数学月間懇話会(第21回)

数学と社会の架け橋＝数学月間の狙いは、
諸分野で使われている数学の紹介です.

2025. 7. 22
K. Tani

日時●7月22日(火)14:00-17:00

14:10-15:20
●「数学月間の20年:数学と基礎科学」　谷克彦(SGK)

休憩　●「展示:数学まつり」　小梁修（OSA工房）

15:40-16:50
●「シャーロックホームズの数学」 松原望(東大名誉教授)

(イタリアントマトに移動17:00-18:00　時間の許す方はご参加ください)

予告「秋の企画講演会」　場所●東京大学駒場キャンパス, 数理科学研究科棟002教室

数学月間企画講演会(第16回)
日時●2024年10月5日(日), 14:00-17:00

・ミケルの定理を巡って, 岡本和夫(東大名誉教授)

・ロピタルの定理を巡って, 大山陽介(徳島大学)

数学月間企画講演会(第17回)
日時●2024年11月, 14:00—17:00

・量子コンピューティング, 松原望(東大名誉教授)

・他1件計画中

■ 社会と数学の架け橋＝「数学月間」片瀬豊氏.2018年8月8日没（88歳）

在りし日の片瀬豊氏
京都大学数理解析研究所, 教育数学研究集会にて

Math’s Awareness Month（米国）レーガン大統領宣言（1986）で始まる

日本の数学月間7/22ー8/22 （π ー e）を制定（日本数学協会2005）

●2005ー2018　数学月間の会

数学月間懇話会（第1回～第14回）	講演37件
とっとりサイエンスワールド	2007～2018

●2019－2024　NPO法人数学月間の会（理事長：岡本和夫）

数学月間懇話会（第15回～第20回）	講演22件
企画講演会（第1回～第15回）	講演18件
数学まつり中野区（2022, 2013）	延べ6日

日本の数学月間は20年目. 記録はhttps://sgk2005.orgおよび[YouTube]()で公開. 講演録出版を企画中.

●レーガン大統領宣言(1986年)→　米国MAM始まる

「およそ 5 千年前に始まった数学的叡智は進歩を遂げ, 今日の社会を支えている」と述べ, すべてのアメリカ人に対し, 数学と数学的教育の重要性を実証する国家的行事への参加を要請している.

●レーガン宣言の背景にある米国の焦り
1950年~1980年の日本は, Dr. Demingの品質管理手法をTQCやQCサークルに発展させ品質で米国を越えていた.

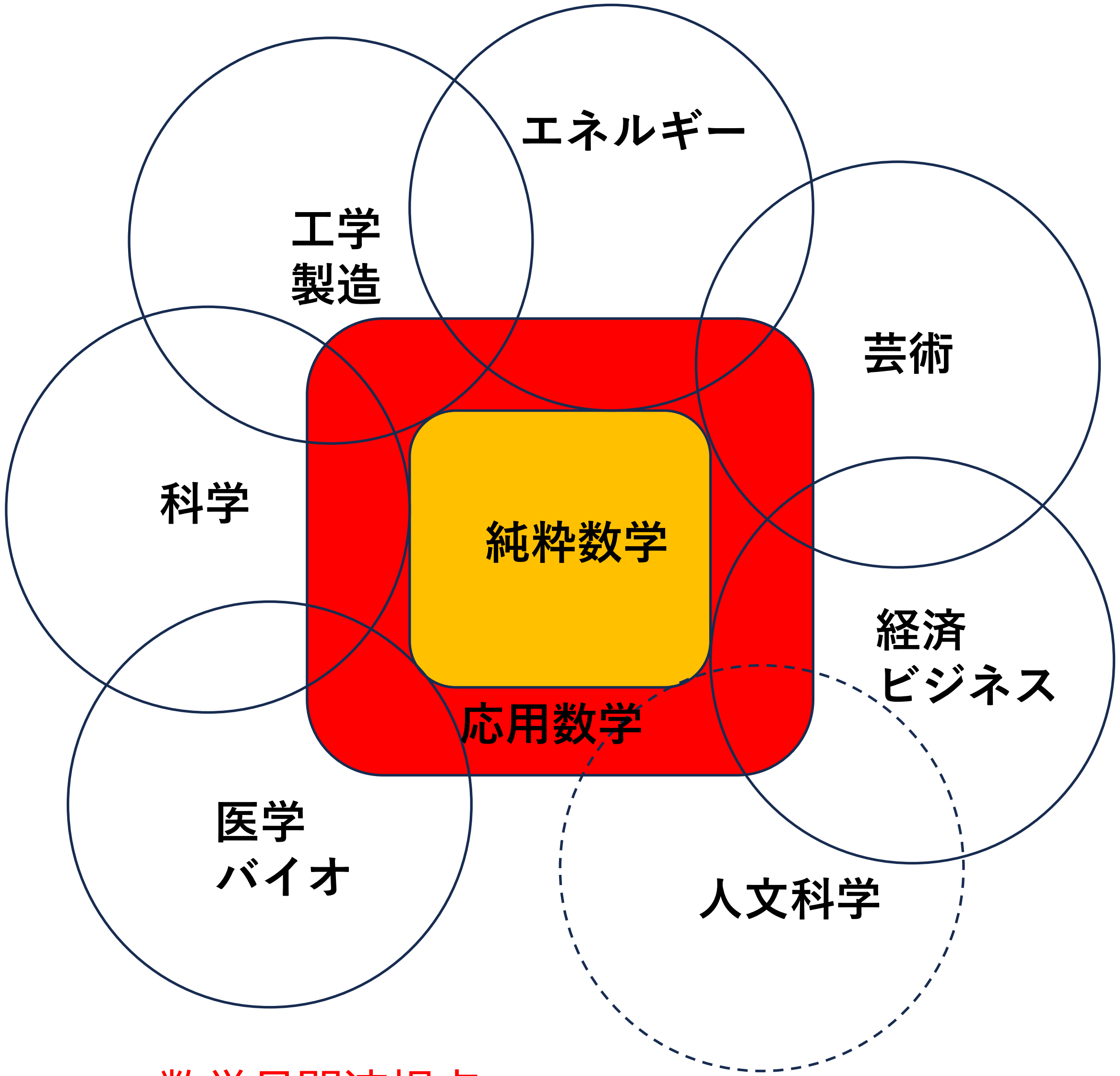
●1986年のレーガン宣言で始まった米国MAMは,
2017年からMSAMになった. (Statisticsが加わる)

現実世界の問題に対処するために, 統計学の重要度が増した.

数学と統計学は, 新しいシステムや方法論が複雑化し続ける技術分野において, イノベーションの重要な推進力になっている.

インターネット・セキュリティ, 持続可能性,
疫病, 気候変動, 大量データ

人文科学分野まで含めて「統計学」が, すべてを飲み込む勢いだが,
基本は「線形代数」「微積分」にある。



数学月間流視点:
社会の諸分野に足場を置き, 数学を見る

■ 応用例から「数学の構成要素」を知る

数学的構成要素

ロシア科学アカデミー, ステクロフ数学研究所発行;Математическая Составляющая
大幅増補の第2版;2019年11月(367ページ)　『数学的構成要素』
17,000部発行の初版は, 啓蒙賞(2015)とロシア科学アカデミー金メダル(2017)を受賞.

我々周囲の「物」や「事」が, 数学と無縁ではないことを, 応用事例で説明している.

ロシアの数学教育は, 学校カリキュラムとは別に, 日常の事例や遊びの中に,
数学を発見させる(実践応用力)を重視している. 数学オリンピックもこの流れにある.

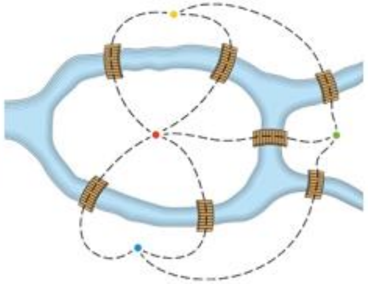
日本の先行事例

文科省「学習内容と日常生活との関連性の研究」調査研究事業報告書(数学班統括:岡部恒治), (2007.3)
事例集抽出ソフト作成(数学月間の会;尾木純,片瀬豊)
https://sgk2005.saloon.jp/cabinets/cabinet_files/download/210/591d01483fa35824cadaa903a59a5eec?frame_id=301

ケーニヒスベルクの街歩きからゲノムの再構築まで

От прогулок по Кёнигсбергу до реконструкции генома

Современная биология ещё не может «прочитать» большие молекулы ДНК как книгу, «буква за буквой». Вместо этого учёные расшифровывают последовательности коротких кусочков ДНК, не зная, из какого места генома был вырезан данный кусочек. Процесс сборки генома из огромного числа таких кусочков, полученных из большого числа копий одной ДНК, называется секвенированием (от английского слова *sequence* — последовательность). Этот процесс сродни попытке собрать пазл из миллиарда кусочков, он основывается на развитии одной математической теории, зародившейся три столетия назад.



Первая половина XVIII века. Великий математик Леонард Эйлер решает «задачу о кёнигсбергских мостах» — доказывает, что в Кёнигсберге, расположенном на берегах реки и двух её островах, нельзя было прой-

・DNA断片からゲノムを組み立てる；シークエンシング
・10億個のジグソーパズルの組み立てのようなもの
・グラフ中で，オイラーサイクルを見つける問題［こちらは速い］
・グラフの各頂点を1回だけ通る閉じた道（ハミルトンサイクル）を見つける問題

нутый путь (гамильтонов цикл), проходящий через каждую вершину по одному разу (ЗГЦ).

Вторая половина XX века. Было установлено, что ЗГЦ (в отличие от ЗЭЦ) является представителем класса задач, для которых эффективные алгоритмы решения неизвестны.

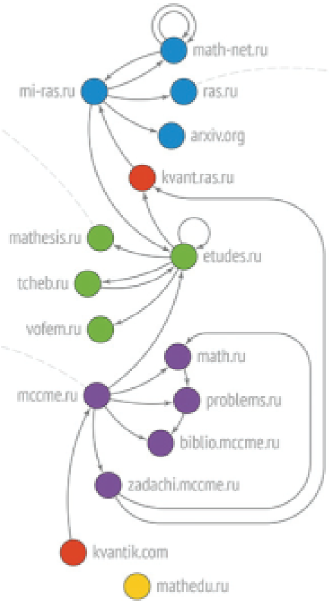
Конец XX века — XXI век. В середине 1990-х годов был секвенирован геном бактерии, в 2001 году — человека. Работа была длительной и дорогостоящей, так как алгоритмы суперкомпьютеров основывались на ЗГЦ. В последнее десятилетие математиками были разработаны быстродействующие методы сборки, связанные с ЗЭЦ, и теперь биологи готовятся к решению фундаментальной задачи: для каждого вида млекопитающих провести сборку генома. 📖 → 295

応用：ゲノム組み立て
数学：オイラーサイクル、ハミルトンサイクル

インターネットの数学

Математика интернета

Странное название, скажет читатель, проводящий часть жизни в интернете. Ведь возникновение сайтов, их наполнение контентом, установление связей между ними (ссылки) — всё это происходит стихийно, никем явным образом не управляется. Но, как и другие сложные системы, состоящие из большого числа «свободных» элементов, интернет становится средой, в целом имеющей устойчивые свойства, не зависящие от беспорядка в мелочах и поддающиеся исследованию математическими методами.



Будем представлять интернет в виде графа. Граф — это множество точек (вершин графа), соединённых конечным числом дуг (рёбер графа). Вершинами будем считать интернет-сайты, а рёбрами — гиперссылки, идущие с одних сайтов на другие. Рёбра этого графа — ориентированные (в ссылках важно, кто на кого ссылается), некоторые из них — кратные (несколько ссылок с одного сайта на другой), есть и петли (ссылки между страницами одного и того же сайта).

Построенный веб-граф — настоящий монстр с миллиардами вершин и рёбер. Этот граф постоянно меняется: добавляются и исчезают сайты, пропадают и появляются ссылки. Но при всех изменениях, некоторые свойства интернета

・インターネットのグラフ；何十億もの頂点と辺で構成される
・頂点や辺は，常に，生成・消滅し変化しているが系は安定
・頂点の次数 d とすると，次数 d の割合は $1/d^{\gamma}$， γ=2.3
・ハブ（次数の高い頂点）の割合が臨界値内なら安定を維持

В веб-графе высока вероятность того, что «соседи» данной вершины (сайты, связанные ссылками с данным) сами связаны ребром: «мои знакомые знакомы между собой».

応用：コンピュータネットワーク、生物学、金融
数学：離散数学、グラフ理論

『数学的構成要素Математическая Составляющая 』の内容

数学の分類			応用
解析			11例
初等幾何学	解析幾何学		37例
幾何学	位相幾何学		14例
論理学	数学の基礎		4例
代数学			10例
数論			5例
微分方程式	数理物理の方程式	最適制御理論	10例
力学			5例
確率論	数理統計学	組合せ	9例
離散数学			6例

注） 1つの応用例が複数の数学要素に対応する場合もある

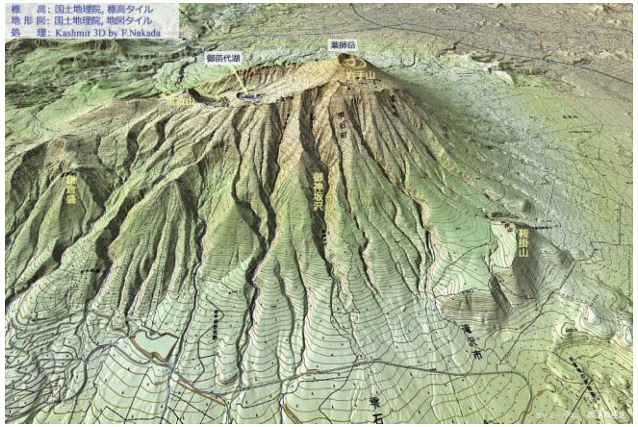
数学要素		応用
確率と組合せ	確率	故障の検出（22） 暗号への数学の応用（36); 量子計算機科学（38） 短い待ち行列の選択（50） テストの精度（51） 言語統計（186） ランダムウォーク（170） パターンはどのように起こる（178） 音楽モジュロ演算(202)
	不変量	≪15≫ゲーム(148)
	グラフ	ケーニヒスベルクの散策からゲノムの再構築まで(13) インターネットの数学(16)

注）（）内数字は，本書の対応するページ

■数学の基本的概念は知りたいものだ

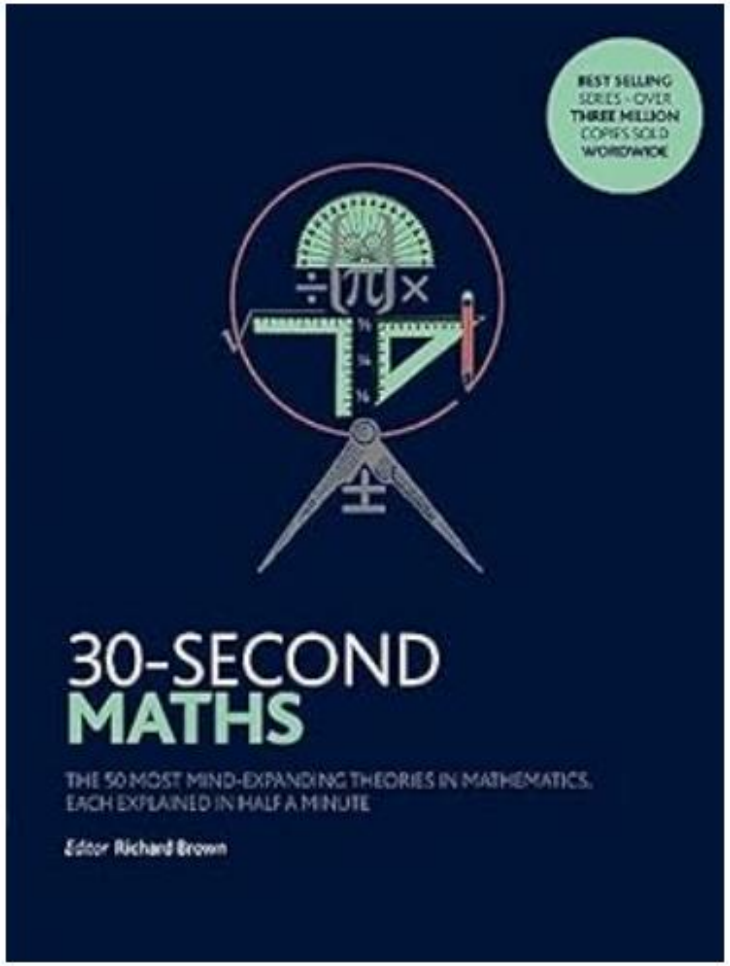
しかし，・・・・・

- 多くの**啓蒙書**は山に登らない．冗長だが肝心のところが分らない．
- 山に登るのは**専門書**．



『30秒の数学』の特徴

- 数式はない．詩のように短い記述．
- 内容の密度が高い．　行間を観賞する楽しみ．
- 読者が知識の再構成をするのに向いている．



Richard J. Brown（ジョンズ・ホプキンズ大学）編
Ivy Press（160頁）

邦訳：丸善，9月出版予定

フィボナッチ数

● 30 秒の数学

フィボナッチ数列 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233… では，各項は前の二つの項の和である．この数列は，数論において特別な役割を果たすが，多くの不思議な数値的性質を持っている．例えば，1+1+2+3+5+8 はフィボナッチ数 21 より 1 小さい．これらの数の 2 乗の和は，2 つのフィボナッチ数の積になる：1+1+4+9+25+64=8×13．次の項との比 1：1，2：1，3：2，5：3，8：5，… は，黄金比 Φ1.618 に近づく．幾何学的には，辺の長さがフィボナッチ数である正方形は，黄金の螺旋を形成するようにうまく組み合わされる．人間がこのようなパターンに魅了されるずっと以前から，植物はフィボナッチ数の経済性を発見していた．パイナップル，ヒマワリ，アーティチョークなど，螺旋構造を持つ多くの植物の葉や蕾には，連続したフィボナッチ数の組が見られる．パイナップルを調べると，一方向に 8 列，もう一方向に 13 列が螺旋状に並んでいるのがわかる．動物界では，ミツバチは各世代にフィボナッチ数の祖先を持つ．

の鱗

● 3 秒のまとめ
前の 2 つの項を足して次の項を得るという単純なルールは，母なる自然が大好きな数列の 1 つを生み出す．

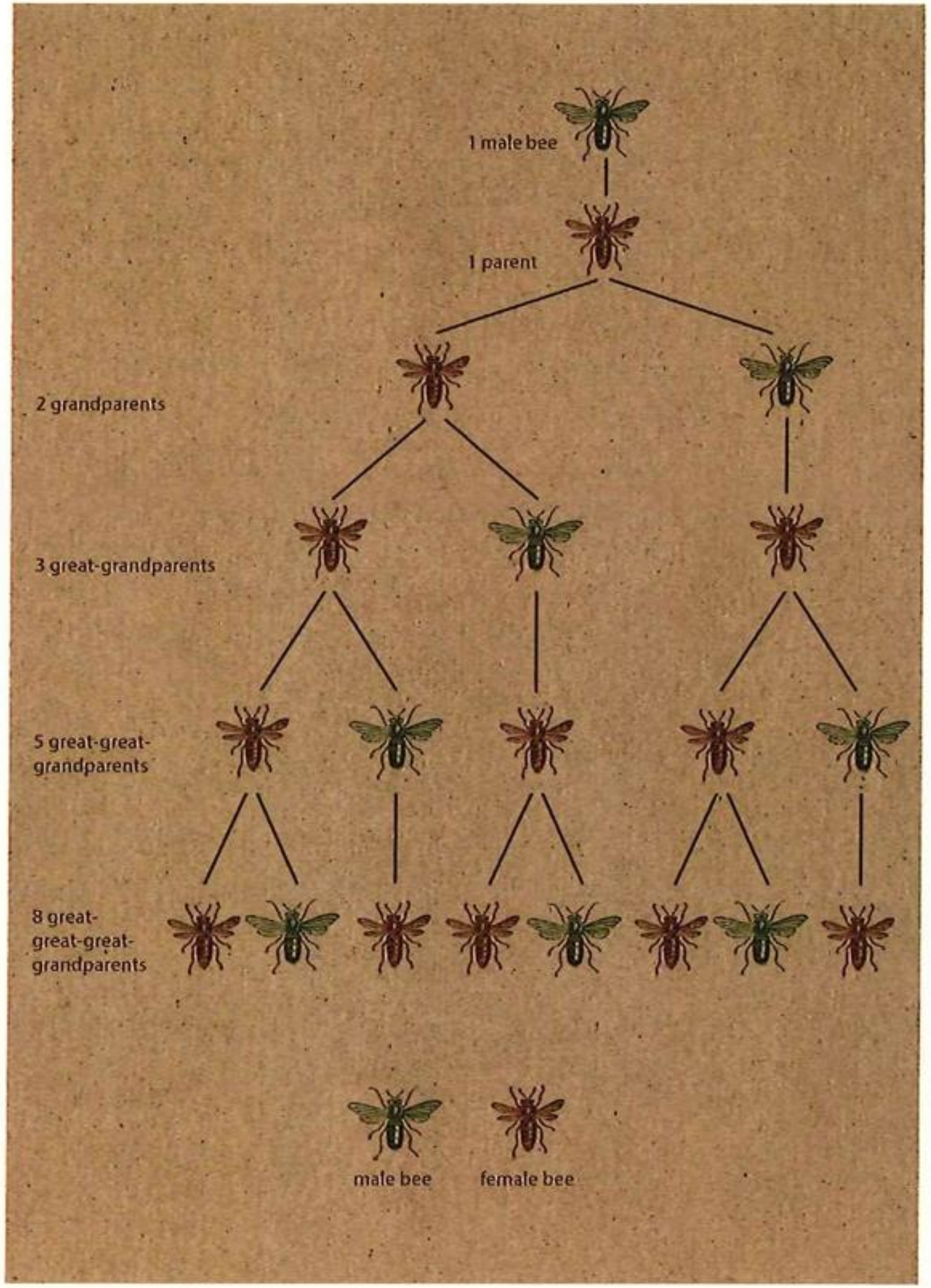
● 3 分の補足
1202 年，フィボナッチとしても知られるレオナルド・ピサーノは，著書『リベル・アバシ』（計算の書）の中で，ウサギの繁殖に関する謎かけを行った．フィボナッチは，おそらく非現実的であろうが，1 ヶ月ごとに 1 組の成ウサギが 1 組の子ウサギを生み，子ウサギが成ウサギになるまで 1 ヶ月かかると仮定した．1 月に 1 組の子ウサギから始めると，12 月までに 144 組の子ウサギが生まれる！

● 関連理論
☞整数論　p. 30
☞黄金比　p. 98

● 3 秒の伝記
・レオナルド・ピサーノ（フィボナッチ）
1170 頃-1250 頃

● 30 秒のテキスト
Jamie Pommersheim

ミツバチの祖先の木（ツリー）にフィボナッチ数が現れる．オスのミツバチにはメスの親しかいないが，メスにはオスとメスの 2 匹の親がいる．
【訳注：点と辺（点間を結ぶ線）から構成されたネットワークをグラフと呼ぶ．木（ツリー）とはグラフ理論の言葉で，ネットワークにループ（閉路）がなく，あたかも，枝分かれ成長する木を思わせる．親と子という関係で代々結ばれたグラフを，祖先の木と表現している．】



目次

解析力学　変分原理　　18c
電磁気学　ベクトル解析　19c

数と記数法　10進法
0の役割（位どり，数値）インド・アラビア起源
分数と小数展開

有理数　$7/22=0.3181818181\mathbf{8}$
有理数　$22/7=3.142857\mathbf{142857}$

無理数　$\pi=3.14159265358979$
超越数（代数方程式の解ではない）
無理数　$\phi=1.6180339887498$
代数的数　$\phi^2=1+\phi$　$\phi=(1+\sqrt{5})/2$

（数の集合）
整数
分数＝**有理数**
無理数
実数
複素数

（代数系）
群
環
体

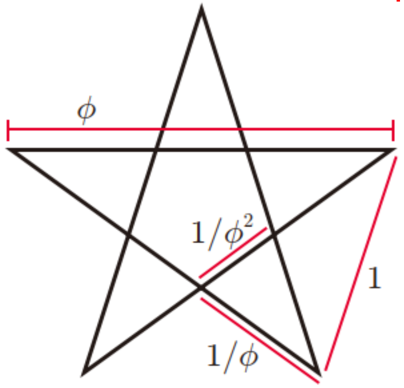
代数的な解は有理数の拡大体内にある.

有理数体上の5次方程式は，一般には，
複素数の5つの根をもつが，
複素数体は有理数の代数拡大体ではない.

有理数体Q⊂拡大体Q($\sqrt{n}$)　⊂　実数体R⊂複素数体C=R(i)
有限の代数拡大ではない

4　×　50　=　50　×　4

times×　m　　m　×　回
（乗数）×（被乗数）（被乗数）×（乗数）
欧米式文脈　　日本式文脈



$x^4-4=0$

$(x^2-2)(x^2+2)=0$　Q

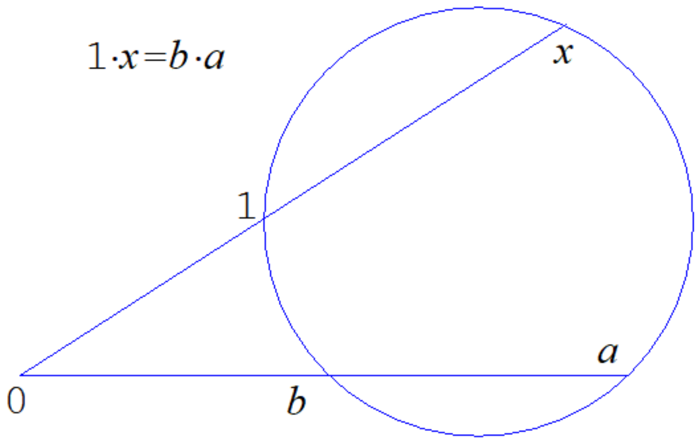
$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)=0$　$Q(\sqrt{2})$

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)=0$　$Q(\sqrt{2},i)$

乗法は可換. 乗数・被乗数は文脈で存在するが，
式内の位置で定義するのは無意味.

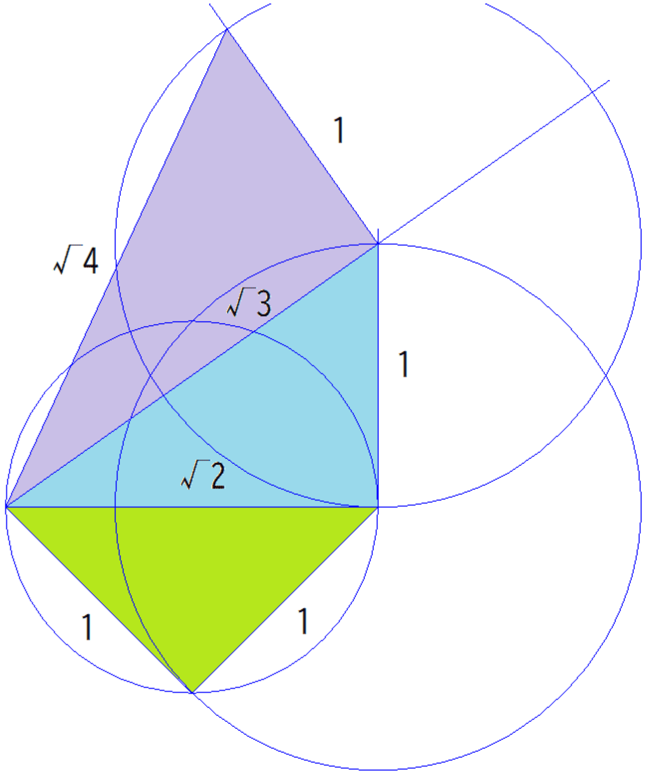
・長さの加算・減算は作図できる

・乗除は方べきの定理で作図できる



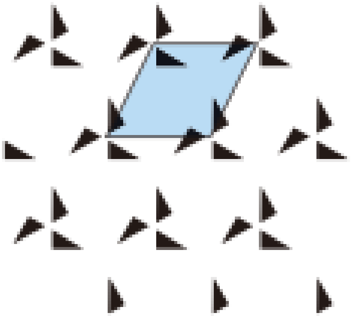
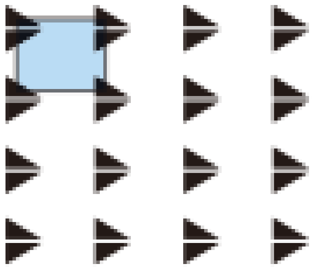
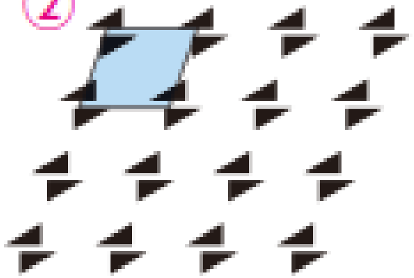
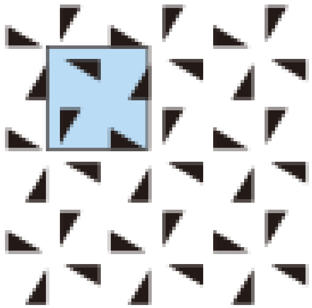
コンパスと定規を繰り返し使用して作図できる数は
平方根を添加して拡大した有理数体 $Q(\sqrt{n})$

・任意の整数nの開平$\sqrt{n}$ の作図はできる



ギリシャの3つの作図不可能問題:
①デロス島のアポロンの祭壇(立方体)を倍積に → $\sqrt[3]{2}$ の長さの作図
②円を同じ面積の正方形に → $\sqrt{\pi}$ の長さの作図　π は超越数
③任意の角度を3等分する → 3次方程式 $x^3 - 3x - a = 0$ の x を作図する

並進群Hの拡大としての空間群Φ

⑬

③

②

⑩


$\Phi = g_1H \cup g_2H \cup \cdots \cup g_rH$　　ラグランジュ展開

g_1H	g_2H	g_3H	$\cdots$	g_rH

$\Longrightarrow \{g_1, g_2, g_3, \cdots g_r\} \simeq G$

$\Phi \triangleright H$ 正規部分群のときは　$\Phi = H \otimes G$　　$\Phi / H \simeq G$

部分群 H によるラグランジュ展開の任意の左剰余類の積 $g_iH \cdot g_jH$ が，

ばらけずに丸ごと別の左剰余類 g_sH に対応するならば，左剰余類は群を作る．

この条件は $g_iH \cdot g_jH = g_ig_jH$ となることであり，　$Hg_j = g_jH$ を意味する．

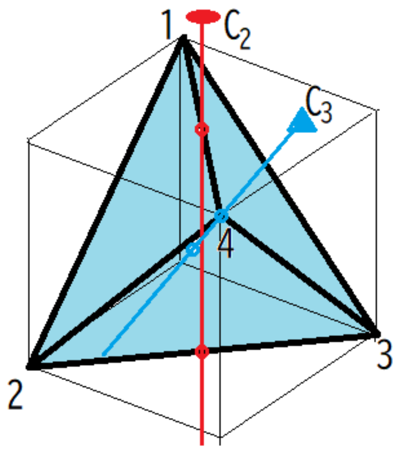
これは H が Φ の正規部分群であることに他ならない．

正規部分群でなければ
直積分解できない

$\Phi \supset G_1,\ G_2$

$\Phi = G_1 \oslash G_2$

●4次方程式は代数解がある



正４面体群

４次の対称群　S_4　$\{C_2, C_3, m\}$　位数24　▷　４次の交代群　A_4　$\{C_2, C_3\}$　位数12　▷　クライン4元群　V　$\{C_2\}$　位数4

$S_4 = m \otimes A_4 = m \otimes (C_3 \otimes V)$

$S_4 \triangleright A_4 \triangleright V$　正規鎖

$S_4 / A_4 \simeq \{m\}$,　$A_4 / V \simeq C_3$

●5次方程式は代数解がない

5次対称群 $S_5 \triangleright A_5$　単純群

目次

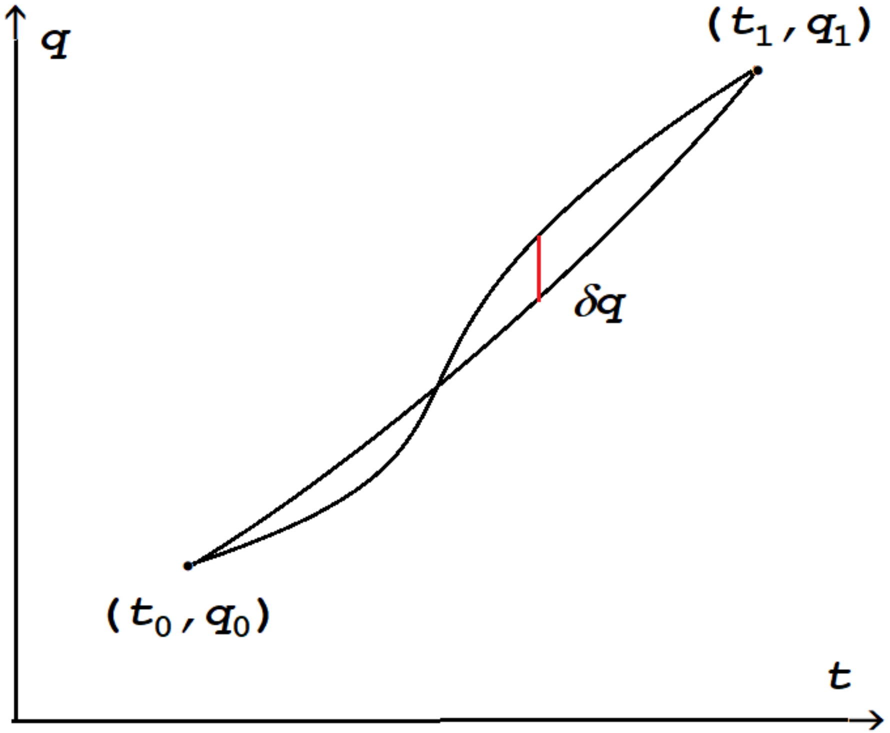
解析力学　変分原理　　18c
電磁気学　ベクトル解析　19c

■ ラグランジュ”解析力学” 18c

モーペルテュイ”最小作用(停留値)の原理”(1744) → **オイラー”作用積分の定義”(1744)** →

ラグランジュ”変分原理”(1766)→オイラー＝ラグランジュ方程式→ラグランジュ”解析力学”(1788)

最小作用の原理の起源
1696年, ヨハン・ベルヌーイの”最速降下曲線”問題



$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)dt$ をラグランジュ関数 L の作用という.

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) + \delta q\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta q\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dt$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$ ラグランジュの方程式

$$L(\dot{q}_\alpha, q_\alpha, t) = T - U$$

■ マクスウェル“電磁気学” 19c

マクスウェルの方程式

$$(1)\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$(2)\ \mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0$$

$$(3)\ \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \boldsymbol{j}}{c}$$

$$(4)\ \mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho$$

孤立磁極がない
ビオ・サバールの法則
ファラデーの電磁誘導の法則

多くの観測結果

クーロン， アンペール， エルステッド， レンツ，
フレミング，

ガウスの定理（場の湧き出し）
ストークスの定理（閉曲線回りの積分を面積分に）
ベクトル解析（ベクトル場）

変位電流密度

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

波動方程式

$\frac{d^2 E}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2 E}{dt^2}$ の解は $E(x-ct)$

平面進行波

●ニュートン力学では相互作用は瞬時に伝わり，場の概念は不要．
電磁力学では相互作用は場を介して行われる．

●マクスウェルの方程式は，電荷のない真空にも解があり，
電磁場は存在する．
真空中は何も起こらないとする考え方は(エーテルも)否定された．