, et que je pourai jouir de la succession; car jusqu'à present

ロピタルは妻がアントルモン伯爵の財産を引き継ぐ一方で、ヨハンは

1694年 結婚、1695年 ニコラス2世 (Nicolaus II、-1726) 誕生

1695年 フローニンゲン大学教授就任

300 リーブルはベルヌーイがフローニンゲンで得ることになる年俸の21 %
ベルヌーイの状況では、十分ありがたい金額

この時期のヨハンはロピタルに感謝の手紙も書いている

[参考] フランス革命時の1795年に 80 フラン = 81 リーブルでフランに
400 フランあれば庶民は1年間生活できたようだ

次男ダニエルは1700年生まれ

4.2. ジョセフ・ソランとミシェル・ロルとの論争

ロルの定理 (1691) [32]

$f(x)$ が微分可能で $f(a) = 0, f(b) = 0$
ならば $f'(c) = 0$ となる $a < c < b$ が存在

1700 年 無限小解析に否定的な **ロル** は **ヴァリニョン** と論争
最終的に **ロル** が誤りを認めて決着

1702 年 4 月 Journal des Sçavans の編集長である
ジョセフ・ソラン (Joseph Saurin, 1659–1737) が
ロル に対して、 $x = a$ で不定形 $0/0$ なら問題がある
として、ロピタルの本を引用しつつ **ロル** を
自誌で批判 [34]

[参考] **ミシェル・ロル** (Michel Rolle, 1652–1719)
ロル 自身は、多項式の場合を考えていた。

ソランの批判自体は妥当ではあったが、
ソラン本人も無限小解析の理解が不足していた。

[参考] **Journal des Sçavans** は 1665 年に創刊
された 欧州最古の定期的学術誌

DEMONSTRATION
D'UNE
METHODE,
POUR RESOUDRE
LES EGALITEZ
DE TOUS LES DEGREZ;
Suivie de deux autres Methodes, dont
La premiere donne les moyens de refoudre ces
mêmes egalitez par la Geometrie,
Et la seconde, pour refoudre plusieurs questions
de Diophante qui n'ont pas encore été
refolnés.



A PARIS,
Chez JEAN CUSSON, rue saint Jacques,
à l'Image de saint Jean Baptiste.

M. DC. XCI.
AVEC PERMISSION.

XXIV.

367

LE JOURNAL
DES
SÇAVANS

Du JEUDI II. JUIN M. DCCV.

REFUTATION DE LA REPOSE DE M. ROLLE INSEREE
dans le Journal des Sçavans du 11. May 1705. PAR M. SAURIN.

Si je n'avois égard qu'aux Geometres, & à l'Academie de Sciences, je ne re-
spondrois pas un seul mot à la Réponse de M. Rolle; & dès à présent je
confess qu'il employe cette piece dans le procès que nous avons ensemble, & que
sans nulle attention à la Réponse que j'y vray faire, l'Academie décide sur l'Ar-
ticle que j'ay trané dans une Défense.

4.3. ヨハン・ベルヌーイの不满

-16/34-

ソランがロルを批判する中で、ロピタルの本を賞賛しすぎたことで、ヨハンは大きな不満を持っていた

1704年2月2日 **ロピタル死去**

1704年8月 ヨハンの論文 [3] ではロピタルの本を引用しつつ

1) **ロピタルの定理は自分の成果**

2) **結果を改善する必要がありさらに深く自分は知っている**

と主張

1705年5月 ソランが反論 [35]

1705年7月18日にヴァリニョンに宛てた手紙

N° 83

Jean Bernoulli à Pierre Varignon

Groningue, le 18 juillet 1705

Minute: Ms UB Basel L 1 a 669 N° 22 (2 fol.), de la main de Nicolas I Bernoulli. En haut de la lettre «à Mr. Varignon» de la main de Jean Bernoulli. A la fin date «Groningue, ce 18 Juillet 1705» probablement d'une autre main.

Monsieur.

J'ay reçu votre dernière lettre du 23. Juin avec le billet pour le libraire à Amsterdam pour en recevoir un exemplaire de l'Hist. et memoire de l'Acad. dont je vous remercie.

J'ay¹ lû avec beaucoup d'etonnement les plaintes de Mr. Saurin, il prend les choses d'un ton si haut, que peu s'en faut qu'il ne m'accuse d'injustice envers le defunct M. le M. de l'Hopital, en revendiquant la regle proposée dans l'article 163 de l'analyse des inf. petis: Je me trouve donc obligé de dire quelque chose touchant les deux points dont Mr. Saurin se plaint principalement, qui sont 1.^{mo} que la regle est de moy, et 2.^{do} qu'elle est defectueuse et qu'elle avoit besoin d'etre perfectionnée: quant au premier point M. Saurin dit que je me fay tort dans le monde par l'empressement que j'ay de revendiquer tout ce que je puis de l'Anal.

1707年2月26日付のヴァリニョン宛の手紙

N° 95

Jean Bernoulli à Pierre Varignon

Bâle, le 26 février 1707

Minute: Ms UB Basel L I a 669 N° 23 (6 fol.). Copie de la main de Nicolas I Bernoulli. Dernier passage de la main de Jean Bernoulli.

[à Mr. Varignon]

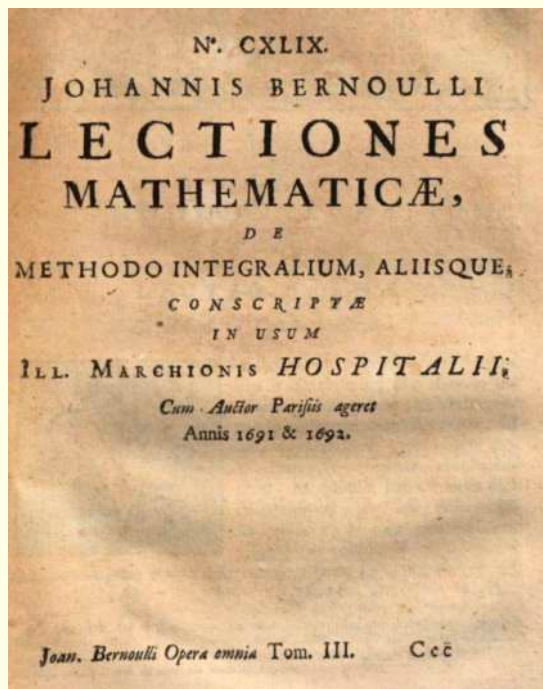
justice, par exemple lorsqu'on fait p. 131 l'Eloge du *fameux* livre de l'Analyse des infiniment petis, on se garde bien de m'en attribuer la moindre partie, quoique si on veut parler franchement Mr. de l'Hopital n'ait pas eu plus de part à la production de ce livre que d'avoir traduit en françois la matiere que je luy avois donné[e] la plus part en latin, vous le sçavez bien¹⁴, et pour en convaincre le public j'ay en mains des lettres et d'autres pieces autentiques. Page 129 on insinue que Mr. de l'Hopital doit avoir eu une clef particuliere pour resoudre ces sublimes questions¹⁵, mais il ne vaut pas la peine d'ajouter que c'est à moy seul qu'il est redevable de cette clef, que sans moy il ne l'auroit jamais trouvée vû qu'il ne sçavoit pas avant mon arrivée à Paris qu'il y eut au monde une telle clef.

ロピタル氏はこの本の出版において、私が彼に渡した資料の大部分をラテン語でフランス語に翻訳した以外には、何の役割も果たしていません

この鍵は私に完全に負っているのです。私がいなければ、彼は決して見つけれなかったでしょう。なぜなら、私がパリに到着するまで、彼はそのような鍵がこの世に存在することを知らなかったからです。

4.3.2 ロピタルの本に続く積分論

Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium, Allisque
『積分法数学講義』 in Johannis Bernoulli, Opera omnia 3 (1742) [5]



出版年が1742年だが、1691年に執筆されたベルヌーイの初期作品の一つ冒頭「前節で、量の微分がどのように形成されるかを見てきた」

4.3.3 しかしながら …

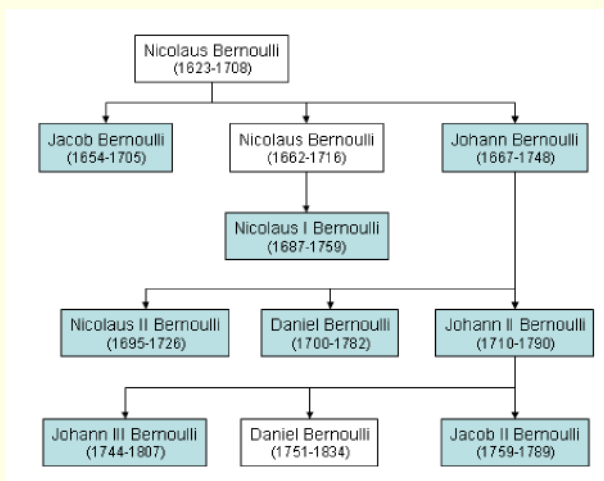
ヨハンは**ライプニッツ** (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) らにも自分の先取権を訴えた

しかし、受け入れられず、**1716年に2版がロピタル著として出版**された

ヨハンらの書簡が発見される前も、この Lectiones の記述からロピタルの本が第一部で、Lectiones が第二部という考えは知られていた

ベルヌーイ一族は互いに**先取権争い**をよくやっており、ヨハンの主張は当時は信用されなかった。

例えば**流体力学の「ベルヌーイの原理」**に関して息子ダニエルとの争い。



4.4 デ・ボーヌの問題

フロリモン・デ・ボーヌ (Florimond de Beaune, 1601–1652)

デカルトの時代の法学者

デ・ボーヌの問題 (1638) とは逆正接問題で、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y - x}$$

を解けというもの。解は

$$y = a \log \left(\frac{a}{x - y + a} \right)$$

で、指数・対数函数の微積分ができなかったデカルトの時代には解けなかった。
 $y' = \frac{a}{y}$ なら $y = \sqrt{2ax + c}$ と解ける

[参考] デ・ボーヌの問題は一般化されてベルヌーイの方程式

$$y' = P(x)y + Q(x)y^n$$

となった。ヤコブが提唱して、ライプニッツ (変数分離法は彼による) が変換 $w = y^{1-n}$ を見出して積分因子の考えで解いた。

すぐ後にヨハンが定数変化法で解いた。Parker 参照 [30].

4.5 ロルの定理

ロルは 1690 年 [31]

Michel Rolle, Traité d'Algebre, 1690.

多項式 $f(x)$ の根 a, b に対して $f'(c) = 0$ となる $a < c < b$ の存在を使った。

翌 1691 年に証明を出版したが、無限小解析は使わない

ロルの定理 が再び表れるのは 19 世紀であるが、まだ微積分と繋がっていない

1834 Moritz Wilhelm Drobisch [13]

1846 Giusto Bellavitis [2]

1861 年 **Weierstrass** の夏の講義 [46, 14]

ロルの定理が現代的に定式化

1868 年 **Joseph Serret** の解析教程 [39]

Cours de calcul différentiel et intégral

t.1, p.17, p.23.

ロルの定理を用いて平均値の定理を証明

ただし、この証明は **O. Bonnet** による

1878 年 **Ulisse Dini** [12] で現代的に証明

THÉOREME IV. — Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions de x qui restent continues pour les valeurs de x comprises entre des limites données, et qui, pour ces valeurs, aient des dérivées déterminées $f'(x)$, $F'(x)$. Si x_0 et X désignent deux valeurs de x comprises entre les mêmes limites, et que la dérivée $F'(x)$, qui peut être nulle ou infinie pour $x = x_0$ ou pour $x = X$, ne le soit pas pour les valeurs intermédiaires, on aura

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)},$$

x_1 étant une valeur comprise entre x_0 et X .

Nous emploierons ici le raisonnement qui nous a déjà servi à établir le théorème I. Posons

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = A,$$

on aura *

$$(1) \quad [f(X) - AF(X)] - [f(x_0) - AF(x_0)] = 0,$$

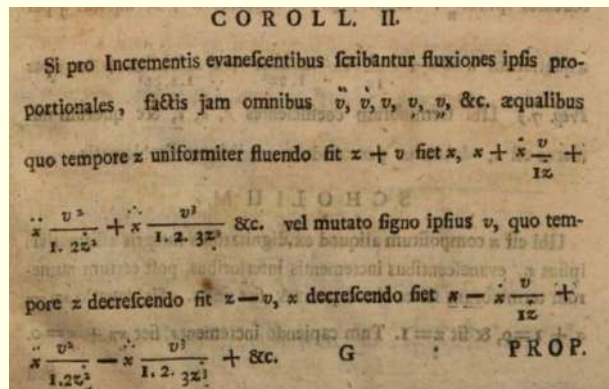
d'où il résulte que la fonction

$$(2) \quad \varphi(x) = [f(x) - AF(x)] - [f(x_0) - AF(x_0)]$$

18 世紀には微積分の教科書も出版され始めた

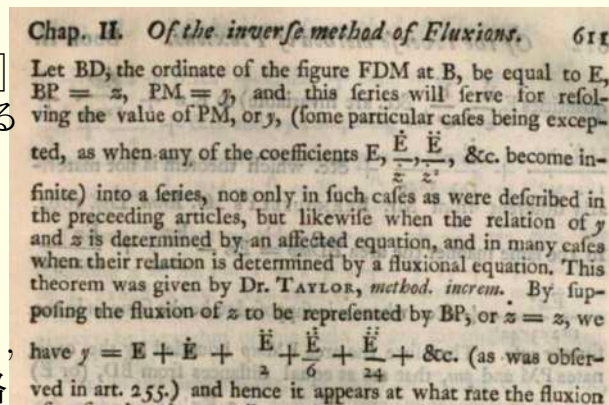
ブルック・テイラー

Brook Taylor (1685 – 1731),
Methodus Incrementorum Directa
et Inversa, 1715. [45]



コリン・マクローリン

Colin Maclaurin (1698 – 1746)
A Treatise of Fluxions: vol II, 1742. [27]
マクローリンの本は1749年に仏訳が出る
など大陸でも広く読まれた



マリア・アネージ (Maria Agnesi, 1718-1799) の『解析教程』[1]

Instituzioni analitiche, t.1 t.2 (1748),
オイラーの無限小解析なども続くが省略

5.1 ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ

フランスでも 17 世紀後半には解析学の教科書が表れている

ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ (Joseph Louis Lagrange, 1736 - 1813)

二変数函数の極大極小問題で 2 回微分を使った判定法なども発見

解析函数の理論 (Théorie des fonctions analytiques, Paris, 1797)

ラグランジュの剰余項 全集 9 巻 [26]

Prenant donc $f'(z), f''(z), \dots$ pour les fonctions dérivées de $f(z)$,
on aura

$$\begin{aligned} f(z+x) &= f(z) + x f'(z+u) \\ &= f(z) + x f'(z) + \frac{x^2}{2} f''(z+u) \\ &= f(z) + x f'(z) + \frac{x^2}{2} f''(z) + \frac{x^3}{2 \cdot 3} f'''(z+u) \\ &= \dots \end{aligned}$$

où u désigne une quantité inconnue, mais renfermée entre les limites
0 et x .

引き続いて

シルヴェストル・フランソワ・ラクロワ (Sylvestre François Lacroix, 1765 – 1843)

Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, 1797, 1798, 1800. [25]

も広く読まれたが、やはり微積分の教科書は 19 世紀にコーシーが書き直した

オーギュスタン＝ルイ・コーシー (Augustin Louis Cauchy, 1789 – 1857)

Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique, 1821 [10]

Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal 1823. p.24 [11]

コーシー微分積分学要論, 小堀 憲 訳, 共立出版 (1969) [23]

0/0 の極限について言及している。

この証明はラフすぎるがロピタルの証明とほぼ同じである

4.^e Problème. On demande la véritable valeur d'une fraction dont les deux termes sont des fonctions de la variable x , dans le cas où l'on attribue à cette variable une valeur particulière, pour laquelle la fraction se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Solution. Soit $s = \frac{z}{y}$ la fraction proposée, y et z désignant deux fonctions de la variable x , et supposons que la valeur particulière $x = x_0$ réduise cette fraction à la forme $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire, qu'elle fasse évanouir y et z . Si l'on représente par Δx , Δy , Δz les accroissemens infiniment petits et simultanés des trois variables x , y , z , on aura, pour une valeur

$$\text{quelconque de } x, \quad s = \frac{z}{y} = \lim_{y \rightarrow \Delta y} \frac{z + \Delta z}{y + \Delta y},$$

et, pour la valeur particulière $x = x_0$,

$$(3) \quad s = \lim_{\Delta y} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'}.$$

Ainsi, la valeur cherchée de la fraction s ou $\frac{z}{y}$ coïncidera généralement avec celle du rapport $\frac{dz}{dy}$ ou $\frac{z'}{y'}$.

Exemples. On aura, pour $x=0$, $\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = 1$, $\frac{l(1+x)}{x} = \frac{1}{1+x} = 1$;

pour $x=1$, $\frac{l(x)}{x-1} = \frac{1}{x} = 1$, $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$; &c...

コーシーの平均値の定理 Résumé の p.161 ページ

D'après ce qui a été dit dans la 7.^e leçon, si l'on désigne par x_0 , X deux valeurs de x entre lesquelles les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ restent continues, et par θ un nombre inférieur à l'unité, on aura

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f' [x_0 + \theta (X - x_0)].$$

Or, il est aisé de voir que des raisonnemens entièrement semblables à ceux dont nous avons fait usage pour démontrer l'équation précédente, suffiront pour établir la formule

$$(1) \quad \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f' [x_0 + \theta (X - x_0)]}{F' [x_0 + \theta (X - x_0)]},$$

θ désignant encore un nombre inférieur à l'unité, et $F(x)$ une fonction nouvelle qui, toujours croissante ou décroissante depuis la limite $x = x_0$ jusqu'à la limite $x = X$, reste continue, avec sa dérivée $F'(x)$, entre ces mêmes limites.

ロピタルの定理の拡張 Résumé の p.164 ページ

Admettons, en effet, que les deux termes de la fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

et leurs dérivées successives, jusqu'à celles de l'ordre $n-1$, s'évanouissent pour $x = x_0$. La formule (6) subsistera généralement pour de très-petites valeurs numériques de i , parce qu'en général chacune des fonctions

$$F(x), F'(x), F''(x), \dots, F^{(n-1)}(x)$$

croîtra ou décroîtra sans cesse depuis la valeur particulière de x représentée par x_0 jusqu'à une valeur très-voisine; et l'on tirera de cette formule, en faisant converger i vers la limite zéro,

$$(9) \quad \lim_{i \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + i)}{F(x_0 + i)} = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta i)}{F^{(n)}(x_0 + \theta i)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{F^{(n)}(x_0)}.$$

コーシー微分積分学要論は $\varepsilon - \delta$ 論法など現代的な解析学の最初ではあった
 同時期にベルナルト・ボルツァーノ (Bernard Bolzano, 1781 - 1848) も進めていたが、ロピ
 タルと関係ないので省略

解析学の厳密化が進むにつれて、不定形の極限についても再び議論になった。

デュ・ボア＝レーモン (Paul du Bois-Reymond, 1831–1889) は函数が振動する
 場合を除外して考察した。

Crelle, J. 74 (1872) [9]

Théorème. Lorsque les fonctions continues $f(x)$, $\varphi(x)$ n'ont point de limite finie différente de zéro, et que ni ces fonctions ni leurs dérivées n'ont un nombre infini de maxima et de minima, on aura toujours:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \text{etc. in inf.}$$

デュ・ボア＝レーモンの考察を受けて、現代的にロピタルの証明を与えたのが
 オットー・シュトルツである。

(Otto Stolz 1842 – 1905)
 Math. Ann. 14 (1879) [40]

3. Satz. „Wenn die eindeutigen Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, welche sich für $\lim x = +\infty$ beide dem Grenzwerthe Null nähern, die Eigenschaft haben, dass sie für alle endlichen Werthe von einem bestimmten Werthe $x = x_1$ an endlich und stetig sind und Differentialquotienten $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ besitzen, die weder zugleich (bestimmt) unendlich sind, noch zugleich verschwinden, und von denen der letztere $\varphi'(x)$ nicht entgegengesetzt bezeichnete Werthe annimmt*); so folgt aus der Existenz des Grenzwertes $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ ($\lim x = +\infty$) die Existenz eines Grenzwertes für den Quotienten $f(x) : \varphi(x)$ bei demselben Grenzübergange, und es ist

$$(f) \quad \lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} .''$$

6.1 ロピタルの定理の反例

シュトルツは証明を与えた Math. Ann. の次の号で反例について考察してる [41]

$$f(x) = x + \sin x \cos x, \quad g(x) = e^{\sin x} (x + \sin x \cos x).$$

$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-\sin x}$ は振動するので $x \rightarrow \infty$ で極限を持たないが

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 \cos^2 x}{e^{\sin x} \cos x (x + (\sin x + 2) \cos x)} = \frac{2e^{-\sin x} \cos x}{x + (\sin x + 2) \cos x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

この反例については **Ralph Philip Boas** [6] が一般化して考察している。

[注意] **ロピタルの定理の逆の反例**は **Victor Rouquet** [33] が与えている (1877)

$f(x) = x + \cos x, g(x) = x + \sin x$ は $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ だが, $f'(x), g'(x)$ とともに振動する函数である。

[補足] シュトルツは**ロピタルの差分版**でも名前が残っている [42]

シュトルツ=チェザロの定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell$ が存在すれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.
 $b_n = n$ の時が**チェザロ和** (Ernesto Cesàro, 1859–1906) である。

シュトルツの他の仕事として、**凸函数は片側導函数を持つこと**の証明、また、**非アルキメデス的実数**の先駆的な研究がある。P. Ehrlich 参照 [15]

ロピタルの定理は19世紀後半に現代と同じ意味の厳密さで定式化された。

この定理を実際に「ロピタルの定理」と読んだのは **E. グルサ**である Stolz の頃は名前がなかった

Cours d'analyse mathématique, 2nd ed. t.1 (1910), p.37; p.39:

$$\psi'(x) = A f'(x) + B \varphi'(x).$$

Remplaçons A et B par leurs valeurs; il vient

$$[\varphi(a) - \varphi(b)] f'(c) + [f(b) - f(a)] \varphi'(c) = 0,$$

ou, en divisant par $\varphi'(c)$ [$\varphi(a) - \varphi(b)$],

$$(1) \quad \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

La formule (1) est appelée quelquefois *formule de la moyenne généralisée*. Le théorème de l'Hospital sur les formes indéterminées s'en déduit aussitôt. Supposons en effet $f(a) = \varphi(a) = 0$. En remplaçant b par x, la formule (1) devient

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

x_1 étant compris entre a et x. Cette relation nous montre que, si le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tend vers une limite lorsque x tend vers a, le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers la même limite lorsqu'on a

$$f(a) = \varphi(a) = 0.$$

ちなみにグルサ解析教程の初版(1902)にはロピタルの名前がない

20世紀に入って、ロピタル・ヨハンの論争が再度興味を持たれ、特にエネストレームは**二人の書簡**を発見した。

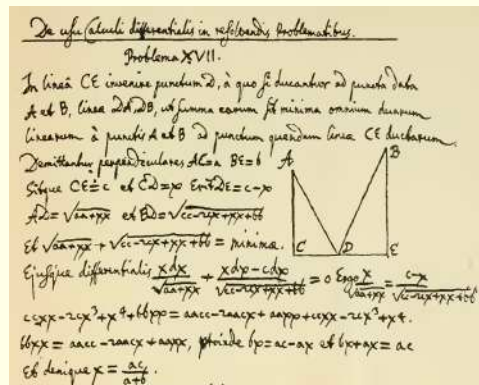
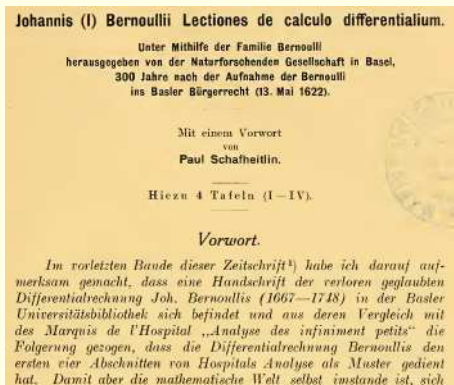
モーリッツ・カントール (Moritz Cantor, 1829–1920)

グスタフ・エネストレーム (Gustav Hjalmar Eneström, 1852–1923)

参考 エネストレームはオイラーの論文を整理、E-番号は Eneström に因む)

1742 年発表論文の**前節**がロピタルの本に相当すると考えられた
 しかし、ロピタルの本の元がヨハンの講義であるのか不明であった
 1921 年**シャフハイトリン** (Paul Schafheitlin) がバーゼル大の図書館で
 ヨハンの講義録

“**Lectiones de calculo differentialium**” (1691/92)
 を発見。この微積分講義録はロピタルの本の前半と一致した



シャフハイトリンの発見によってヨハンの寄与が200年ぶりに示された！

Paul Schafheitlin:

Johannis (I) Bernoullii Lectiones de calculo differentialium,

Verh. Naturf. Ges. Basel **34**, 1– 32 (1922-1923).

前ページの Schafheitlin の論文は、ベルヌーイ家がバーゼル市民権を認められた1622年5月13日から300年後に、**ベルヌーイ家の助成**を受けてバーゼル自然科学協会によって出版された

ベルヌーイの原稿は、ロピタルの *Analyse* の最初の4章のモデルだった

ただし、ヨハンの直筆ではなく1705年にヨハンの甥の**ニコラウス (I) ベルヌーイ**が写した原稿

右は Schafheitlin がまとめたベルヌーイの原稿

Bernoulli, J.

Die Differentialrechnung.

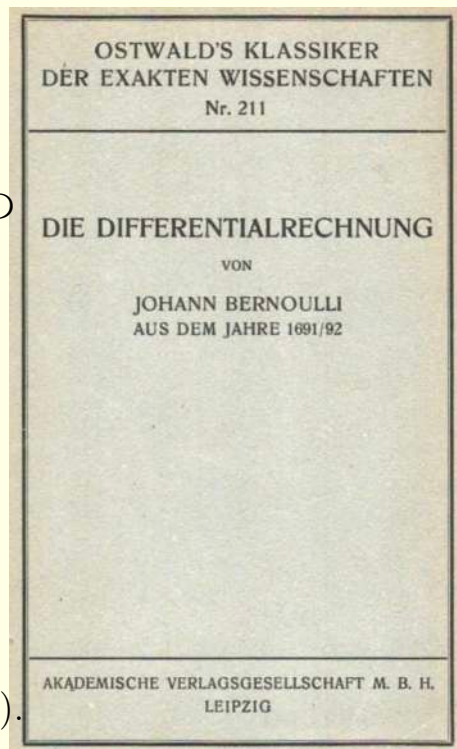
Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 211

Leipzig, Akademische Verlagsgesellsch. p.56 (1924)

Schafheitlin のもう一つの論文：

Johann Bernoulli's *Differentialrechnung*,

Verh. Naturf. Ges. Basel **32**, 230-235 (1920-1921).



8.1 グルサ「解析教程」

エドゥアール・グルサ（Édouard Goursat, 1858–1936）は超幾何函数や複素解析などの研究者である

グルサの **Cours d'Analyse Mathématique** は微分積分だけではなく、複素解析・微分方程式の入門書として広く読まれた。

初版は2巻本

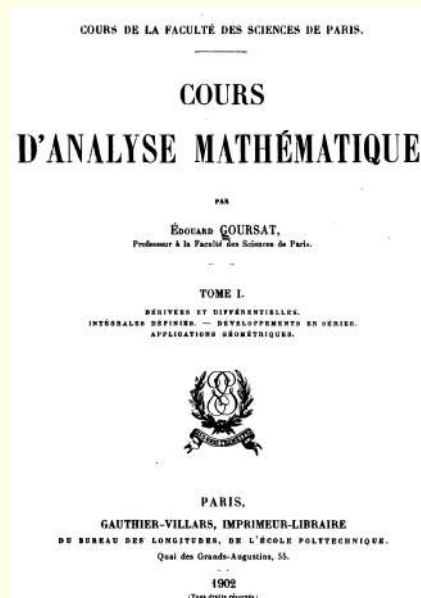
第2版で大きく内容が変わったが以降は大体同じ

第4版 t.2 で Painlevé の定理などが加筆

第4版 t.1. t.2 と第3版 t.3 の組み合わせで

今も Gabay Edition が購入できる

また**英訳もある（5巻本）**



初版（2巻本） Tome.1 1902, Tome.2 1905

第2版（3巻本） Tome.1 1910, Tome.2 1911, Tome.3 1915 [18]

第3版（3巻本） Tome.1 1917, Tome.2 1918, Tome.3 1923

8.2 高木貞治・解析概論

高木貞治はGoursatを読んでいた

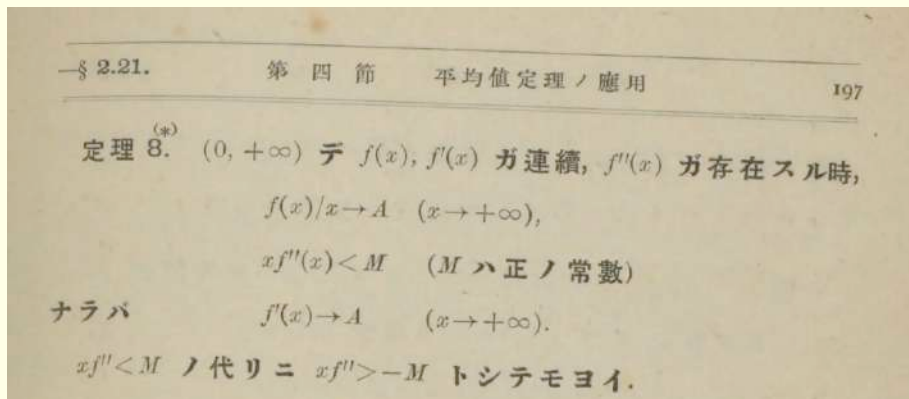
高木貞治「解析概論」岩波講座版の結語（昭和10年8月）には
「ロピタルの定理を現代の解析教程の中で扱うのは時代錯誤でなかろうか」

一例デアルガ、本稿第二章デ所謂不定形 $\left(\frac{0}{0}, \infty-\infty \text{ ナド}\right)$ フ
述ベナカツタ。ソレハ忘レタノデハナイ。既ニ第一章デ十九
世紀式ノ $\lim$ フ説明シタ後ニ、十八世紀ニ逆轉シテ不定形ノヤ
ウナモノヲ特別扱ヒスルコトガ、解析概論ニ於テ適切デアラウ
カ？ 傳統的ノ解析教程ニハ、往々練習(受験數學!)ト稱シテ、不定
形ノ夥シイ例題ガ列ベテアル。ソレラハ例外ナク解析函數ニ
關スルモノデアル。ソレヲ解析性ヲ伏セテ置イテ單ナル微分
可能性ダケデ處理シヨウトイフノデアル。時代錯誤デナカラ
ウカ。本稿デハ最終ノ第七章ニ至テ始メテ(?)不定形 $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$
ニ遭遇シタガ、 $x=0$ ニ於テ、コノ解析函數ハ正則デ、ソノ値ハ0デ
アルコトヲ、讀者ハ不定形ナドイフモノニ無頓着ニ了解シテシ
マウ。――

8.3 藤原松三郎・数学解析 第1編

藤原松三郎・数学解析（内田老鶴圃・昭和9年2月）は詳しい(2.20節)

2.21節ではロピタルの定理の逆が扱われている



$\frac{f(x)}{g(x)}$ において、 $g'(x) \neq 0$ より $g(x)$ は単調である。

そこで $t = g(x)$ とおき $\frac{f(g^{-1}(t))}{t}$ について $t \rightarrow 0$ の極限を考えればいい

ロピタルの定理の逆は窪田忠彦 (1885–1952) による [24] :

T. Kubota, Einige Sätze den Grenzwert betreffend,

Tohoku Math. J. **15** (1919), 314–322

9. 終わりに

ロピタル侯爵は貴族でありながらも当時の数学者と基本的には良い関係を築いていたようである

ヨハン・ベルヌーイは貴族であるロピタル侯爵に自分の研究成果を渡してお金を貰うことに関して忌避感を持っていなかったと思われる

初版の出版時は29歳だったこともあってヨハンも特に不満はなかったようだが、その後ロピタル侯爵の本の評価が高まったことで不満が大きくなったようである。

1702年からの**ソランとロルとの論争**があり、さらに1704年にロピタル侯爵が亡くなり、1705年には兄ヤコブの後を継いでバーゼル大教授になったことなどから、ロピタル侯爵に対する攻撃的な発言が目立ったヨハン以上にソランも周囲からよく思われてなかったようである

しかしながら、**エネストレーム**がヨハンらの書簡を発見して、**シャフハイトリン**がヨハンの講義録を発掘したことでヨハンの貢献が明確になった

でも今後も**ロピタルの定理**なんだろうなあと思ってます。ド・ロピタルの定理の方が良いのですが。

References

- [1] Maria Agnesi, *Instituzioni analitiche*, t.1 t.2 (1748).
- [2] Giusto Bellavitis, *Sul più facile modo di trovare le radici reali delle equazioni algebriche e sopra un nuovo metodo per la determinazione delle radici immaginarie*, p.34 1846.
- [3] J. Bernoulli; *Perfectio Regula sua edita in Libro Gall. Analyse des infiniment petits art. 163, pro determinando valore fractionis, cujus Numerator & Denominator certocasus evanescunt*, *Acta Eruditorum* 1704 375-380. *Opera I*, Op. LXXI, 401–405.
- [4] J. Bernoulli; *Die Differentialrechnung*. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 211, Leipzig, Akademische Verlagsgesellsch. p.56 (1924).
- [5] J. Bernoulli; 『*Lectones Mathematicae de Methodo Integralium*, Allisque, Johannis Bernoulli, *Opera omnia* **3** (1742), 385–558.
- [6] R. P. Boas, *Counterexamples to L'hôpital's Rule*, *Amer. Math. Monthly*, **93** (1986), 644–645.

- [7] R. E. Bradley, S. J. Petrilli, C. E. Sandifer; L' Hôpital's Analyse des infiniments petits, Birkhäuser; 2015.
- [8] Der Briefwechsel von Johann I. Bernoulli; Band 1: Der Briefwechsel mit Jacob Bernoulli, dem Marquis de l'Hôpital u.a., Springer, 1955; Band 3: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon. Zweiter Teil:1702–1714, 1992.
- [9] Paul du Bois-Reymond Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées, J. reine und ange. Math. **74** (1872): 294–304.
- [10] Augustin Louis Cauchy; Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique, 1821
- [11] Augustin Louis Cauchy; Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal 1823.
- [12] Ulisse Dini; Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, 1878
- [13] Moritz Wilhelm Drobisch, Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen nach ihren analytischen und geometrischen Eigenschaften, p.176, (1834).

- [14] Dugac, P.; Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Arch. Hist. Exact Sci.* **10**, 41–174 (1973).
- [15] Ehrlich, P., The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes. *Arch. Hist. Exact Sci.* **60** (2006), 1–121.
- [16] Bernard Fontenelle, Éloge de M. le marquis de L'hospital, *Histoire de l'Académie royale des sciences* (1704), 125–132.
- [17] 藤原松三郎, 数学解析第一, (内田老鶴圃・昭和9年2月)
- [18] E. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, ed. 2. t.1 (1910).
- [19] Mr. G***, Solution du probleme que M. de Beaune, *Journal des Sçavans*, 1692, 401–403.
- [20] Guillaume de l'Hospital, Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, 1696; 2ed; 1716.
- [21] Guillaume de l'Hospital, Traité analytique des sections coniques, 1707.
- [22] Guillaume de l'Hospital, The Method of Fluxions: Both Direct and Inverse, (translated into English by Edmund Stone), 1730.

- [23] コーシー著, 小堀 憲 訳, コーシー微分積分学要論, 小堀 憲 訳, 共立出版 (1969)
- [24] T. Kubota, Einige Sätze den Grenzwert betreffend, Tohoku Math. J. **15** (1919), 314–322.
- [25] Sylvestre François Lacroix, Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, Tome 1 (1797), Tome 2 (1798); Traité des différences et des séries, faisant suite au traité du calcul différentiel et du calcul intégral (1800).
- [26] Joseph Louis Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, in Oeuvres de Lagrange. T. 9, 15–413, 1797.
- [27] Colin Maclaurin, A Treatise of Fluxions: vol II, 1742.
- [28] Gabriello Manfredi; De constructione aequationum differentialium primi gradus, 1707.
- [29] 岡本和夫 [ほか], 数学 III, 実教出版, 2019.1
- [30] Adam E. Parker, Who Solved the Bernoulli Differential Equation and How Did They Do It?, College Math. J. **44** (2013), 89–97. Volume 44, 2013
- [31] Michel Rolle, Traité d’Algebre, (1690).

- [32] Michel Rolle, Démonstration d’une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés, 1691.
- [33] V. Rouquet, Note sur les vraies valeurs des expressions de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. *Nouv. annales math.*, **16** (1877), 113–116.
- [34] J. Saurin, Reponse à l’ecrit de M. Rolle de l’Ac. R. des Sc. inseré dans le Journal du 13 avril 1702. sous le titre de Regles et Remarques pour le Problème general des Tangentes, Journal des Sçavans, 3 août 1702, 519–534.
- [35] J. Saurin, Refutation de la Réponse de M. Rolle inserée, Journal des Sçavans du 18. May 1705: (Jeudi 11. Juin), pp. 367–382.
- [36] P. Schafheitlin, Die Theorie Der Besselschen Funktionen, 1908.
- [37] P. Schafheitlin, Johann Bernoulli’s Differentialrechnung, Verh. Naturf. Ges. Basel **32**, 230-235 (1920-1921).
- [38] P. Schafheitlin, Johannis (I) Bernoullii Lectiones de calculo differentialium, Verh. Naturf. Ges. Basel **34**, 1– 32 (1922-1923).
- [39] Joseph Serret, Cours de calcul différentiel et intégral tome. 1, tome. 2, 1868

- [40] O. Stolz, Ueber die Grenzwerte von Quotienten, *Math. Ann.*, **14** (1879), 231–240.
- [41] O. Stolz, Ueber die Grenzwerte von Quotienten, *Math. Ann.*, **15** (1879), 556–559.
- [42] O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, 1885
- [43] D. J. Sturdy, “Science and Social Status: The Members of the Academie Des Sciences 1666-1750”, Boydell & Brewer 1995.
- [44] 高木貞治, 解析概論 (VIII), 岩波講座数学, 昭和10年8月.
- [45] Brook Taylor, Methodus Incrementorum Directa et Inversa, 1715.
- [46] Karl Weierstrass, Differentialrechnung 1861. Ausarbeitung der Vorlesung an dem Königl. Gewerbeinstitut zu Berlin im Sommersem. (von H.A. Schwarz).
- [参考] 中根 美知代; 東大数理2014 年度冬学期「数学史」配布資料 (Schwarz のタイプ原稿が2 ページ挿入)

終わりに 講演中に東京大の松尾厚氏よりコメントをいただき修正しました。
p.13 で著者 G*** についている敬称 Mr. が Marquis の略かどうかは不明です。