第 12 回数学月間の会（SGK）

線形代数と産業連関分析

— どのように「社会」を測るか —

2023 年 11 月 18 日（土）
11 月 29 日（水）改訂
2024 年 1 月 11 日（木）改訂

松原 望

徐 良為

森本 栄一

ベイズ総合研究所

https://www.bayesco.org

E-mail: eugbleu@hotmail.com

内容目次

まとめ

　産業連関分析は、線形代数の理論と密接な関係があることはすでに経済学の標準的テキストにはよく紹介されている。

　投入係数行列$\boldsymbol{A}$による乗数効果を行列級数で示せることも証明されている。ただし、フロベニウス根による収束の速さについては実際には計算例はない。ここではフロベニウス根を実際に計算し、 1 より値が小さいことを確認した。また$\boldsymbol{A}$の先導する３根が実数であることを確認した。

① 生産の諸部門（ひな形）間の生産物の投入産出データ（産業連関表）から投入係数行列$\boldsymbol{A}$を作成する。

② 逆行列$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$を計算することにより、需要ベクトル$\boldsymbol{f}$に対応する生産量$\boldsymbol{x}$が計算できる。
　⇒ 経済政策の形成とエビデンス
　注）今回に限って、輸出輸入の調整はしていない

③ $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$の行和から各部門の影響係数、列和から感応係数が計算される。
　　例：建設業は影響係数が大きい
　　例：製造業は感応係数が大きい（コロナでは最大の被害）

④ $\boldsymbol{A}$のフロベニウス根が 1 より小さいので、経済政策の波及（乗数効果）が生じる。
　実際には Python で全固有値を算出した。

⑤ 地域連関産業分析で地域ごとの経済活性化の程度が測定できる。
　東京国際フォーラム建設の経済効果を実証的に算出した。

分析結果
　$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$、影響係数、感応係数、フロベニウス根を算出し、具体的に報告した。

新規課題
① 2, 3 番目の固有値、固有ベクトルの経済学上の意味
② 国際フォーラム建設の乗数効果のトレースと課題一般化、プログラミング

　本稿に対して、岡本和夫、谷克彦、中西達夫、川上一郎氏並びに多くの方々からの数々の有益なコメントをいただいた。修正のスペースと時間がなく、将来にお応えするものとし、ここに謝意を表したい。

産業社会の生産・再生産

さらに社会全体の生産も簡単な式におさめることができる．連立1次方程式

$$0.75x-0.40y=10 \qquad (2.1)$$
$$-0.14x+0.88y=5$$

を考える．この解は求められて，$x=17.9$，$y=8.5$となる．ところで，＝の右辺が10,5でなく，5,5とすると$x=10.6$，$y=7.35$となり，さらにやってみるとわかるが，右辺が正である限り，x,yは必ず正となるのである．このわけと区別（判定）の方法は「ホーキンス・サイモン（Hawkins-Simon）の条件」といわれている．

この簡単な式も実は深いところで経済学者レオンチェフ（W. Leontief, 1906-）の「投入産出分析」Input-output analysisにつながっている．投入産出分析は一国の経済システム論（実際「産業連関分析」とも呼ばれる）というべきものであって，1973年レオンチェフは「産業連関表の開発と重要な経済学の諸問題に対する同表の応用」でノーベル経済学賞を授与された．

例として経済が2部門からできており，農業，製造業であるとしよう．その生産物は農産物（コメ，麦，綿花など），工業生産物（センイ，鉄など）であるが，いまは1部門1生産物とする．ある期間たとえば1年間に，製品と原料のやりとりにより連続的に生産が行われ，農業部門はコメ200俵を生産し，それを自己部門，製造部門に中間財としてそれぞれ50俵，40俵供給し，あとは最終の一般消費者（「家計」という）に110俵供給する．製造業部門はセンイ（布地）100を生産したうち，自己部門，農業部門に12,28をそれぞれ供給し，あと60は家計に供給する．式にすると，供給と需要がバランスして

	（農業へ）		（製造業へ）		（家計へ）		（総生産量）	
農業からは	50	＋	40	＋	110	＝	200	（俵）
製造業からは	28	＋	12	＋	60	＝	100	(m^2)

となる．家計への110俵，60 m^2を最終需要（final demand）という．

ところで農業はコメ200俵生産するのに，コメ50俵，センイ28 m^2を用いているから，1俵生産するのに50/200＝0.25俵のコメ，28/200＝0.14のセンイを投入として必要としている．製造業はセンイ1㎡を生産するのに40/100

=0.4俵のコメ，12/100=0.12 m^2 のセンイを必要としている．これらの割合はこの経済の生産技術の条件を表しており他の割合でもありうる．これを「投入係数」という．すなわち投入係数が

		(農業へ)	(製造業へ)
[コメ]	(農業から)	0.25	0.40
[センイ]	(製造業から)	0.14	0.12

で表される技術与件を前提とする．この投入係数と総生産量を用いると，上のバランスの式は

農業からは　$(0.25)\cdot 200+(0.4)\cdot 100+110=200$

製造業からは　$(0.14)\cdot 200+(0.12)\cdot 100+60=100$

となる．家計の最終需要110,60がどう満たされているかを見ると，移項して

$$110=(1-0.25)\cdot 200-(0.4)\cdot 100$$
$$60=-(0.14)\cdot 200+(1-0.12)\cdot 100$$

となる．これを一般化して，コメ，センイの最終需要を c_1, c_2 とし，総生産量を x, y とすると，この2部門経済は

$$0.75x-0.4y=c_1 \qquad (2.2)$$
$$-0.14x+0.88y=c_2 \qquad (2.3)$$

という連関で営なまれている．これをよく見ると，(2.1)に見た連立1次方程式の一般形であり，そこでの結論をこの2部門経済に演繹しよう．この経済では，家計からどのような量の最終需要 (c_1, c_2) に対して対応する（2生産物の）適切な生産量 (x, y) が必ず1組存在する．一般には，このことはあたりまえのことではない．要するに，どのような最終需要にも必ず応じうる経済とそれが可能でない経済とがあり，しかもその根本には物の流れとしての自然的な可能，不可能がある．自然的に不可能なものは，技術与件を変化させることを除けば，人間的（社会的）にも不可能なのである．

このことから，投入係数が

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

で表される2部門経済では，上の関係は

$$\begin{aligned}(1-a_{11})x \quad -a_{12}y&=c_1 \\ -a_{21}x+(1-a_{22})y&=c_2\end{aligned} \qquad (2.4)$$

となることがわかる．これから x, y を解く．

表 6.2 2部門の産業連関分析

	第1産業	第2産業	最終需要	総生産
第1産業	10	20	70	100
第2産業	40	100	60	200
付加価値	50	80		
総投入(総生産)	100	200		

[例] 仮説例にもとづいて，投入係数行列 A からそのレオンチェフ逆行列を求めて，それぞれの経済的な意味を考えよう．表 6.2 を参照しながら考える．以下では行列，ベクトルを用いる．生産量，最終需要を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}$ とすると，$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}$ である．投入係数行列およびレオンチェフ逆行列は，それぞれ

$$A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.4 & 0.5\end{pmatrix},\quad (I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1.2195 & 0.2439\\ 0.9756 & 2.1951\end{pmatrix} \tag{2.15}$$

となる（数学解説参照）．このとき，たしかに表 6.2 のごとく

$$(I-A)^{-1}\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}1.2195 & 0.2439\\ 0.9756 & 2.1951\end{pmatrix}\begin{pmatrix}70\\ 60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\ 200\end{pmatrix} \tag{2.16}$$

となっている．投入係数行列は，第 j 産業の生産1単位当り必要となる第 i 産業の生産物の投入量を示すから，投入係数行列の各タテの列は，各産業の各原材料投入単位，いわゆる「原単位」を表しており，この意味で技術を示しているといえる．たとえば，第2産業がエネルギー産業ならば，0.4 は第1産業の「エネルギー原単位」である．

またレオンチェフ逆行列は，産業間の生産の波及効果の究極的な状態を示す乗数 (multiplier) を表す（乗数に関しては，標準的なマクロ経済学の教科書を参照せよ）．これを理解するためには，一次元でこれと類似な漸化式

$$x_{n-1}=ax_n+f \qquad (0<a<1) \tag{2.17}$$

を考え'a倍'の効果が次々と累積していく様子を思いうかべればよい．実際，$n\to\infty$ の極限で $x_n\to x_\infty$ とすれば，$x_\infty=ax_\infty+f$ から

$$x_\infty=(1-a)^{-1}f \tag{2.18}$$

という (2.16) とまったく類似の式が得られる．a 倍の累積効果は，本式を等比級数の和の公式から

$$x_\infty=(1+a+a^2+\cdots)f \tag{2.19}$$

と表すことで，十分に理解できよう．

実際，いま第2産業の生産物に対する最終需要が10単位増えると，レオンチェフ逆行列を介して

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1.2195 & 0.2439\\ 0.9756 & 2.1951\end{pmatrix}\begin{pmatrix}70\\ 70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}102.438\\ 221.949\end{pmatrix} \tag{2.20}$$

が新しい生産量となり，100→102.438，200→221.949 のように第1産業にも効果が波及し，しかも第2産業の生産量の増加 (22) は最終需要の増加 (10) の2倍以上に及んでいる．いわゆる乗数効果 (multiplier effect) である．このように，産業連関分析はいろいろな効果の分析に中心的に役立っている．

平成７年：生産者価格評価表（13部門）

https://www.e-stat.go.jp/stat-search/files?page=1&layout=datalist&toukei=00200603&tstat=000000750001&cycle=0&stat_infid=000000750001&tclass1val=0

（単位：１００万円）

	01 農林水産業	02 鉱業	03 製造業	04 建設	05 電力・ガス・水	06 商業	07 金融・保険	08 不動産	09 運輸	10 通信・放送	11 公務	12 サービス業	13 分類不明	内生部門計
01 農林水産業	1,922,099	838	9,941,713	160,985	0	9,968	0	75	2,264	0	2,004	1,249,115	0	13,289,061
02 鉱業	0	4,133	5,300,572	818,677	1,318,862	0	0	0	44	0	656	4,535	687	7,448,166
03 製造業	2,537,583	95,850	124,734,213	25,904,908	1,448,793	3,824,716	1,331,640	163,528	5,442,582	382,657	2,661,382	26,770,415	496,255	195,794,522
04 建設	50,332	10,497	1,390,909	224,214	1,166,367	592,386	134,029	2,278,817	471,174	159,065	462,686	1,179,275	0	8,119,751
05 電力・ガス・水道	71,625	47,114	5,911,101	620,251	2,503,458	1,165,416	194,009	226,509	876,355	181,088	852,835	4,606,809	91,502	17,348,072
06 商業	655,942	29,097	17,165,505	6,184,840	314,636	1,124,165	222,522	106,581	1,805,303	76,185	468,338	7,845,382	112,285	36,110,781
07 金融・保険	530,268	73,258	4,339,393	953,345	723,770	5,866,190	3,534,837	3,270,553	3,087,894	225,208	82,355	5,382,673	900,313	28,970,057
08 不動産	4,159	15,669	1,135,346	273,086	253,314	3,841,571	677,165	479,022	830,828	244,458	49,810	2,763,949	73,546	10,641,923
09 運輸	727,290	402,110	9,324,444	4,699,385	678,088	5,341,643	704,601	162,279	5,290,484	415,079	836,923	3,876,465	141,553	32,600,344
10 通信・放送	13,526	7,562	868,181	491,263	111,774	1,901,388	673,976	43,531	346,501	916,686	382,638	3,715,473	9,836	9,482,335
11 公務	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	461,434	461,434
12 サービス業	178,046	68,762	20,728,897	6,994,545	2,446,400	5,322,517	3,782,618	1,026,680	6,557,665	1,990,237	1,859,465	14,292,040	332,723	65,580,595
13 分類不明	150,716	22,801	2,315,419	178,790	170,152	587,403	145,598	511,154	228,602	119,611	426,323	1,151,068	0	6,007,637
内生部門計	6,841,586	777,691	203,155,693	47,504,289	11,135,614	29,577,363	11,400,995	8,268,729	24,939,696	4,710,274	8,085,415	72,837,199	2,620,134	431,854,678
家計外消費支出（行）	122,830	86,522	6,351,153	1,690,537	557,679	2,720,339	1,277,775	278,881	1,100,877	220,492	546,614	4,438,603	27,075	19,419,377
雇用者所得	1,496,583	338,029	54,253,054	29,275,659	4,561,401	49,923,358	13,958,101	2,508,320	16,706,851	4,920,604	16,768,963	78,284,833	164,746	273,160,502
営業余剰	5,196,772	243,973	20,070,840	3,082,390	3,560,032	11,302,927	5,990,313	28,407,481	2,805,093	1,496,198	0	15,221,882	2,328,330	99,706,231
資本減耗引当	1,753,170	152,825	16,833,785	4,537,604	5,366,556	5,010,213	3,672,291	20,798,744	3,272,698	2,833,492	763,140	15,473,444	332,757	80,800,719
間接税（除関税・輸入品	622,156	76,305	14,319,231	2,226,011	1,479,927	3,958,417	1,554,582	4,089,719	1,631,689	586,315	52,826	5,825,063	47,313	36,469,554
（控除）経常補助金	-215,333	-15,803	-425,304	-167,203	-197,689	-171,062	-1,519,495	-166,676	-343,128	-4,564	0	-1,081,394	-2,779	-4,310,430
粗付加価値部門計	8,976,178	881,851	111,402,759	40,644,998	15,327,906	72,744,192	24,933,567	55,916,469	25,174,080	10,052,537	18,131,543	118,162,431	2,897,442	505,245,953
国内生産額	15,817,764	1,659,542	314,558,452	88,149,287	26,463,520	102,321,555	36,334,562	64,185,198	50,113,776	14,762,811	26,216,958	190,999,630	5,517,576	937,100,631
国内純生産（要素費用	6,693,355	582,002	74,323,894	32,358,049	8,121,433	61,226,285	19,948,414	30,915,801	19,511,944	6,416,802	16,768,963	93,506,715	2,493,076	372,866,733
国内総生産	8,853,348	795,329	105,051,606	38,954,461	14,770,227	70,023,853	23,655,792	55,637,588	24,073,203	9,832,045	17,584,929	113,723,828	2,870,367	485,826,576

$\{x_{ij}\}$：投入産出行列

投入係数：$a_{ij} = x_{ij} / X_j$

X_j：内生部門計

	家計外消費	民間消費支	一般政府消費	固定資本形成	在庫純増	国内最終需要計	国内需要合計	輸出	最終需要計	需要合計	（控除）輸入	（控除）関税	（控除）輸入品商品税	（控除）輸入計	最終需要部門計	国内生産額	国内総支出
01 農林水産業	103,521	4,077,127	0	199,355	483,562	4,863,565	18,152,626	41,179	4,904,744	18,193,805	-2,258,524	-48,366	-69,151	-2,376,041	2,528,703	15,817,764	2,425,182
02 鉱業	0	151	0	-8,375	42,414	34,190	7,482,356	16,362	50,552	7,498,718	-5,074,306	-75,984	-688,886	-5,839,176	-5,788,624	1,659,542	-5,788,624
03 製造業	2,839,455	63,779,170	707,642	39,084,252	1,194,303	107,604,822	303,399,344	37,889,859	145,494,681	341,289,203	-24,736,102	-866,119	-1,128,530	-26,730,751	118,763,930	314,558,452	115,924,475
04 建設	0	0	0	80,029,536	0	80,029,536	88,149,287	0	80,029,536	88,149,287	0	0	0	0	80,029,536	88,149,287	80,029,536
05 電力・ガス・水道	4,788	7,454,094	1,629,633	0	0	9,088,515	26,436,587	28,752	9,117,267	26,465,339	-1,819	0	0	-1,819	9,115,448	26,463,520	9,110,660
06 商業	2,174,666	50,504,982	3,631	10,405,869	178,306	63,267,454	99,378,235	3,099,759	66,367,213	102,477,994	-156,439	0	0	-156,439	66,210,774	102,321,555	64,036,108
07 金融・保険	284	7,813,799	0	0	0	7,814,083	36,784,140	577,080	8,391,163	37,361,220	-1,026,658	0	0	-1,026,658	7,364,505	36,334,562	7,364,221
08 不動産	0	53,542,615	0	0	0	53,542,615	64,184,538	5,151	53,547,766	64,189,689	-4,491	0	0	-4,491	53,543,275	64,185,198	53,543,275
09 運輸	687,905	14,694,175	-66,042	803,274	162,398	16,281,710	48,882,054	3,739,656	20,021,366	52,621,710	-2,507,934	0	0	-2,507,934	17,513,432	50,113,776	16,825,527
10 通信・放送	139,704	5,167,930	0	0	0	5,307,634	14,789,969	47,885	5,355,519	14,837,854	-75,043	0	0	-75,043	5,280,476	14,762,811	5,140,772
11 公務	0	781,784	24,973,740	0	0	25,755,524	26,216,958	0	25,755,524	26,216,958	0	0	0	0	25,755,524	26,216,958	25,755,524
12 サービス業	13,469,054	63,955,721	41,914,054	9,207,826	0	128,546,655	194,127,250	1,317,294	129,863,949	195,444,544	-4,444,863	0	-51	-4,444,914	125,419,035	190,999,630	111,949,981
13 分類不明	0	24,236	0	0	0	24,236	6,031,873	46,084	70,320	6,077,957	-558,882	-771	-728	-560,381	-490,061	5,517,576	-490,061
内生部門計	19,419,377	271,795,784	69,162,658	139,721,737	2,060,983	502,160,539	934,015,217	46,809,061	548,969,600	980,824,278	-40,845,061	-991,240	-1,887,346	-43,723,647	505,245,953	937,100,631	485,826,576

A:投入係数行列

（単位：１００万円）

	01 農林水産業	02 鉱業	03 製造業	04 建設	05 電力・ガス・ｵ	06 商業	07 金融・保険	08 不動産	09 運輸	10 通信・放送	11 公務	12 サービス業	13 分類不明
01 農林水産業	0.122	0.001	0.032	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.000
02 鉱業	0.000	0.002	0.017	0.009	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
03 製造業	0.160	0.058	0.397	0.294	0.055	0.037	0.037	0.003	0.109	0.026	0.102	0.140	0.090
04 建設	0.003	0.006	0.004	0.003	0.044	0.006	0.004	0.036	0.009	0.011	0.018	0.006	0.000
05 電力・ガス・水道	0.005	0.028	0.019	0.007	0.095	0.011	0.005	0.004	0.017	0.012	0.033	0.024	0.017
06 商業	0.041	0.018	0.055	0.070	0.012	0.011	0.006	0.002	0.036	0.005	0.018	0.041	0.020
07 金融・保険	0.034	0.044	0.014	0.011	0.027	0.057	0.097	0.051	0.062	0.015	0.003	0.028	0.163
08 不動産	0.000	0.009	0.004	0.003	0.010	0.038	0.019	0.007	0.017	0.017	0.002	0.014	0.013
09 運輸	0.046	0.242	0.030	0.053	0.026	0.052	0.019	0.003	0.106	0.028	0.032	0.020	0.026
10 通信・放送	0.001	0.005	0.003	0.006	0.004	0.019	0.019	0.001	0.007	0.062	0.015	0.019	0.002
11 公務	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.084
12 サービス業	0.011	0.041	0.066	0.079	0.092	0.052	0.104	0.016	0.131	0.135	0.071	0.075	0.060
13 分類不明	0.010	0.014	0.007	0.002	0.006	0.006	0.004	0.008	0.005	0.008	0.016	0.006	0.000

$A = \{a_{ij}\}$：投入係数

I：単位行列

	01 農林水産業	02 鉱業	03 製造業	04 建設	05 電力・ガス・ｵ	06 商業	07 金融・保険	08 不動産	09 運輸	10 通信・放送	11 公務	12 サービス業	13 分類不明
01 農林水産業	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
02 鉱業	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
03 製造業	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
04 建設	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
05 電力・ガス・水道	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
06 商業	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
07 金融・保険	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
08 不動産	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
09 運輸	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
10 通信・放送	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
11 公務	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
12 サービス業	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
13 分類不明	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

I：単位行列（作用開）

I-A

	01 農林水産業	02 鉱業	03 製造業	04 建設	05 電力・ガス・ｵ	06 商業	07 金融・保険	08 不動産	09 運輸	10 通信・放送	11 公務	12 サービス業	13 分類不明
01 農林水産業	0.878	-0.001	-0.032	-0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.007	0.000
02 鉱業	0.000	0.998	-0.017	-0.009	-0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
03 製造業	-0.160	-0.058	0.603	-0.294	-0.055	-0.037	-0.037	-0.003	-0.109	-0.026	-0.102	-0.140	-0.090
04 建設	-0.003	-0.006	-0.004	0.997	-0.044	-0.006	-0.004	-0.036	-0.009	-0.011	-0.018	-0.006	0.000
05 電力・ガス・水道	-0.005	-0.028	-0.019	-0.007	0.905	-0.011	-0.005	-0.004	-0.017	-0.012	-0.033	-0.024	-0.017
06 商業	-0.041	-0.018	-0.055	-0.070	-0.012	0.989	-0.006	-0.002	-0.036	-0.005	-0.018	-0.041	-0.020
07 金融・保険	-0.034	-0.044	-0.014	-0.011	-0.027	-0.057	0.903	-0.051	-0.062	-0.015	-0.003	-0.028	-0.163
08 不動産	0.000	-0.009	-0.004	-0.003	-0.010	-0.038	-0.019	0.993	-0.017	-0.017	-0.002	-0.014	-0.013
09 運輸	-0.046	-0.242	-0.030	-0.053	-0.026	-0.052	-0.019	-0.003	0.894	-0.028	-0.032	-0.020	-0.026
10 通信・放送	-0.001	-0.005	-0.003	-0.006	-0.004	-0.019	-0.019	-0.001	-0.007	0.938	-0.015	-0.019	-0.002
11 公務	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	-0.084
12 サービス業	-0.011	-0.041	-0.066	-0.079	-0.092	-0.052	-0.104	-0.016	-0.131	-0.135	-0.071	0.925	-0.060
13 分類不明	-0.010	-0.014	-0.007	-0.002	-0.006	-0.006	-0.004	-0.008	-0.005	-0.008	-0.016	-0.006	1.000

I－Aの表

6

②逆行列(I-A)$^{-1}$ ：B = {b_{ij}} = (**I** - **A**)$^{-1}$

		[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]	[,10]	[,11]	[,12]	[,13]	d_i	ave{d}	感応度係数
[1,]	01農水	1.152	0.009	0.064	0.024	0.008	0.005	0.005	0.002	0.012	0.005	0.009	0.019	0.009	1.324		0.750
[2,]	02鉱業	0.007	1.008	0.032	0.020	0.060	0.003	0.003	0.001	0.007	0.003	0.007	0.007	0.006	1.164		0.660
[3,]	03製造業	0.355	0.203	1.754	0.570	0.191	0.114	0.120	0.039	0.282	0.114	0.232	0.296	0.228	4.498		2.549
[4,]	04建設	0.008	0.014	0.014	1.010	0.053	0.011	0.008	0.037	0.017	0.016	0.023	0.012	0.007	1.231		0.698
[5,]	05電ガ水	0.019	0.047	0.046	0.029	1.117	0.021	0.015	0.007	0.036	0.024	0.047	0.039	0.033	1.478		0.838
[6,]	06商業	0.075	0.048	0.112	0.116	0.039	1.026	0.022	0.009	0.069	0.023	0.041	0.068	0.045	1.693		0.960
[7,]	07金保	0.065	0.086	0.054	0.045	0.056	0.080	1.122	0.062	0.099	0.035	0.024	0.053	0.199	1.982	1.765	1.123
[8,]	08不動産	0.009	0.021	0.017	0.015	0.018	0.044	0.026	1.010	0.028	0.024	0.009	0.023	0.023	1.268		0.718
[9,]	09運輸	0.082	0.291	0.085	0.099	0.066	0.071	0.036	0.010	1.144	0.047	0.055	0.047	0.053	2.085		1.181
[10,]	10通放	0.007	0.013	0.013	0.015	0.012	0.025	0.027	0.003	0.017	1.072	0.021	0.027	0.012	1.265		0.717
[11,]	11公務	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	1.002	0.001	0.084	1.097		0.621
[12,]	12サービ	0.068	0.123	0.161	0.160	0.153	0.093	0.148	0.034	0.206	0.181	0.118	1.129	0.127	2.702		1.531
[13,]	13不明	0.015	0.019	0.017	0.009	0.012	0.009	0.007	0.009	0.010	0.012	0.020	0.011	1.006	1.155		0.655
c_j		1.863	1.884	2.370	2.114	1.785	1.502	1.540	1.226	1.927	1.557	1.607	1.734	1.832			
ave{c}								1.765									
影響力係数		1.055	1.067	1.343	1.198	1.012	0.851	0.873	0.695	1.092	0.882	0.911	0.982	1.038			

$\{ b_{ij} \}$ 逆行列表

から

$$c_j = \sum_i b_{ij}\,, \qquad d_i \sum_j b_{ij}$$

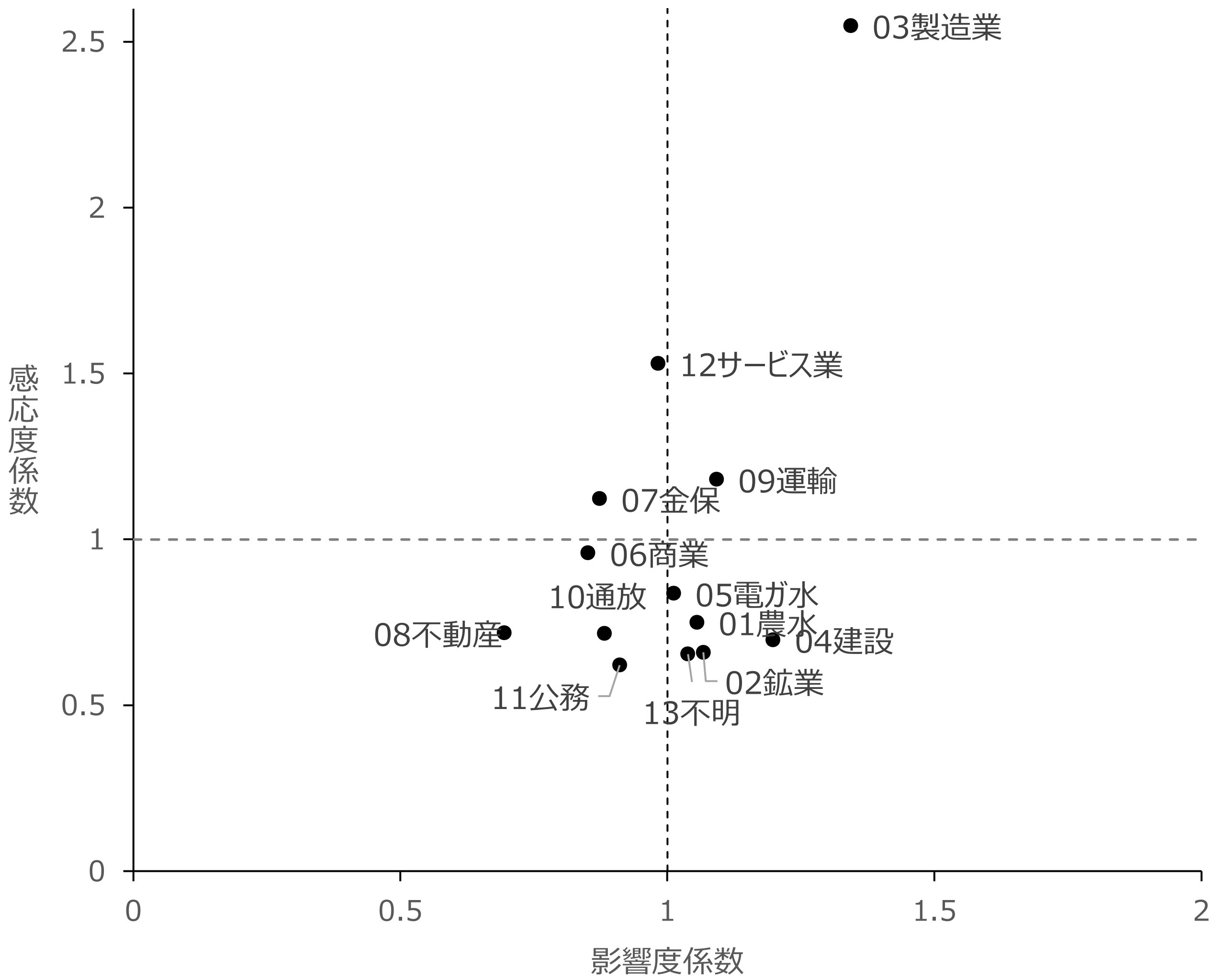
を定義する。そこからこれらの平均を

$$\bar{c} = \sum_j c_j / n\,, \quad \bar{d} = \sum_i d_i / n \quad (n\text{: 部門数})$$

とすれば、

$c_j/\bar{c}$ ： 影響度係数

$d_i/\bar{d}$ ： 感応度係数


03製造業
12サービス業
09運輸
07金保
06商業
10通放
05電ガ水
01農水
08不動産
04建設
02鉱業
11公務
13不明
感応度係数
影響度係数
2.5
2
1.5
1
0.5
0

フロベニウス根　Frobenius root についての要項

[Ⅰ] Aはn次行列で$\geqq 0$とする。このとき次の $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ$ は同等である。Iはn次単位行列とする。

1°. 任意のn次ベクトル$\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$に対して$(I-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$を満たす$\boldsymbol{n}$次ベクトル$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$が存在する。
2°. $\boldsymbol{y} > A\boldsymbol{y}$を満たす$\boldsymbol{n}$次ベクトル$\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$が存在する。
3°. $k \to \infty$のとき、$A^k \to 0$.
4°. $I - A$は正則行列で、$(I-A)^{-1} \geqq 0$.
5°. Aの固有値の絶対値はすべて 1 より小さい。

[Ⅱ]　n次行列$A \geqq 0$は次の定理の固有値rと固有ベクトル$\boldsymbol{x}$とをもつ：
1°. $A\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{r} \geqq 0,\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$で$A$の任意の固有値$\alpha$に対して$|\alpha| \geqq r$.
2°. $A \geqq B \geqq 0$のときBの任意の固有値βに対して$|\beta| \geqq r$.

以上のrを「フロベニウス根」という。このrについては次の結果が知られている。

$$\operatorname*{Min}_{i} \sum_{j} a_{ij} \leqq r \leqq \operatorname*{Max}_{j} \sum_{j} a_{ij}\ ,$$

$$\operatorname*{Min}_{i} \sum_{j} a_{ji} \leqq r \leqq \operatorname*{Max}_{j} \sum_{j} a_{ji}\ .$$

参考書：　以上は古屋茂『行列と行列式』（培風館）による。
なお、図表は産業連関分析（レオンチェフシステム）に触れている点で異色。

逆行列の級数展開　もし$\boldsymbol{A}$の固有値がすべての単位円の内部にあれば

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots$$

となる（Luenberger）。級数論では収束半径（複素）<1 を意味する。

[参考]　固有値問題は極めて頻繁に応用数理に出現する

①　量子力学　物理量としてのエルミート演算子の固有値は確定した物理量の値となる（固有状態）
②　主成分分析　統計学や機械学習の次元低下に用いられる。
③　連立線形微分方程式の基本解あるいは解の分岐
④　2 次曲線の分類　これは古典的な例。

固有値

0.504	
0.174	
0.107	
0.080 +	0.029 i
0.080 −	0.029 i
-0.038	
-0.013 +	0.026 i
-0.013 −	0.026 i
-0.021	
0.026 +	0.032 i
0.026 −	0.032 i
0.027	
0.036	

固有ベクトル

0.081	0.244	0.666	0.017 +0.004 i	0.017 -0.004 i	-0.003	0.073 +0.017 i	0.073 -0.017 i	0.029	-0.001 -0.009 i	-0.001 +0.009 i	-0.114	-0.091
0.039	0.004	-0.147	0.030 +0.095 i	0.030 -0.095 i	-0.164	0.068 -0.006 i	0.068 +0.006 i	-0.124	-0.132 +0.135 i	-0.132 -0.135 i	0.172	0.154
0.915	0.547	-0.316	0.053 +0.052 i	0.053 -0.052 i	0.024	-0.380 -0.012 i	-0.380 +0.012 i	0.008	-0.024 +0.082 i	-0.024 -0.082 i	0.308	0.252
0.029	-0.097	-0.039	-0.049 +0.045 i	-0.049 -0.045 i	0.034	0.490 +0.000 i	0.490 +0.000 i	0.144	-0.237 -0.016 i	-0.237 +0.016 i	-0.316	-0.200
0.078	-0.152	-0.196	-0.018 +0.138 i	-0.018 -0.138 i	0.117	0.019 +0.041 i	0.019 -0.041 i	0.030	-0.097 -0.046 i	-0.097 +0.046 i	0.040	0.056
0.154	-0.018	0.024	0.033 -0.032 i	0.033 +0.032 i	-0.174	-0.217 -0.401 i	-0.217 +0.401 i	0.404	0.024 -0.269 i	0.024 +0.269 i	-0.386	-0.344
0.129	-0.362	0.497	-0.237 -0.381 i	-0.237 +0.381 i	-0.466	0.253 -0.061 i	0.253 +0.061 i	0.238	-0.383 +0.116 i	-0.383 -0.116 i	0.640	0.769
0.041	-0.129	0.063	-0.093 -0.076 i	-0.093 +0.076 i	0.074	-0.163 +0.381 i	-0.163 -0.381 i	-0.268	-0.156 -0.194 i	-0.156 +0.194 i	-0.158	-0.162
0.155	-0.113	-0.303	0.643 +0.000 i	0.643 +0.000 i	0.426	-0.292 +0.117 i	-0.292 -0.117 i	0.004	0.657 +0.000 i	0.657 +0.000 i	-0.152	-0.272
0.034	-0.179	0.187	-0.367 +0.032 i	-0.367 -0.032 i	0.185	-0.089 +0.090 i	-0.089 -0.090 i	-0.050	-0.094 +0.094 i	-0.094 -0.094 i	-0.107	-0.208
0.004	-0.009	0.034	-0.034 +0.025 i	-0.034 -0.025 i	-0.637	0.085 -0.122 i	0.085 +0.122 i	0.402	0.015 +0.085 i	0.015 -0.085 i	-0.284	-0.081
0.282	-0.645	0.120	-0.376 -0.221 i	-0.376 +0.221 i	-0.042	0.127 -0.001 i	0.127 +0.001 i	-0.704	0.247 -0.272 i	0.247 +0.272 i	0.233	0.014
0.026	-0.019	0.044	-0.041 +0.012 i	-0.041 -0.012 i	0.286	0.024 +0.046 i	0.024 -0.046 i	-0.102	-0.028 +0.032 i	-0.028 -0.032 i	-0.092	-0.035

Python

```
-----------------------------------------
import numpy as np
import numpy.linalg as LA

np.set_printoptions(precision=3)

def eigenvalue_eigenvector(a):
   eig_ans = LA.eig(a)
   return eig_ans

def read_from_file(path):
   ans=np.loadtxt(path, delimiter=',',encoding='utf-8_sig')
   return ans

def write_to_file(path, a):
   np.savetxt(path, a, delimiter=',', fmt ='%.3f')

if __name__ == '__main__':

   np.set_printoptions(precision=3)

   a = np.array([[0.1,0.125,3/75],
            [7/50,0.25,8/75],
            [0.16,0.125,2/15]])
   b = np.array([[1,1,2],[0,2,-1],[0,0,3]])

   c=read_from_file('...<適切なファイルパス>/A.csv')

   evalue,evector=eigenvalue_eigenvector(c)


   print("eigenvalue¥n {}".format(evalue))
   print("eigenvector¥n {}".format(evector))

   write_to_file('...<適切なファイルパス>/a.eigenvalue.csv', evalue)
   write_to_file('...<適切なファイルパス>/a.eigenvalue.csv', evector)
```

昭和60年東京都産業連関表（７部門）

https://www.toukei.metro.tokyo.lg.jp/sanren/1985/sr85t1.htm

（単位：億円）

		中間需要 東京都								中間需要 その他地域								中間需要計	最終需要 東京都								最終需要 その他地域				生産額
		第Ⅰ次産業	第Ⅱ次産業	電気ガス水道	商業金融保険不動産	運輸通信放送	公務サービス	東京都本社	東京都中間需要計	第Ⅰ次産業	第Ⅱ次産業	電気ガス水道	商業金融保険不動産	運輸通信放送	公務サービス	その他地域本社	その他地域中間需要計	計	家計外消費	都民家計消費	他県民都内消費	政府消費	固定資本形成	在庫	輸出	輸入	消費支出	投資	輸出	輸入	
中間投入 東京都 財・サービス	第Ⅰ次産業	30	1110	1519	1	0	510	0	3171	0	439	0	0	0	14	0	454	3625	39	738	31	0	4	-3	13	-3086	18	0	0	0	1379
	第Ⅱ次産業	74	31529	534	7551	2666	19751	3910	66015	481	39205	225	1857	506	14157	532	56963	122978	1099	15236	1866	0	63528	807	20643	-16309	19525	22150	46	0	251568
	電気・ガス・水道	1	1302	375	720	591	3750	697	7436	0	0	0	0	0	0	0	0	7436	4	4767	0	1306	0	0	10	0	0	0	0	0	13523
	商業・金融保険・不動産	74	9510	490	23151	5240	12602	17389	68456	1581	45686	2017	9015	3510	8941	1541	72292	140748	1591	73239	8694	0	3534	54	3791	-5880	17340	13215	6063	0	262390
	運輸・通信・放送	51	6175	338	11103	8321	10129	4932	41048	268	5720	142	1335	1221	2019	407	11112	52160	346	12712	2299	-56	71	4	7745	-6064	1354	495	221	0	71286
	公務・サービス	28	12589	537	12248	6166	17848	16516	65932	129	13004	1228	6274	2091	9690	2359	34776	100708	27550	65242	22003	43889	0	0	4593	-5970	51	0	0	0	258066
東京都	東京都本社	51	11559	471	17960	2707	9983		42731	950	56298	1524	50102	7001	12980		128855	171587													171587
	東京都中間投入計	309	73773	4265	72735	25690	74572	43444	294789	3408	160352	5136	68584	14330	47802	4839	304452	599241	30628	171933	34893	45140	67136	863	36796	-37310	38289	35860	6330	0	1029798
その他地域 財・サービス	第Ⅰ次産業	31	5374	52	7	1	1748	0	7214	20976	247473	24970	67	12	10471	0	303970	311183	177	3509	129	0	1	201	29	0	35971	5091	907	-167873	189324
	第Ⅱ次産業	239	65429	791	2663	7197	21795	1004	99119	35309	1258930	24612	45110	57386	187633	4294	1613275	1712394	2561	34866	4158	0	30237	698	582	0	439758	694148	365864	-137413	3147854
	電気・ガス・水道	6	2548	429	1293	1235	3441	1111	10063	1356	68492	4598	7438	7100	29250	2075	120309	130372	2	3685	0	0	0	0	31	0	57072	0	176	-20	191319
	商業・金融保険・不動産	23	7209	64	348	972	3104	178	11899	10372	147549	8473	61553	29382	55745	14092	327167	339066	419	5504	510	0	4612	162	74	0	544008	36341	22509	-5553	947651
	運輸・通信・放送	9	2686	39	1098	1329	3234	1050	9445	8513	101672	4664	40240	31411	39090	4958	230548	239992	67	932	74	0	330	24	6	0	97297	3593	31455	-11258	362512
	公務・サービス	6	2895	265	2727	811	5498	1389	13591	4593	135990	12129	39768	40177	65403	11067	309128	322719	4	57	8	0	0	0	0	0	771847	0	10689	-16756	1088570
その他地域	その他地域本社	5	4631	7	13257	867	3400		22167	2202	65077	5158	32755	16226	26997		148415	170583													170583
	その他地域中間投入計	320	90772	1649	21392	12413	42221	4731	173498	83323	2025183	84605	226932	181694	414589	36485	3052812	3226309	3229	48553	4879	0	35181	1084	721	0	1945954	739173	431600	-338872	6097811
	中間投入計	629	164545	5914	94127	38103	116794	48175	468287	86731	2185535	89741	295516	196024	462391	41325	3357263	3825550	33857	220487	39771	45140	102317	1947	37517	-37310	1984243	775033	437930	-338872	7127610
粗付加価値	家計外消費支出	79	4847	242	5919	1074	5168	12496	29824	1922	49084	2984	18668	6079	19147	11597	109481	139305													
	雇用者所得	268	49798	3719	80492	22281	90386	68751	315694	17137	471202	28705	269338	120392	413862	78137	1398774	1714468													
	営業余剰	249	18564	1402	56865	3362	25024	28185	133651	62620	209782	21686	239965	11572	108733	25197	679554	813205													
	資本減耗引当	130	8824	1920	21046	6586	15103	4198	57805	19473	124045	35792	103408	30764	59433	4062	376977	434782													
	間接税	29	5868	330	7411	1015	6005	9781	30440	4320	115579	13306	29494	5129	27785	10264	205876	236316													
	補助金	-5	-878	-3	-3470	-1134	-413	0	-5903	-2877	-7374	-896	-8738	-7448	-2781	0	-30114	-36017													
	粗付加価値計	749	87023	7610	168262	33183	141272	123411	561511	102593	962319	101578	652135	166488	626179	129258	2740548	3302059													
生産額		1379	251568	13523	262390	71286	258066	171587	1029798	189324	3147854	191319	947651	362512	1088570	170583	6097811	7127610													

注１　全国生産額 ＝ 東京都生産額 ＋ その他地域生産額

7,127,610 ＝ (1,029,798) ＋ (6,097,811)

全国本社生産額 ＝ 東京都本社生産額 ＋ その他地域本社生産額

342,170 ＝ (171,587) ＋ (170,583)

全国財・サービス生産額 ＝ 東京都生産額 ＋ その他地域生産額

6,785,441 ＝ (858,212) ＋ (5,927,229)

注２　第１次産業：農林水産業、鉱業

第２次産業：製造業、建設業

注３　四捨五入の関係で内訳は必ずしも合計値と一致しない。

自治体プロジェクト（ふるさと納税なども含む）

東京都の新庁舎建設に伴って、旧庁舎跡地に建てられる東京国際フォーラムは平成 3 年着工、同 6 年に完成予定である。建設規模は 5000 人収容の大ホールを中心に、1500 人収容の中ホール、$5000m^2$ の展示場など延べ床面積約 14 万 m^2 の施設である。建設費用は平成 2 年 1 月時点で 1395 億円である。こうした新たな建設投資が発生すると、その投資財を生産するために別の財・サービス需要が発生し、次から次へと生産が誘発されていき、経済全体でみれば初期投資以上の効果が生じるはずである。このことを東京都産業連関表によって分析した例を取り上げよう。

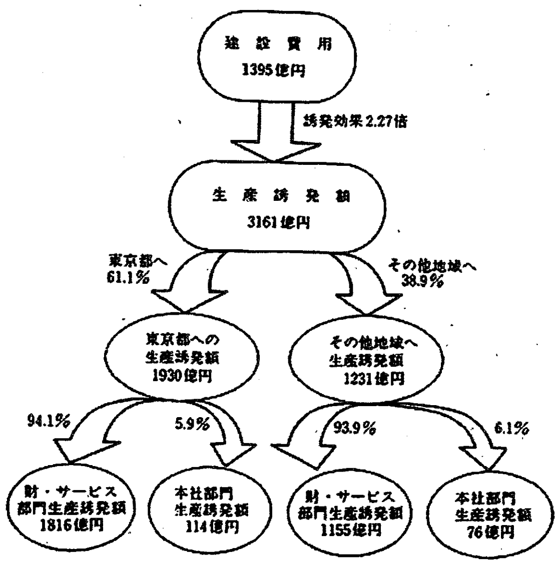


図 10-6　東京国際フォーラム建設による生産誘発効果
（出典：東京都総務局統計部・東京都職員研修所調査研究室「昭和60年東京都産業連関表からみた東京の経済」）

まず、分析に関して建設投資財の費用構成を建設部門産業連関表（建設省）を用いて推計し、建設資材等の直接経費が 602 億円（43.2%）、商業等の間接経費が 205 億円（14.7%）、雇用者所得等の付加価値が 588 億円（42.2%）となっていることを確認して、この費用内訳をもとに東京都産業連関表を使って財・サービスの生産誘発額を求める。

分析結果は次の通りである（図 10-6）。まず、東京国際フォーラムの建設に伴う生産誘発額 3161 億円であり、初期投資の 2.27 倍である。そのうち内訳を地域別にみると、都内産業へは 1930 億円（構成比 61.1%）、その他地域へは 1231 億円（同 38.9%）の誘発額をもたらす。このことは東京都が都内で行う建設投資であっても、その経済的効果の約 4 割が東京都以外のその他地域の経済を潤すことを示している。

注）本分析は大きな自治体プロジェクトの誘発効果を測定するモデルとして今後有用性を見込まれるが、各要素別誘発効果の算出は地域産業連関表よりも細目の支出額データ（工業統計表など）を必要とする。

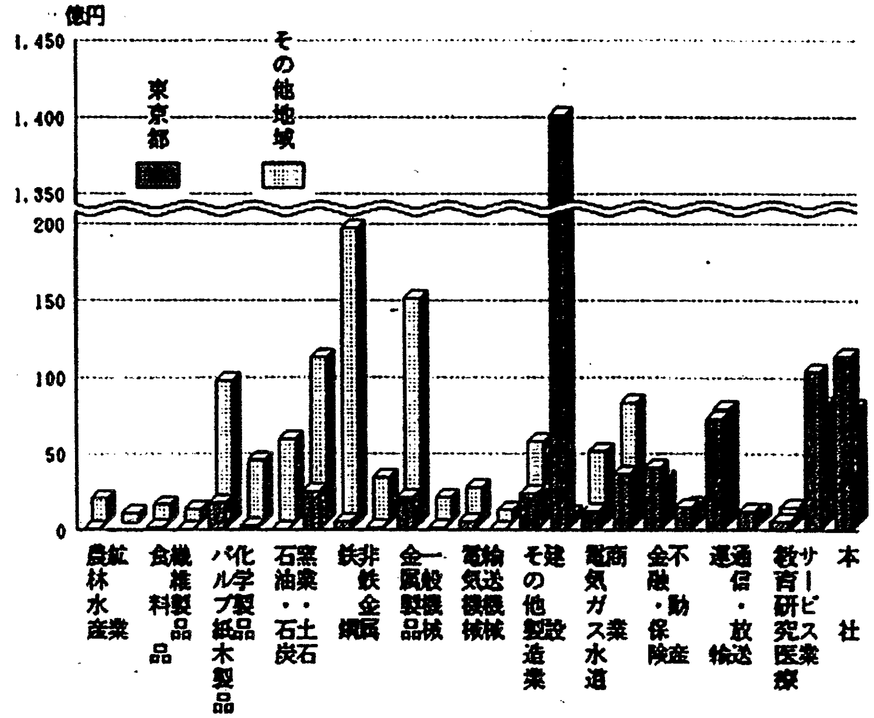


図 10-7　産業別・地域別生産誘発額
(出典：図 10-6 に同じ)

生産誘発額を産業別にみる（図 10-7）と、建設が 1470 億円（44.5%）と最も大きく、ついで鉄鋼 198 億円（6.3%）、サービス業 183 億（5.8%）、金属製品 169 億円（5.4%）、運輸 147 億円（4.7%）、窯業・土石 135 億円（4.3%）などとなっており、本社部門は 189 億円（6.0%）である。なお、都内への生産誘発額のうち、中小企業の生産誘発効果は 1349 奥苑（69.9%）が見込まれている。このことは初期投資額とほぼ同じ額が都内の中小企業の生産を誘発することを示している（図 10-8）。さらにその内訳を産業別に見ると、直接工事を行う建設が 1183 億円（87.7%）と最も大きく、ついで製造業の 94 億円（6.9%）、サービス業 35 億円（2.6%）などとなっている。

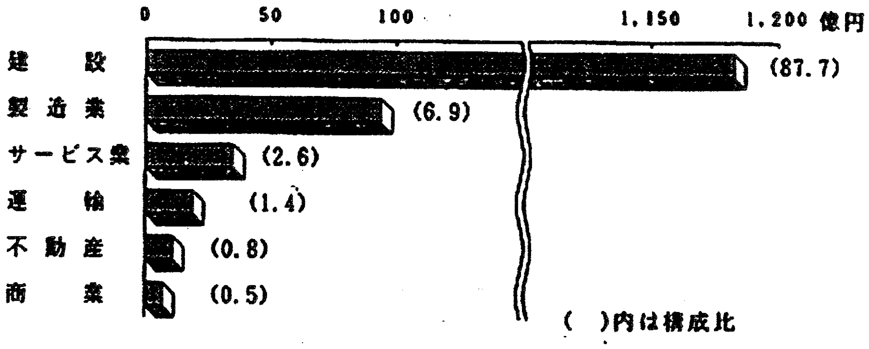


図10-8　産業別都内中小企業生産誘発額
(出典：図10-6に同じ)

付加価値誘発額についてみると、新たに1281億円の付加価値が発生する。誘発効果は初期投資の0.92倍である。誘発された付加価値の内訳をみると、雇用者所得は741億円であり、全体の57.6%を占め、続いて営業余剰の276億円（21.5%）となっている。海外への影響額は114億円の輸入発生であり、これに当初見込まれなかった委託設計料75億円を加算すると、合計189億円が海外に影響を及ぼしていることが示される。

参考文献

古屋茂『行列と行列式』培風館 1959
斎藤正彦『線形代数入門』東京大学出版会 1966
二階堂副包『現代経済学の数学的方法』岩波書店 1960
中村隆英・新谷健精・美添泰人・豊田敬『経済統計入門』東京大学出版会 1983
Ｄ.G.ルーエンバーガー（生田目、山田訳）『動的システム入門』ホルト・サウンダーズ 1985
東京大学教養学部統計学教室（編）『人文・社会科学の統計学』東京大学出版会 1984
小林康夫・船曳健夫（編）『知の技法』東京大学出版会 1994（分担執筆章「統計」）
松原望『計量社会科学』 東京大学出版会 1997
M.Intrilligator (1971) Mathematical Optimization and Economic Theory Prentice Hall

行列と行列式（線形代数）

(I) 行列 matrix は，数をタテ，ヨコに欠けるところなく並べたセットで，数のタイルのようなものである．一般には，ゴシック体の太字で表す．例として

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 7 & 5 & 2\\ 8 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 10\\ 7 & 9\end{pmatrix}.$$

をあげておこう．ヨコの並びを行 row といい，タテの並びを列 column という．行列 A は 3 行 3 列より成り，次の B は 3 行 2 列より成る．それぞれの数の位置は行と列でゴバン目の‘京都’式にいう．行列 B で，9 は 3 行 2 列の要素，などという．

もともと *row* とは‘水平方向に並んだもの’例えば集合写真中の人の並び，*column* とは‘柱’（寺院，大きい建物など）をいう．

例外的に単一の行，単一の列からなる行列もある．(15, 20, 18) などは単一の行から成立している．数の一行のヨコ並び，あるいは一列のタテ並びをベクトル vector という（それぞれ行ベクトル，列ベクトル）．もとは物理学用語で「2 つ以上の成分を持つ量」を意味した．実際，「速さ」「力」は平面の中なら x 軸，y 軸方向の 2 つの成分をもち，空間の中なら z 軸（高さ方向）を含めて 3 成分をもつ．

いずれにせよ，「行列」は $m\times n$（個）の数の組み，「ベクトル」は $1\times n$（個）あるいは $m\times 1$（個）の数の組みのことであると割り切って定義する（ここで，m, n は 1 以上の整数）．なお，1×1 の行列（ベクトル）は普通の数でスカラーといわれる．

このように，数を行列やベクトルとして一括して扱うのは，その方が効率的でわかりやすいからである．たとえば，複数の財の価格と購入量を考えるなら，価格×購入量の演算を一括処理した方がわかり易い．というよりは，現実にそうしている．そこで，このイメージから一気に，掛算（積）に入ろう．次の演算練習は‘小学生レベル’であり，あえて定義はしないが，自然に進んで行けるであろう．

(*i*)　価格ベクトル (15, 20, 18) と数量ベクトル (100, 75, 150) の積（内積）を作り，総額を決定しなさい．

$$(15, 20, 18)\begin{pmatrix}100\\ 75\\ 150\end{pmatrix}=1500+1500+2700=5700$$

(*ii*)　価格が変わって (20, 25, 24) となったとする．このときの数量ベクトル (100, 75,

150)との積を作りなさい．(i) の結果も併記しなさい．

$$\begin{pmatrix}15 & 20 & 18\\ 20 & 25 & 24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\ 75\\ 150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1500+1500+2700\\ 2000+1875+3600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5700\\ 7475\end{pmatrix}$$

(*iii*) 次の積を作りなさい．

a) $$\begin{pmatrix}10 & 20 & 15\\ 15 & 16 & 20\\ 18 & 30 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\ 40\\ 80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}500+\ 800+1200\\ 750+\ 640+1600\\ 900+1200+\ 800\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2500\\ 2990\\ 2900\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}1.5 & 6.0\\ 2.8 & 3.9\\ 4.2 & 8.0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22.5+120.0\\ 42.0+\ 78.0\\ 63.0+160.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}142.5\\ 120.0\\ 223.0\end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 7 & 5 & 2\\ 8 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \mathit{4}\\ 6 & \mathit{10}\\ 7 & \mathit{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+24+56 & \mathit{4+40+72}\\ 14+30+14 & \mathit{28+50+18}\\ 16+12+\ 0 & \mathit{32+20+\ 0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}82 & \mathit{116}\\ 58 & \mathit{96}\\ 28 & \mathit{52}\end{pmatrix}$$

ここには 3 段階の積が現れている．

段階	例
ベクトルとベクトル	(*i*)
行列とベクトル	(*ii*)，(*iii*) a)，b)
行列と行列	(*iii*) c)

まず (*i*) のベクトル相互の積は内積 inner product といわれ，(行ベクトル)・(列ベクトル) の形として ‘頭から’ 掛けてゆき和を作る．次に (*ii*) で，行列とベクトルはここに見るように，積の前側（ここでは行列）を行ベクトル 2 本と見て，操作をくり返す．(*iii*) の b) までは後側がベクトル（列ベクトル）であったが，c) では列ベクトルが 1 本だけ右側に加わって行列となっている（イタリック体)．したがって，もう 1 回繰り返せばよい．この (*iii*) の c) が行列と行列の積の最も一般的な場合を示している．

一般に，2 つの行列の積 AB は

(A の第 i 行のベクトル)・(B の第 j 列のベクトル)　　(・は内積)

を (*i*) の内積式に計算し，i 行 j 列に置けばでき上がる．積の前側を行ベクトル，後側を列ベクトルの集まりと見て，すべての組み合わせを尽すのである．再度試されたい．

ここでベクトルどうしの積（内積）演算が可能でなくてはならない．すなわち，ベクトルの成分の個数が一致せねばならない．積

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

は不可能である．積 AB が可能なためには，A の列数＝B の行数でなければならない．

積 AB が定義されても積 BA が定義されるとは限らない．また，仮に定義されても一般には $AB \neq BA$ である．そこで（iii）の c）の延長として

d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 10 & 0 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

d')
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 10 & 0 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

の両ケースを計算し，両者が等しくないことを見ること．

最後に，積に関して次のことを見るのはやさしい．例えば，演算してみると

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，結果は，変らない．これは数（スカラー）でいえば

$$x \cdot 1 \equiv x, \quad 1 \cdot x \equiv x$$

に対応する結果である．したがって，‘行列の 1’として

$$I=\begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{（対角線は 1，それ以外はすべて 0）}$$

の形の行列を<u>単位行列</u> identity matrix という．

identity は‘1’の意味がある（英和辞典）．これを当初「単位」と訳したのは，あまり良くない．もっとも一般に測定にあって単位は 1 と定めた量をいうから，誤訳ではない．

なお，行列，ベクトルの和（差）には特別の困難はないであろう．次の例から理解されたい．

$$(4, 5, 2) + (3, 1, 6) = (7, 6, 8),$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 7 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 11 & 15 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 18 & 16 \\ 10 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$3(4 \quad 5 \quad 2) = (12 \quad 15 \quad 6)$$

$$3\begin{pmatrix} 15 & 7 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 21 & 3 \\ 24 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

(II) 行列式 determinant は日本語では「行列」に「式」を加えたものになっているが，英語では全くそうなっておらず，互いに密接な関係があるものの，行列式は方程式起源の実用のものである．実際 'determinant' は 2 次方程式の判別式の原語でもある．そこで方程式（連立方程式）を解いてみよう．

※ $$\begin{cases} 3x+2y=14 \\ 4x-\ \ y=\ 4 \end{cases}$$

これは中学生の数学で $x=2$，$y=4$ と解ける．一般に

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

を解いておけば，ただちに a, b, c, d, e, f に代入すればよい．これは，係数から（係数の関数として）解を求める '解の公式' の一般思想，あるいは方程式の一般思想である．3 通りの方法がある．

a） 直接法（代入法・加減法）　中学以来のもので，すぐに

$$x=\frac{ed-bf}{ad-bc}\ , \quad y=\frac{af-be}{ad-bc}$$

（ただし $ad-bc \neq 0$ とする）

となる．

b） 行列式による解法　a)を '記号化' してスマートにする．

$$x=\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}\ , \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{（クラメールの公式）}$$

（ただし $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ とする）

ここに，一般に 2×2 の行列式を

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

と約束する．対角線（左上→右下）は＋，非対角線（左下→右上）は－の符号がつく．

分子の e, f の位置に注意．それぞれ，x, y の係数の位置を占めている．

c） 逆行列による解法　（※）を行列の記法で書く．

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

とすれば

$$Ax=b$$

とシンプルになる．ふつう $ax=b$ を解くには a の逆数を乗じて $x=a^{-1}\cdot b\ (=b/a)$ とすればよいことを頭において，いわば A^{-1} (A の逆行列 matrix inverse）を求めればよい．ただし，逆数とは $a^{-1}\cdot a=1$, $a\cdot a^{-1}=1$ となる a^{-1} のことであるから，1を'行列の 1' に読みかえて

$$(※※)\qquad A^{-1}\cdot A=I,\quad A\cdot A^{-1}=I$$

（I は単位行列）となる 'A^{-1}' が逆行列である．丹念に計算すると，結果的に，逆行列の公式として

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} d/D & -b/D \\ -c/D & a/D \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{ただし}\ D=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\ \text{で，}\ D\neq 0\ \text{と仮定}\right)$$

が（※※）を満すことがわかっている．これを求めれば解は

$$x=A^{-1}\cdot b$$

となる．よって，右辺の計算に帰する．

例※を，まずb）で解こう．

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-11,\quad \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-22,\quad \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=-44$$

でただちに $x=2$, $y=4$ と出る．

c）で解くと，$D=-11$ は出ているから，公式から

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{pmatrix}$$

を得て，積演算で

$$\begin{pmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とただちに出る．

もちろん，b）で（ a)，c）でももちろん）

$$D=\begin{vmatrix}a&d\\b&c\end{vmatrix}=0$$

なら1通りの解をもたない．すなわち，全く解がないか（不能），無限にある（不定）のいずれかとなる．つまり，Dを見れば‘判別’determineできるのである．‘determinant’といわれるゆえんである．

3変数以上については，成書を見られたい．ここでは基本アイデアを示すにとどめる．各列から行を重複せずとった数の積で，2×2の場合の性質

$$\text{交代的}:\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix},\ \text{etc.}$$

$$\text{多重線形}:\begin{vmatrix}1+2&5\\3+4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5\\3&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&5\\4&6\end{vmatrix},\ \text{etc.}$$

が満たされるように一般化する．結果はたとえば

$$\begin{vmatrix}1&7&9\\2&4&6\\3&5&8\end{vmatrix}=\underset{(1\ 2\ 3)}{1\cdot4\cdot8}+\underset{(2\ 3\ 1)}{2\cdot5\cdot9}+\underset{(3\ 1\ 2)}{3\cdot7\cdot6}-\underset{(1\ 3\ 2)}{1\cdot5\cdot6}-\underset{(2\ 1\ 3)}{2\cdot7\cdot8}-\underset{(3\ 2\ 1)}{3\cdot4\cdot9}=-2$$

となる．かっこ内は1列，2列，3列に対する行の位置で，符号ルールは（$i\ \ j\ \ k$）が（1　2　3）から1回の入れ換え（置換）で達するものなら－符号，たとえば（1　3　2）の場合－で，2回あるいは0回なら＋符号とする．前者を奇置換，後者を偶置換という．一般の$n\times n$の場合も，以上のように置換の偶奇に従い，＋，－の符号を付けて定義する．

(III)　固有値問題 eigenvalue problem はある特別の連立一次方程式である．きわめてしばしばあらわれるが，行列と行列式の両方の知識を必要とする．これについては第5章末参照．