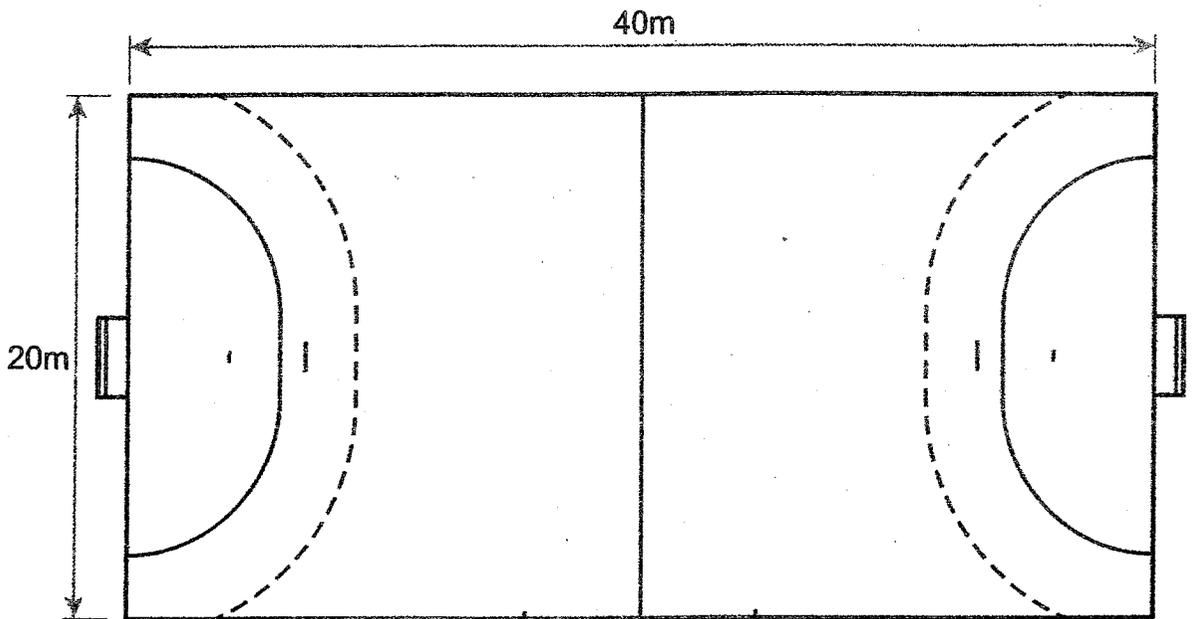


数学を使って、 コートをかこう

ハンドボールは、7人ずつの2チームがボールを相手のゴールに投げ入れて勝負を競うスポーツです。下の図のような、縦20m、横40mの長方形のコートの中で、14人の選手がプレーします。



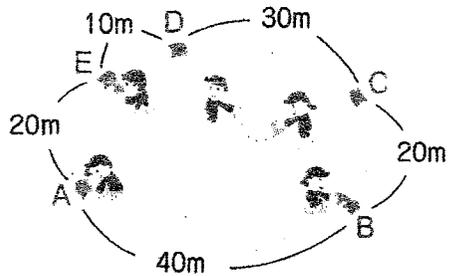
紙やノートにかくのとは違^{ちが}い、
体育館やグラウンドに大きな
長方形のコートをか^かくのは、
とてもたいへんです。
しかし、次のページのような
方法を使うと、簡単に長方形の
コートをか^かくことができる
そうです。





使用するロープを準備する

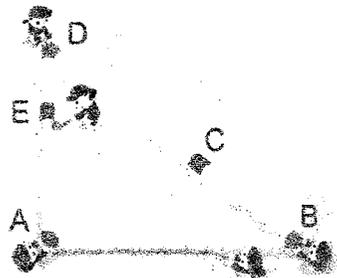
長さ 120m のロープを輪にし、それぞれの点の間の長さが右の図のようになる点 A ~ E をとって印をつける。



40mの辺をとる

右の図のような三角形をつくり、AB に線をひく。また、このとき、E の場所にも印をつける。

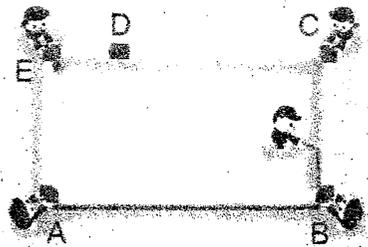
● $\triangle ABD$ は、どんな三角形でしょうか。



コートとなる長方形を完成させる

ステップ 2 の状態から、点 B, E の場所はそのままだ、点 C を、BC, CE がピンとはられる位置まで動かします。

● $\triangle BCE$ が直角三角形になるのはなぜでしょうか。



上のような方法で、縦 20m、横 40m の長方形 ABCE をかくことができます。

● 上のようにしてかいた四角形 ABCE が長方形になる理由を説明してみましょう。

ハンドボールコートをかくとき、120m のロープで、上の方法とは違う場所に印をつける方法もあります。

その場合は、ロープのどの場所に印をつけて、どのようにすれば、うまくかけるでしょうか。また、その方法でうまくかける理由を考えてみましょう。



—尊敬すべき縄張り師— 古代のエジプトやメソポタミア

そこでの土地測量法の推定及びその教材としての活用

● 2～3時間扱い ● 関連単元…7章 三平方の定理

1. 課題について

古代文明において、縄を活用して測量がなされてきたことが知られている。エジプトの畑の分割において、縄を張って仕事をしたことは壁画やいくつかの記録から明らかである。メソポタミア文明においても、土地の方形区画がなされている。エジプトの縄張り師やバビロニアの縄の使い手とされている人たちは、実際にはどのように縄を活用したのだろうか。インドにはアーバスタンバシルバーストラ等の文献が残っている。オリエントの縄の使い方は現在も謎であり、様々な推定がなされている。筆者は相当の根拠をもって、古代の文明の測量に関わる人たちは、12等分の輪になった特定の長さのひもを使ったのではないかと推定し、これを“エジプト紐”と名付けた。これは数学を学ぶおもしろさを生徒に気付かせる教材となる。また、幾何学という数学が、農地の分配や街区の設計などで社会に役立つという意義をもっていることを理解するための教材としても注目したい。幾何学の発想そのもののおもしろさと、数学の社会への貢献の両方の側面からこの教材をとらえたい。また、古代の単位そのものを研究することも、数学教育の重要な側面であると考えている。

2. 展開例

学習活動	指導上の留意点と補足	
<p>古代の単位についての学習</p> <p>古代メソポタミア文明や エジプト文明においては、縄を張って土地を碁盤の目のような方形の区画にして利用していたことが歴史として知られている。</p> <p>長さや広さの尺度、時制や方位などの表現方法から、古代メソポタミアでは12進法の考え方、60進法の考え方が成立していたことが確かめられている。エジプトは、一日を12刻に分割する時制ももっていた。太陽の通り道である黄道を12区画に分割して、12の星座にして季節を判断していた。</p> <p>また、文明の基礎に正多角形が存在した。</p> <p>土地の方形区画には正方形、一日の12等分には正六角形が必要である。どのように作図したのか考えてみよう。</p> <p>土地の方形区画を決める人の中には、縄を使う人々がいた。どのように縄で正方形や正六角形をつくったか考えよう。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・長さの始まり ・広さの源流 ・時計の始まり ・星座の始まり ・縄の使い手 ・縄張り師 ・12等分 	<p>(エジプト文明)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ヘロドトス、歴史によればエジプトの土地は方形区画 ・エジプトの日時計が出土 (メソポタミア文明) 12クシュ(キュビット)は 1ニンダン ・1クシュ(キュビット)は 約50cm ・1ニンダン=約6m ・1ギー(1葦)=約3m ・1スタディオン=約180m ・1スタディオン=60ギー ・1ダナ=60スタディア

- ・ヒントとして、どちらの形にもなる輪になった形の等分された縄紐が使われたのではないかと推定されていることを伝える。
- ・何等分であったか推定してみよう。

操作活動 実験 試行錯誤

・12個の結び目をもった、輪になった縄紐で結び目を持って三角形を作ってみよう。

- ・二等辺三角形を作ろう。
- ・正三角形を作ろう。

・直角三角形を作ろう。

- ・四角形を作ろう。
- ・ひし形を作ろう。
- ・平行四辺形を作ろう。

- ・たこ形を作ろう。
- ・直角をもつ四角形を作ろう。

・正方形を作ろう。

・長方形を作ろう。

・正六角形を作ろう。

- ・十字形を作ろう。
- ・ヘキサグラムに挑戦しよう。

- ・24等分
- ・60等分

・ひとまず12等分とまとめる。

・12等分された輪になった縄の12個の印を持つことを確認する。

- ・5, 5, 2
- ・4, 4, 4

・3, 4, 5

- ・3, 3, 3, 3
- ・2, 4, 2, 4
- ・1, 5, 1, 5
- ・2, 2, 4, 4
- ・3, 4, 5 から工夫して,
- 3, 3, 3, 3

- ・3, 4, 5 から工夫して,
- 2, 4, 2, 4
- 4, 4, 4

- ・さらに,
- 4, 4, 4 から工夫して,
- 正六角形
- ・正方形から
- ・正六角形から

メソポタミアの面積単位
1サル=1平方ニンダン

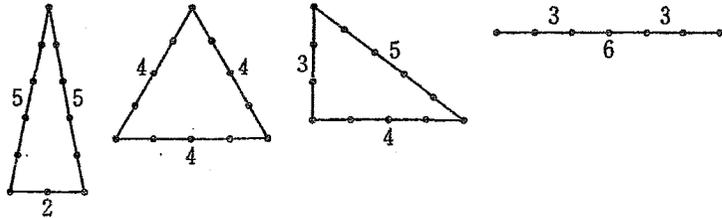
実際に机上での操作活動をするために、周の長さが60cmの輪が適当である。4人のグループで机を寄せてその上で話しながら実験していくことで、協力しながらの実験と具体的な操作活動がなされる。3, 3, 6は三角形にはならない。2, 2, 8や1, 1, 10も三角形にはならない。

ひし形といっても形は様々なものができる。平行四辺形も同様である。となりの辺とのなす角で1つの形が決まる。3, 4, 5からの変形を基本とする。なぜ正方形になるかの論理。対角が等しく、直角になることが根拠になる。同じく考えればよい。

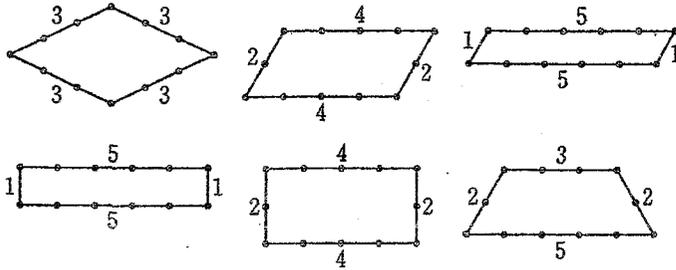
中点連結定理の応用となる。正六角形ができることで中心から全方位が12等分できることもこの形の利点である。古代の宗教は、美しい形を利用している。

3. 生徒用プリント例及び生徒の発想の記録

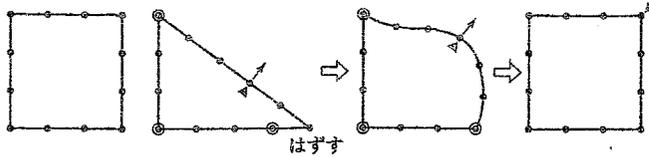
12等分された、
輪になった紐
を使って図形
を作ろう。
三角形を作ろ
う。どんな三
角形ができる
かな。



四角形はどん
なものができ
るかな。

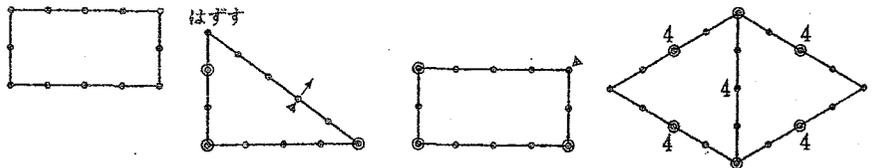


正方形を作ろ
う。

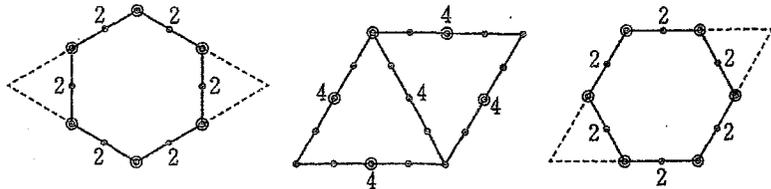


※◎は固定した点

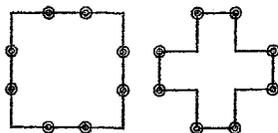
長方形を作ろ
う。



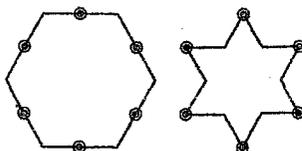
正六角形を作
ろう。



十字形を作ろ
う。



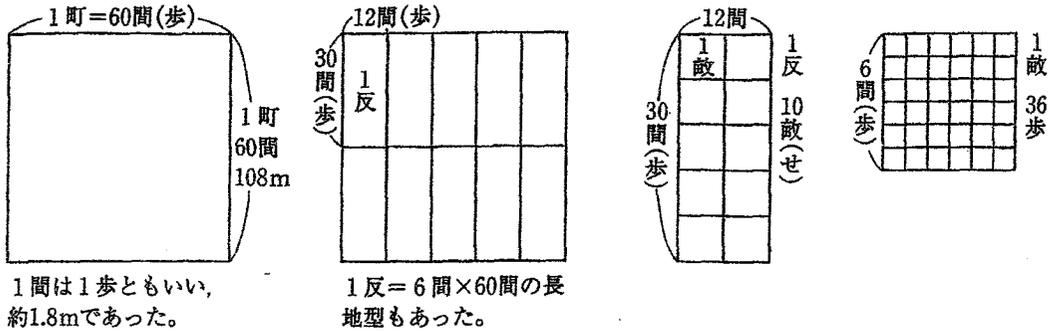
六角星形を作
ろう。



4. 日本古代 条里制の再現

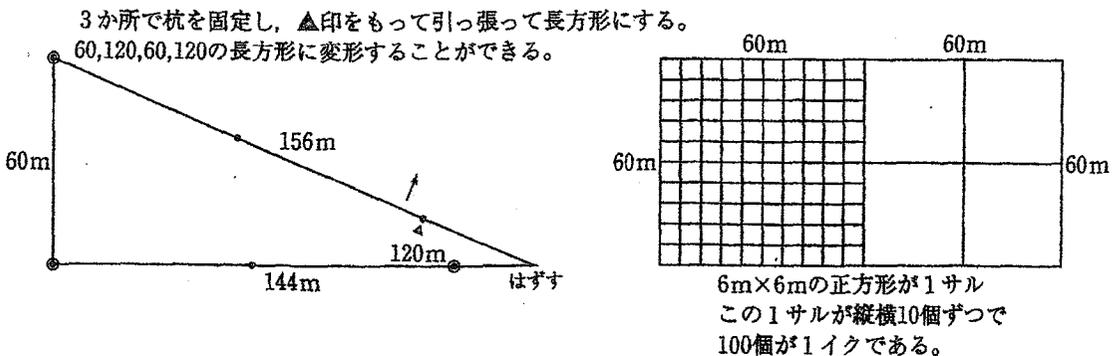
〈1歩1.8m 360歩であるところの360間の間縄(1間ごとに間札がついている測量用の縄)を利用した100畝, 10反, 1町の設計実施の方法と実践例〉

条里制遺構の調査によれば, ほとんど1町は108mで60間(歩)の正方形よりなっている。すなわち, 1間(歩)は1.8mである。1町の正方形は, 6歩四方の正方形縦10個, 横10個の100個の集まりになっている。各小正方形が1畝の大きさであり, 半折型地割においては, 縦5個, 横2個の正方形の集まりとして1反が形成されていた。そして10反が1町である。



現在でも, 1町歩の土地を駅裏に持っている大金持ち, という言葉がある。108m×108mの正方形が1町歩であるが, 約1ヘクタールとしてもよい。歴史的な単位の解説は, 初等教育の責務と考えられる。これが10反100畝であるが, 豊臣秀吉が太閤検地において, 1町10反3000坪と変則的に定めたことで, 1反300坪となってしまった。筆者としては, 源流の1町3600坪, 元は3600歩の間縄による作図を示したい。額田寺伽藍並条里図は天平宝字年間とされているが, これを復元できる。心ある歴史教育家ならば条里の復元の重大性を理解してもらえらるであろう。

まず6間を1単位として60単位である360間の間縄を作り輪にする。太陽観測で南北線を作図し, それに合わせて南北60間, 東西144間, 斜め156間の直角三角形を3本の杭で固定し作図をする。そのあと, 東西線上の直角から120間の位置に杭をさして, 残り24間と斜め156間の縄を緩めて, そのうちさした杭から60間の印を持って引っ張る。こうすれば, 南北線に直角に, 南北60間, 東西120間の長方形が自然にできる。さらに, 真ん中の線を杭から60間60間の位置で結んで2町の正方形を作り, 6間ごとに印があるから, 対辺の相対する印を結んで線を引く。そうすれば, 面積36歩の正方形が100個でき上がることになる。



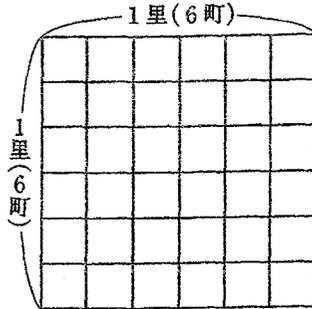
これは, 同じことをシュメールの地割に行っているという推定に基づく。シュメールでは6mの60倍の360mで作業を行った。6mは1ニンダン, 60mは1エスエ, 英語ではcord, 日本語に翻訳す

れば綱, 360mはウスとして知られている。ウスはスタディオンの2倍である。

初めに, 60, 144, 156の直角三角形を作り, それから $60:120:60:120$ に変形する。現代では, $5:12:13$ で直角三角形が形成されることは当然の知識かもしれないが, 当時このようにすれば直角が形成できることは不思議なことであったと思う。もちろん, 30mを単位として $3:4:5$ を作り, これを変形して $2:4:2:4$ の長方形に変形する方法もある。このときも, 結果は $60:120:60:120$ となる。

それによって土地の配分が公平に, そして結果的に円滑に行われたが, 現代のような数学的な根拠の説明などは皆無とってよい。後の時代に, この不思議な方法に疑問が湧き起こり, 結果的に論証の数学を生み出すことになったと推定される。人類の文化の発展にはやはり順序があって, まず経験に基づく合理的な方法が発生し, 次にそれを上手に説明する納得の方法が開発されてきた。

ここで, 日本の歴史上の単位の変遷をとらえておきたい。1町が基本の長さであり, 1辺が6町の大正方形の面積が里となる。この正方形の1辺が里であり, 正方形の面積もまた里である。現代の我々からすれば平方里といたいだが, 歴史はこのようになっていた。そのことが原因で1里36町は面積において真実となる。しかし, なんと後代に長さとしての1里36町が出現してしまう。現在の我々は約4kmを1里としているが, 魏志倭人伝のころは短く, 6町が1里であった。なぜ36町となったかは, 面積里の正しい言葉が, 1里36町であったことによると想定できるが, どうであろうか。



長さでは1里6町であるが, 面積では1里36町である。

5. 長さの単位の起源と歴史 また60進法的仕組みについて

西洋の歴史や宗教, 文化を考えると, 生活に関わる基本の単位についての知識が必要になる。とりわけ12進法や60進法的な単位系に出合うときには, 混乱を避けるために予備知識が必要となり, それを知るためには歴史的な理解が必要である。そこで長さの単位の歴史を探ると, どうしても古代のギリシャ, エジプト, メソポタミアに辿り着くことになる。これまでは, 長さの単位の起源については, 身体尺であるとされていた。しかし, 共通尺度が古代にも追求されていたとの論調に転換しつつあることを確認したい。古代のメソポタミア文明についての研究は, 粘土板の解読も含め, 現在も進展のさなかにある。数学の源流もギリシャ以前にさかのぼることが明白になりつつある。長さの単位も同様である。古代の代表的な基本の長さである聖書のキュビットはメソポタミアではクシュとも呼ばれていた。これが約50cm(517mm)である。基本の長さとしては, もう1つ重要なものがある。聖書ではカニム, ローマ時代にパーチ, デカンベダ, 中国では丈と呼ばれている古代の共通の基準長3mがある。それはメソポタミアではギーという名称であった。

1クシュ 50cm

1ギー 3m

1ニンダン 6m

ギーの60倍が、ローマ時代にスタディオンの(複数形はスタディア)となる。スタディオンはメソポタミアが起源であり、太陽の視直径分を太陽が移動する時間(2分)に人が歩く距離とされている。初のオリンピック競技は、この長さの徒競走のみという話は有名である。ここからスタジアムという言葉が生まれた。スタディオンの長さは、アッティカでは185mであった。

現在でもこの長さは海事の世界で生きていて、ケーブルとして知られている。10ケーブルが1海里で、1852mである。海里はもともと子午線において緯度1分(北極赤道間の90分の1の60分の1)の長さにあたる距離とされている。

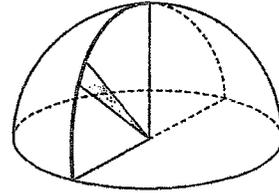
子午線 緯度で6度は666.666km 1度は111.111km
その60分の1である緯度1分あたりの長さは185.185m

↳ 1スタディオン 185.181m

↳ 60倍 ↳ 1ダナ=60スタディア 11.111km

↳ 60倍 ↳ 60ダナ=3600スタディア 666.666km

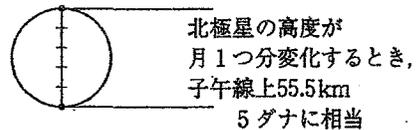
↳ 60倍 ↳ 地球周長 40000km



さて、スタディオンの30倍がパラサングで、1時間に歩くべき距離とされている。後のリーグ、レギア、リニューという長さの起源であり、5.55555kmにあたる。

スタディオンの60倍がダナで11.1111km、アッカドではバルー、聖書では60スタディアとして登場する。子午線に沿って真北に向かってダナだけ移動すると、月の視直径の5分の1である角度0.1度の北極星の高度の変化が観測できるが、そのようにしてメソポタミアのある地域の統一的な長さを話し合ったという話題がホワイトローの文献にある。驚くべきことであるが、歴史家の視野が広まって、大幅な単位の歴史の再構成が始まっているようである。

北へ111km移動すると 北極星高度1度上昇
北へ55.5km移動すると 0.5度上昇
これは月の視度角であり、機器を工夫すれば観測可能



北極星の高度が
月1つ分変化するとき、
子午線上55.5km
5ダナに相当

60進法がメソポタミアの流儀ゆえに、さらに60ダナの長さを求めよう。真北へ向かって60ダナの移動で何が起ころのであろうか。666.666kmは何なのか。これは緯度6度に相当する。

単純な計算であるが、赤道北極間は10000kmで緯度10度は9等分ゆえに、1111.11kmである。よって、緯度1度は111.111kmである。このことから、6度に相当することが分かる。60ダナは地球の大円の円周の60分の1。よって、60ダナをさらに60倍すれば地球の1周になる。メートル法の策定において測定される以前には、知られてはいなかったはずの地球の1周の長さである。

真北方向への移動に伴う北極星高度の変化は、月の視直径と比べることによる目測が可能である。当時から、象限儀のようなものが工夫されており、星を見ることが緯度を知ることと直結していた。1度の緯度の分だけ子午線の移動をすれば、月や太陽の視直径2つ分だけ北極星の高度(仰角)が変化する。

以上のことをまとめると、次のようになる。メートル法では、地球の子午線弧の一周の長さは40000km、その60分の1が666.666kmである。その60分の1が1ダナで約11.1111kmであり、さらに、またその60分の1が1スタディオンの185m(スタディオンは地域により長さが異なる)である。さらにその60分の1が1葦、1ギーで3mである。古代メソポタミアには60進法の階層の距離表現法が確かにあったのである。

さらに、小さい方へはどうであろうか。

1ギ一、すなわち、ローマのパーチ、デカンベダの60分の1は、1スティック、すなわち2インチ、すなわち5cmとなって、現代でも英語圏で生きている。1スティックの6分の1のパーレイコーンという長さも存在する。60進法はしぶといといつていいくらい生き延びている。西洋は12進法、60進法及び10進法の混成である。

小さい方から60倍を繰り返そう。スティック、ギ一、スタディオ、ダナ、60ダナ、地球の1周である。メートル法では、5cm、3m、180m、11.1km、666.6km、4万km、最後が地球1周となっている。半分の系列も存在する。2.5cm、1.5m、90m、5.55kmである。1インチ、1パッサス、100ヤード、リニューである。このように、長さ、距離の単位を総合的にとらえたい。

なお、補足であるが、185.185mと180mの食い違いの生じたわけは、振り子の振幅2秒の実現の長さを1mとなして、これの3倍を1葦、1パーチ、1デカンベダ、1丈とおいたことに関係していると考えている。

時間についても、1年は360日、1刻を2時間として1月は360刻、4分を1ゲシュとして、1日は360ゲシュなどと構成していたことが分かってきている。角度も360度で1回転としていた。さて、宋代、易経の大家・邵康節は『皇極經世書』の中で、30年1世、12世1運すなわち360年1運、さらに30運1会、12会1元、よって1元360運としている。これもシュメール起源ととらえてもよいだろう。

また広さについても、長さに基づいて定められていた。土地の広さは、収穫、徴税に関わる重要事項であった。6m平方の36m²のサル、60m平方の3600m²のイクが基本である。

日本の古代にオリエントの長さも流入している。周の魯班尺はローマのベダ、ギリシャのフィートが起源であろう。日本の長さを考えよう。尺も条里制の調査から魯班尺とみてよい。ただし、3mの60分の1である5cm相当の長さは見あたらない。中継地の周はすでに十進構造に流れていて1寸3cmが使われていた。日本も10寸1尺である。ただし、この上の長さは6尺が1歩となり、60歩(60間)が1町、1町が60倍された十里が歴史に登場している。曰く(養老律令公式令・凡行程。馬日七十里。歩五十里。車卅里)ずばり1寸を60倍して歩、60倍して町、さらに60倍して十里。ここにオリエント起源の長さのシステムの流入がある。100畝の1町という条里の設計思想は、メソポタミア、シュメールの100サル1イクの設計そのものである。

また、18イクで1ブルは大陸の井田法の源流である。1平方スタディオンは9イクで構成されている。ブルはその2倍である。

縦が1スタディオ、横が2スタディアの長方形が1ブルである。この作図は、1080mの縄紐で90mを1単位として、3:4:5の三角形から変形して2:4:2:4の長方形を作ることで作成される。中国の讎人(天文暦数の学者)はこうしたことを知っていたと思われる。

都市の設計も伝来している。我が国の縄張りも、初期は都市設計そのものであった。奈良や京都、もっと以前の飛鳥の街路の設計は、実際はこのようになされていたはずである。

このようなことを初等教育は正面から扱ってはこなかった。おもしろい話題なのにもったいないことである。

日本の数学算数教育において、この知識が凍結され続けてはならない。ことに条里制遺構を抱える小学校、中学校の総合教育において、郷里に誇りをもつきっかけとなるよう取り組みを始めたい。古代を考えても、世界に向かって広がっていることが実感できるであろう。

ナスカの地上絵に対抗して、インド古代の飛翔を望むものが描くべき伝説のアグニ鳥を巨大地上絵と

して再現した。郷里の地図や条里制遺構を校庭に実現することも楽しい目標である。

最後に、筆者の推定ではあるが、60等分した上で5つ目ごとの結び目のところに名前を付けていたのではないだろうか。測量作業をする人が互いの位置を確認したり呼びかけたりするときに必要だったのだと思われる。

天神アヌがスタートでかつエンドの数字は60、男の神様の名前である。時計回りに、

5ニンフルサグ、以降5がつく数は女性の神となる。10イシュクル

15イシュタル金星神 20シャーマシュ太陽神 25ニンガル 30ナンナル月神

35ニンキ 40エンキ大地の神 45ニンリル 50エンリル風神

55アンツ 天神の妻 再び 60アン天神

ちょうど、アナログの時計の数字の位置には神様が配置してあると考えるとよい。これらの神々は、メソポタミア神話で素晴らしく活躍する。ぜひとも神話も生徒に紹介したい。

12人の神様は、協力し合って大地を方形に区画していく。数字は神を表すことになる。

楔形文字で50と書いてあると、それはエンリル神を表している。50と岩に刻んであれば、それは風神を祀った印である。なんと日本にも刻まれているようだ。縄文時代にメソポタミアの文化が到達していた可能性は大いにある。とにかく世界中の宗教や風水の出発点になった神々である。数学の源流は神々と同居していた。これだけでも楽しい。考えることを楽しませてくれる数学でありたい。この教材はそれを目標としている。

[参考文献]小泉袈裟勝著(1990)『図解 単位の歴史辞典』柏書房

オズワルド・ディルク著(1996)『大英博物館双書 失われた文字を読む第9巻数学と計測』学藝書林

イアン・ホワイトロー著(2009)『単位の歴史一測る・計る・量る』大月書店

川崎真治著(2000)『日本の史記』風濤社

(岐阜東高等学校 亀井喜久男)