

ロピタルの定理を巡って

2025 年 10 月 5 日 大山 陽介 (徳島大学)

数学月間企画講演会 (第 16 回)・東京大学 (駒場) 数理科学研究科棟

1. いわゆるロピタルの定理について

ロピタルの定理 $f(x), g(x)$ が区間 (a, b) で微分可能とする。 $a < c < b$ となる c に対して $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ かつ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在し、さらに c の近傍 ($\neq c$) において $g'(x) \neq 0$ が成り立つならば

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

※ 高校数学でも「発展」の項目で扱われていることがある

2. ギヨーム・ド・ロピタルについて

ギヨーム・フランソワ・アントワーヌ・ド・ロピタル (Guillaume-Francois-Antoine de l'Hospital, 1661 年 6 月 7 日–1704 年 2 月 2 日)

サント＝メム侯爵およびモンテリエ侯爵、アントルモン伯爵、ウク、ラ・シェーズ、ル・ブレオおよびその他の地域の領主、ドゥールダンの町および城の統治者

短く Guillaume de l'Hospital (ギヨーム・ド・ロピタル) もしくは Marquis de l'Hospital (ロピタル侯爵)

3. ロピタルの定理 0/0 の極限—

ロピタルの定理が発表されたのは

Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes

『曲線を理解するための無限小の解析』1696, 1716 (2ed)

3.1 ロピタルの定理: The origin

ロピタルの本は全 10 章、本文は 181 ページである。内容は代数関数で定義される曲線に関する微分学で積分はない。ロピタルの定理は第 9 章の冒頭 p.145 に解説されている。

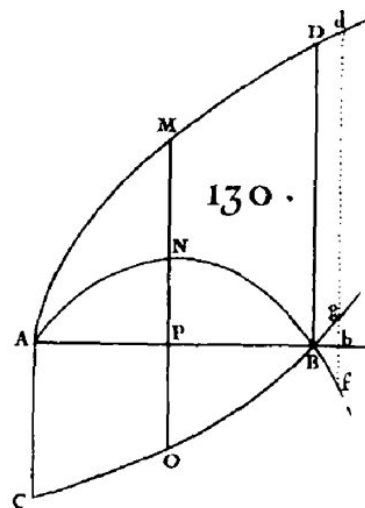
SECTION IX.

Solution de quelques Problèmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

Problème.

163. SOIT une ligne courbe AMD (AP = x, PM = y, FIG. 130. AB = a) telle que la valeur de l'appliquée y soit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorsque x = a, c'est-à-dire lorsque le point P tombe sur le point donné B. On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée BD.



ロピタルの「証明」

A を原点として、 $\frac{PM}{AB} = \frac{PN}{PO}$ とする. 曲線 ANB が $y = f(x)$, COB が $y = g(x)$ で表され、 $AB = a$, $f(a) = f(B) = 0$, $g(a) = g(B) = 0$ とする. 曲線 AMD が函数 $a \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ である.

問題: BD の長さを求めよ.

B の近くで微少にずらすと、曲線 AMD の定義より

$$\frac{bd}{AB} = \frac{bf}{bg}$$

となっている. $Bb = dx$ と考えて

$$bf = f'(B)dx, \quad gb = g'(B)dx$$

となるので $bd \rightarrow BD$ の極限を取ると

$$\frac{BD}{AB} = \frac{f'(B)}{g'(B)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

□

3.1.2 ロピタルの定理の例

定理に続いて、2つの例が挙げられている。

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \frac{16}{9}a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}} = 2a$$

前者はピエール・ヴァリニョンへヨハンが出した問題が元になっている

3.3 ロピタル Analyse の謝辞

Analyse des infiniment petits (以下 Analyse) は 1696 年の初版は著者なし、序文にはベルヌーイらに対する感謝 viii, xii

viii) 両ベルヌーイ氏 (兄ヤコブと弟ヨハン) は、微積分の美しさに初めて気づきました。挑戦することも考えられなかったような困難を超えるまでまでに、微積分を押し上げました。

xii) 私は両ベルヌーイ氏、特に Groningen 大学の教授である若きベルヌーイ氏の啓示から多くを学びました。私は両氏の発見とライプニッツ氏の発見を積極的に用いました。彼らが私に残してくださるものだけで満足し、彼らが望むだけ多くのものを主張することに同意します。

4. ヨハン・ベルヌーイの書簡

ベルヌーイとロピタルの間の書簡は書簡集として残っている (1955 出版)

[注釈] 1879 年 この書簡はグスタフ・エネストレーム (Gustav Hjalmar Eneström, 1852–1923) が発見

ヨハン・ベルヌーイ Johann Bernoulli, 1667–1748、ロピタルは 1661 年生)

1691 年 ヨハン (24 歳) はロピタル侯爵 (30 歳) に個人指導

1692 年秋 バーゼルに戻る、以降も **1702 年**まで文通した

1694 年 博士号を取得

1695 年 オランダのフローニンゲン大学の教授就任

1705 年 バーゼルに戻る。兄ヤコブが務めていたバーゼル大学の数学教授職に

ヨハン vs ロピタル・最初の論争

ロピタルの **1692 年**の論文

Mr. G***, Solution du probleme que M. de Beaune, *Journal des Sçavans*, 1692, 401–403.

デ・ボーンの問題 “逆正接問題で $y' = \frac{1}{y}$ などを解け”

ロピタルはこの問題の答えをヨハンから教えてもらったのに匿名で発表

4.1 ロピタルからヨハンへの資金援助

1694 年 3 月 ヨハンに対して、ロピタルは年 300 リーブルを送ることにした

1695 年 7 月 200 リーブル

1696 年 6 月 Analyse 出版直後の 300 リーブル、合計 800 リーブル

ロピタルは妻がアントルモン伯爵の財産を引き継ぐ一方で、ヨハンは

1694 年 結婚、**1695 年** ニコラス 2 世 (Nicolaus II, –1726) 誕生

1695 年 フローニンゲン大学教授就任

300 リーブルはベルヌーイがフローニンゲンで得ることになる年俸の 21 %。ベルヌーイの状況では、十分ありがたい金額。この時期のヨハンはロピタルに感謝の手紙も書いている

4.2. ジョセフ・ソランとミシェル・ロルとの論争

ロルの定理 (1691)

$f(x)$ が微分可能で $f(a) = 0, f(b) = 0$ ならば $f'(c) = 0$ となる $a < c < b$ が存在

1700 年 無限小解析に否定的なミシェル・ロル (Michel Rolle, 1652–1719) は**ヴァリニョン**と論争. 最終的に**ロルが誤りを認めて決着**

1702 年 4 月 Journal des Sçavans の編集長であるジョセフ・ソラン (Joseph Saurin, 1659–1737) がロルに対して、 $x = a$ で不定形 $0/0$ なら問題があるとして、ロピタルの本を引用しつつロルを自誌で批判

4.3. ヨハン・ベルヌーイの不満

ソランがロルを批判する中で、ロピタルの本を賞賛しすぎたことで、ヨハンは大きな不満を持っていた

1704 年 2 月 2 日 ロピタル死去

1704 年 8 月 ヨハンの論文ではロピタルの本を引用しつつ

1) ロピタルの定理は自分の成果

2) 結果を改善する必要があるさらに深く自分は知っている

と主張

1705 年 5 月 ソランが反論

4.3.1. ヨハン・ベルヌーイの主張「ロピタルの本は自分の講義だ」

1707 年 2 月 26 日 付のヴァリニョン宛の手紙ロピタル氏はこの本の出版において、私が彼に渡した資料の大部分をラテン語でフランス語に翻訳した以外には、何の役割も果たしていません

この鍵は私に完全に負っているのです。私がいなければ、彼は決して見つけられなかったでしょう。なぜなら、私がパリに到着するまで、彼はそのような鍵がこの世に存在することを知らなかったからです。

4.3.2 ロピタルの本に続く積分論

Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium, Allisque

in Johannis Bernoulli, Opera omnia 3 (1742)

出版年が 1742 年だが、1691 年に執筆されたベルヌーイの初期作品の一つ

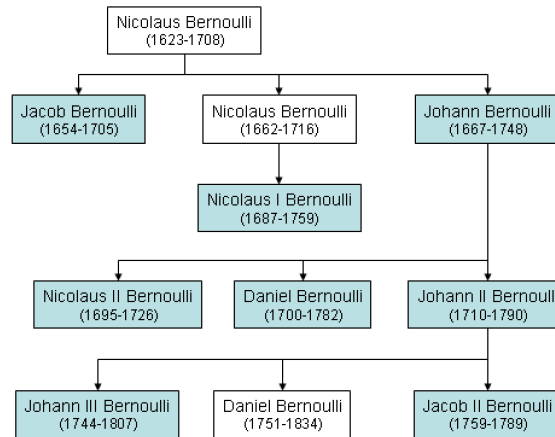
冒頭「前節で、量の微分がどのように形成されるかを見てきた」

4.3.3 しかしながら …

ヨハンはライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) らにも自分の先取権を訴えたしかし、受け入れられず、1716 年に 2 版がロピタル著として出版された

ヨハンらの書簡が発見される前も、この Lectiones の記述からロピタルの本が第一部で、Lectiones が第二部という考えは知られていた

ベルヌーイ一族は互いに**先取権争い**をよくやっており、ヨハンの主張は当時は信用されなかった。例えば流体力学の「ベルヌーイの原理」に関して息子ダニエルとの争い。



5. ロピタルの定理 –エピソード 3：新たなる希望コースー

18 世紀には微積分の教科書も出版され始めた

ブルック・テイラー (Brook Taylor, 1685 – 1731),
Methodus Incrementorum Directa et Inversa, 1715.

コリン・マクローリン (Colin Maclaurin, 1698 – 1746)

A Treatise of Fluxions: vol II, 1742.

マクローリンの本は 1749 年に仏訳が出るなど大陸でも広く読まれた

マリア・アジェーニ (Maria Agnesi, 1718-1799) の『**解析教程**』 Instituzioni analitiche (1748)
オイラーの無限小解析なども続く

5.1 ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ

フランスでも 17 世紀後半には解析学の教科書が表れている

ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ (Joseph Louis Lagrange, 1736 - 1813)

解析函数の理論 (Théorie des fonctions analytiques, Paris, 1797) 全集 9 巻

引き続いて

シルヴェストル・フランソワ・ラクロワ (Sylvestre François Lacroix, 1765 – 1843)

Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, 1797, 1798, 1800.

も広く読まれたが、やはり微積分の教科書は 19 世紀にコースーが書き直した

5.2 オーギュスタン＝ルイ・コースー

オーギュスタン＝ルイ・コースー (Augustin Louis Cauchy, 1789 – 1857)

Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique, 1821

Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal 1823. p.24

コースー微分積分学要論, 小堀 憲 訳, 共立出版 (1969)

コースーも $0/0$ の極限について言及している。証明はラフすぎるがロピタルの証明とほぼ同じである。**コースーの平均値の定理** は Résumé の p.161 ページに表れている

6. ロピタルの定理 –エピソード 4: Stoltz の証明–

コーシー微分積分学要論は ε - δ 論法など現代的な解析学の最初ではあった。解析学の厳密化が進むにつれて、不定形の極限についても再び議論になった。

デュ・ボア＝レーモン (Paul du Bois-Reymond, 1831–1889) は函数が振動する場合を除外して考察した (1872)。デュ・ボア＝レーモンの考察を受けて、現代的にロピタルの証明を与えた (1879) ののが **オットー・シュトルツ** (Otto Stolz 1842–1905)

6.1 ロピタルの定理の反例

ロピタルの反例はシュトルツ以前に **Victor Rouquet** が与えている (1877)

ただ $f(x) = x + \cos x$, $g(x) = x + \sin x$ というややつまらない例である

シュトルツは証明を与えた Math. Ann. の次の号で反例について考察してる

$$f(x) = x + \sin x \cos x, \quad g(x) = e^{\sin x}(x + \sin x \cos x).$$

$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-\sin x}$ は振動するので $x \rightarrow \infty$ で極限を持たないが

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 \cos^2 x}{e^{\sin x} \cos x (x + (\sin x + 2) \cos x)} = \frac{2e^{-\sin x} \cos x}{x + (\sin x + 2) \cos x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

7. ロピタルの定理 –エピソード 5: ヨハン・ベルヌーイの夜明け–

ロピタルの定理は 19 世紀後半に現代と同じ意味の厳密さで定式化された。

この定理を実際に「ロピタルの定理」と読んだのは E. グルサである。

Stolz の頃は名前がなかった

Cours d'analyse mathématique, 2nd ed. t.1 (1910), p.37; p.39:

20 世紀に入って、ロピタル・ヨハンの論争が再度興味を持たれ、特に **グスタフ・エネストレーム** (Gustav Hjalmar Eneström, 1852–1923) は二人の書簡を発見した。

7.1 ヨハン・ベルヌーイとロピタル侯爵 –再び–

1742 年発表論文の前節がロピタルの本に相当すると考えられた。しかし、ロピタルの本の元がヨハンの講義であるのか不明であった

1921 年 **シャフハイトリン** (Paul Schafheitlin) がバーゼル大の図書館でヨハンの講義録 “Lectiones de calculo differentialum” (1691/92)

を発見。この微積分講義録はロピタルの本の前半と一致した

シャフハイトリンの発見によってヨハンの寄与が 200 年ぶりに示された！

7.2 シャフハイトリンの発見

ベルヌーイの原稿は、ロピタルの Analyse の最初の 4 章のモデルだった