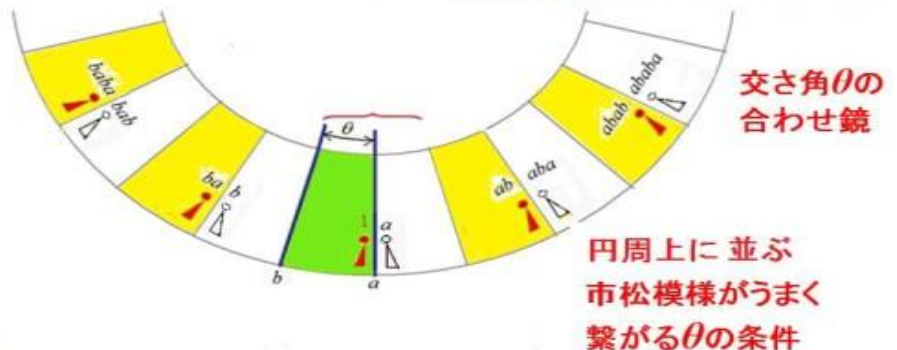
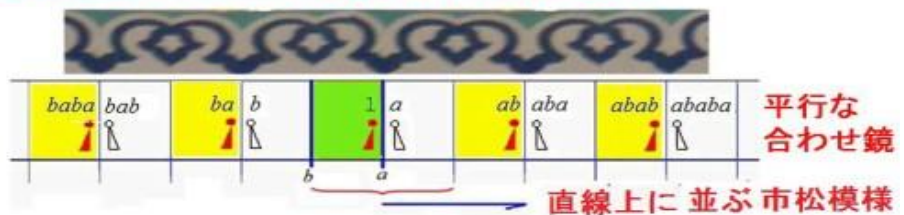




万華鏡は合わせ鏡でできています。自分の前に鏡，自分の後ろにも鏡，つまり，合わせ鏡の間に自分がいるとします。前の鏡に写るのは，自分の前から見た姿：自分が北向（N）なら，鏡像は南向（S）。後ろの鏡には，自分の後ろ姿の鏡像があり，これも南向（S）です。これらの像の配列を横から見ると SNS の配列です。しかし，これだけで終わらないのが合わせ鏡の醍醐味です。自分の前の鏡で出来た鏡像（S）は，自分の後ろの鏡で反射し，後ろの鏡の中に鏡像（N）を作ります。反射するたびに像の向きは逆転しますが，生ずる像がこれで終わりということはありません。その像は，合わせ鏡のどちらかの前にありますから，次の像が必ず生じます。こうして，1 列に無限に配列する鏡像の列……SNSNSNSN……ができます。これは，SN のペアが周期的に並んでいる状態です。もし，合わせ鏡が平行ではなく，交差角 θ° であったとすると，鏡像は直線上に並ぶのではなく，円周上に並びます。そして，SN のペアの中心角は $2\theta^\circ$ ですから，円周上に並んだ鏡像が周期的にきれいにつながるためには， $(360^\circ)/(2\theta^\circ)=n$ ， n は整数でなければなりません。

合わせ鏡の不思議！

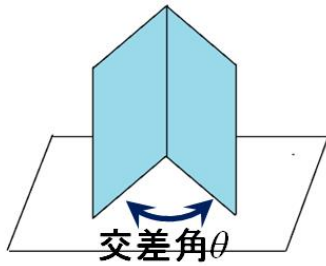
無限に続く繰り返し [= 格子] 結晶の世界
 合わせ鏡 a, b により，1次元の市松模様ができる



2θ で 360° が割り切れる

$$\frac{360^\circ}{2\theta} = n \text{ (整数) のとき, } n \text{ 回回転対称軸が生じる}$$

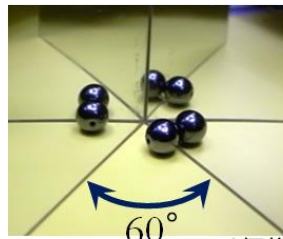




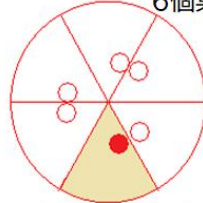
2枚の鏡の交差角度を色々変えて、円周上に並ぶ映像が規則正しくつながる角度を調べよう

$$\frac{360^\circ}{\theta} = 2n \text{ の場合は,}$$

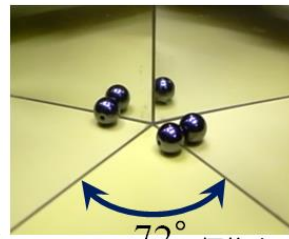
映像が規則正しくつながる(群をなす)



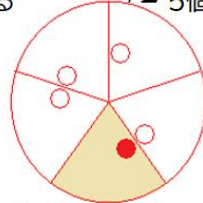
60° 6個集まる



周期的につながる



72° 5個集まる



周期的につながらない

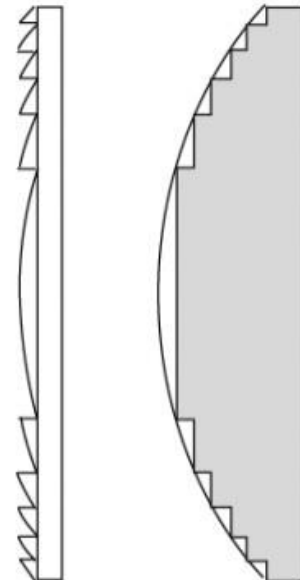
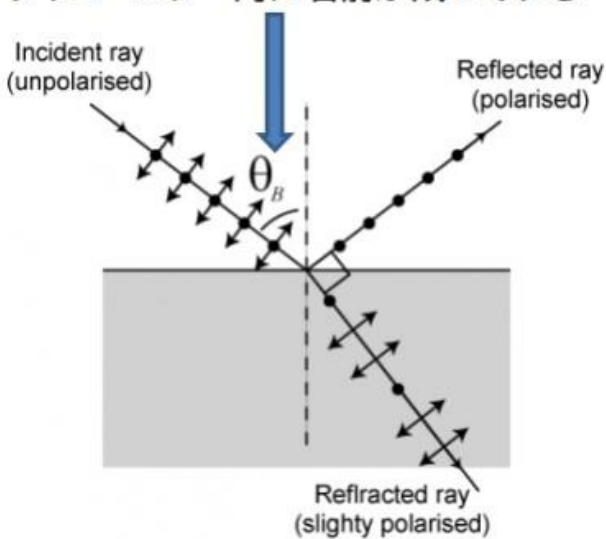
“Kaleidoscope”の命名と発明は、プリュースターの特許（1817年）が起源です。特許には、2枚の鏡の交差角 θ° を、360°を偶数で割り切る角にすることが記されています。

プリュースターはエディンバラの物理学者（光学）で、燈台のレンズの軽量化を実現しました。凸レンズが大きくなると重くなる問題を解決しました。これは、その後に現れるフレネルレンズやゾーンプレートの実験です。彼は、光の反射のときに、反射光が完全なS偏光（反射面に平行な電場成分の偏光）になる入射角に名前を残しました（プリュースター角）。

万華鏡の発明者 プリュースター
スコットランドの物理学者(光学)

万華鏡の特許(1817年)
2枚の鏡の交差角は、360度を偶数で割り切る角度にする

- ・燈台のレンズの軽量化(フレネルレンズ)
- ・プリュースター角に名前が残っている



フレネルレンズ

普通のレンズ

今、あなたは鏡の前にいます。あなたとあなたの周囲が鏡像の世界として見えます。あなたが実在する世界と鏡像の世界は、何から何まで同じようです。しかし、あなたが鏡像の世界に入り込めたとしても、鏡像に重ね合わさることはできません。右手と左手は鏡映で互いに重ね合わさりますが、3次元空間内でどのように動かしても重ね合わせることはできませんね。つまり、鏡映操作というのは、3次元空間内の物体の運動ではないのです。もし、4次元空間内を運動できるなら、3次元の鏡映像を運動で重ね合わせることは可能です。

私たちは、鏡映像に何か不思議な感じを抱くのですが、鏡映像の世界には我々の3次元空間内の運動では到達できないということに関係があるのではないのでしょうか。

万華鏡は、3枚鏡の壁で囲まれた三角柱で、3角形の内部にガラス層の分布した絵柄があります。私は、この3角形のことを“鏡室”と呼ぶことにしています。3角形の辺を鏡として、鏡映で鏡室の絵柄を張り詰めていき、秩序のある張り詰めができるためには、鏡室の3角形の形にどのような条件が課されるでしょうか。3角形の各頂点は合わせ鏡になっていますから、それぞれの頂点には偶数個の3角形が集まる必要があります。この方程式を解くと、周期的に平面を埋める万華鏡パターンが得られる3角形は次の3種類に限られることがわかります。

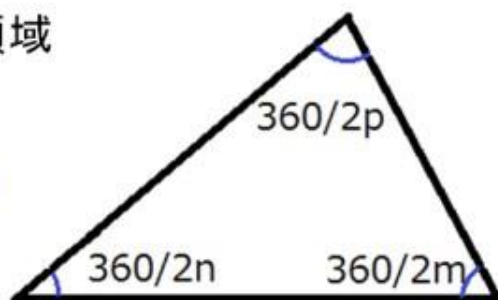
3枚鏡

平面をきれいに埋める万華鏡の基本領域

$$\frac{360}{2n} + \frac{360}{2m} + \frac{360}{2p} = 180$$

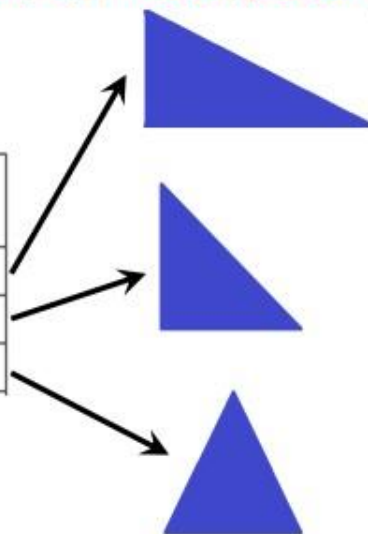
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} = 1, \quad 2 \leq n, m, p$$

整数解を求める

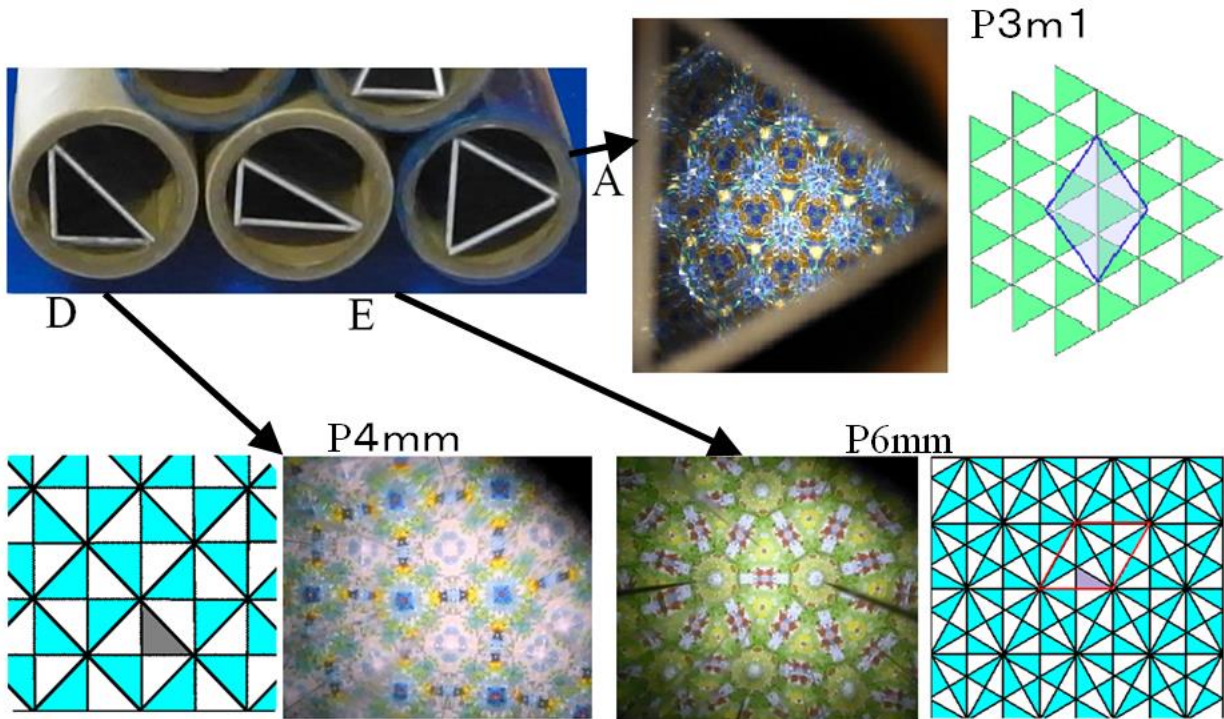


各頂点にn回軸, m回軸, p回軸が生じる

	n	m	p	$\frac{360}{2n}$	$\frac{360}{2m}$	$\frac{360}{2p}$	
整数解	2	3	6	90	60	30	E
	2	4	4	90	45	45	D
	3	3	3	60	60	60	A



●市松模様になれば周期的なタイル張り模様(平面群が生成されている)



3枚鏡

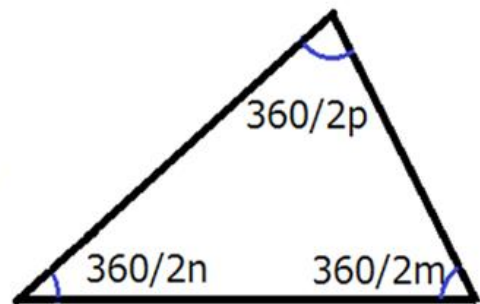
分数解を許す基本領域の万華鏡

$$\frac{360}{2n} + \frac{360}{2m} + \frac{360}{2p} = 180$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} = 1,$$

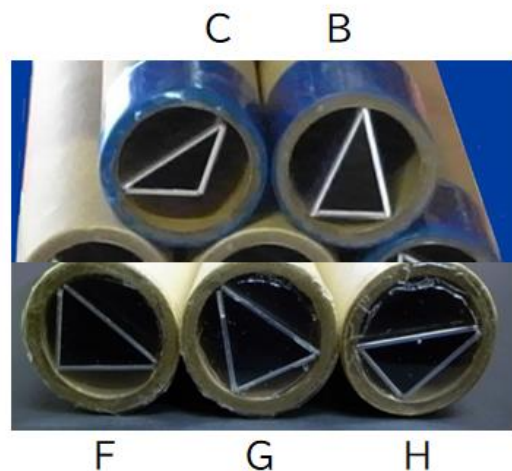
$$2 \leq n, m, p$$

分数解を許す場合



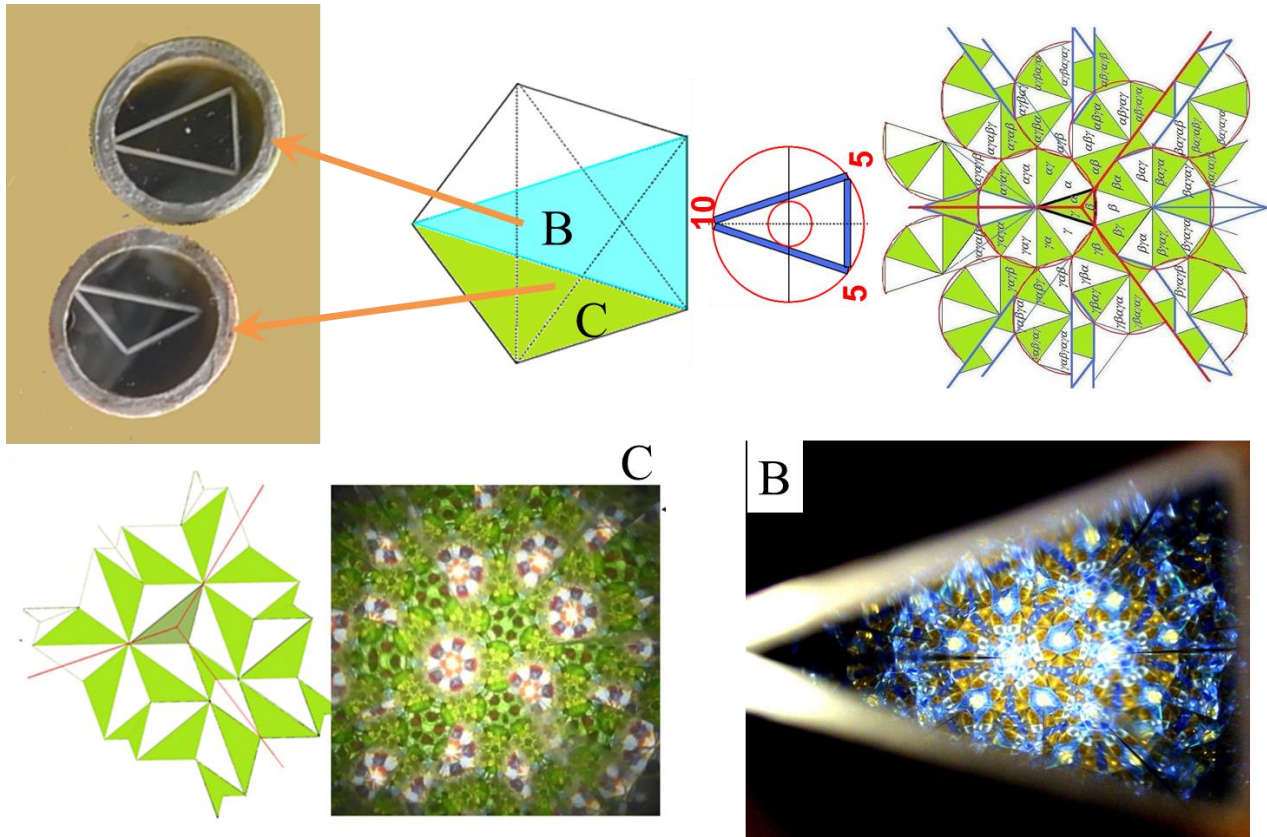
	n	m	p	$\frac{360^\circ}{2n}$	$\frac{360^\circ}{2m}$	$\frac{360^\circ}{2p}$	
分数解は 無数に存在	5/2	5/2	5	72°	72°	36°	B
	5/3	5	5	108°	36°	36°	C
	10/3	2	5	54°	90°	36°	F
	12/5	3	4	75°	60°	45°	G
	9/2	9/4	3	40°	80°	60°	H
	3/2	12	4	120°	15°	45°	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	24/11	24/11	12	82.5°	82.5°	15°	K
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

無数にある

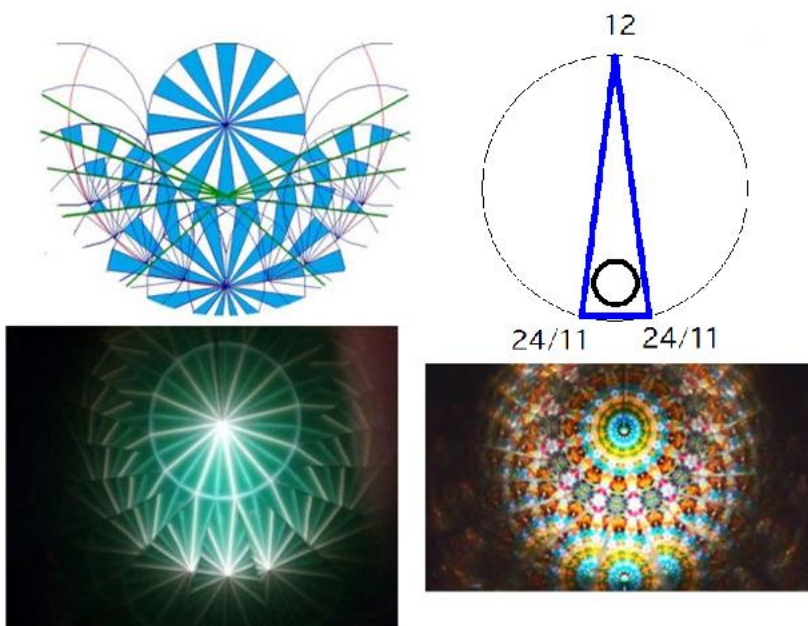


実は、 n, m, p が整数解のときだけでなく、分数解の場合もきれいな万華鏡映像が得られます。分数解の万華鏡は無限に作れます。ただし、これらは、周期的な平面タイル張りではなく、複雑な秩序（数学でいうと平面群にならない）の平面模様になります。

◆分数解の例 B



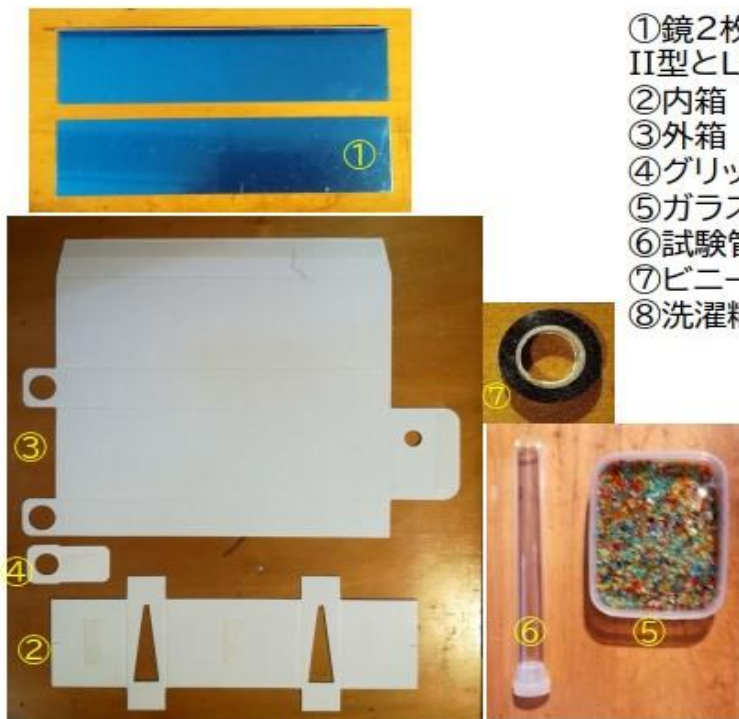
◆分数解の例 K ⇒ 今回作る万華鏡



●用いた図の多くは、「美しい幾何学」,谷克彦,技術評論社(2019),第5章より引用した。

●万華鏡を作ろう【工作編】

① 部品一覧



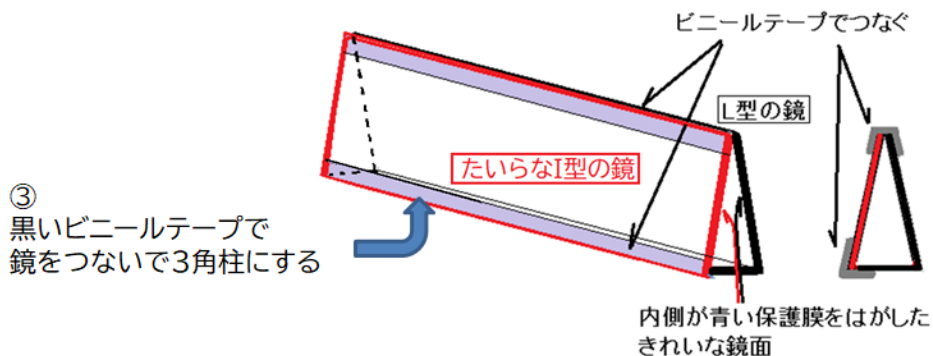
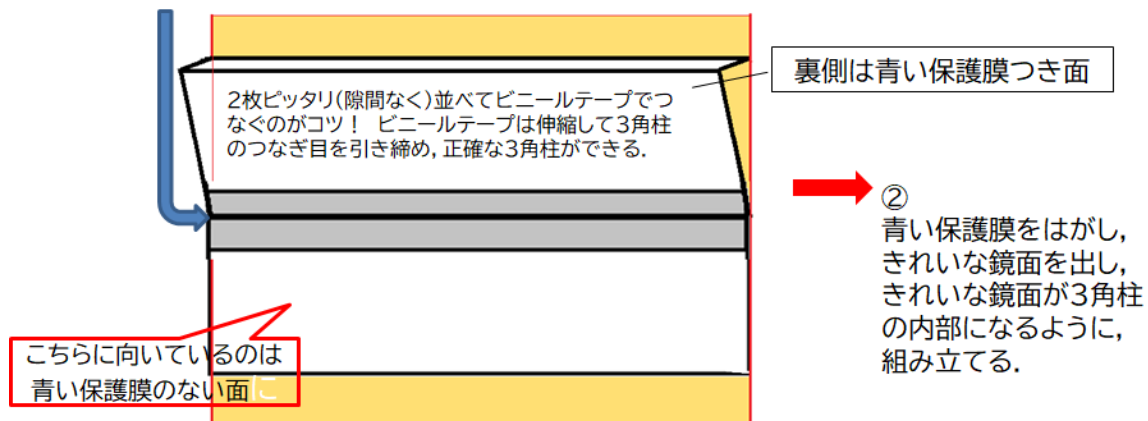
- ①鏡2枚(光輝アルミ1mm厚)
II型とLI型があります
- ②内箱
- ③外箱
- ④グリップ穴部品
- ⑤ガラス屑
- ⑥試験管
- ⑦ビニール・テープ黒
- ⑧洗濯糊(PVA)あるいはグリセリン

ブリュースター型万華鏡キットLI型

② 鏡筒を組み立てる

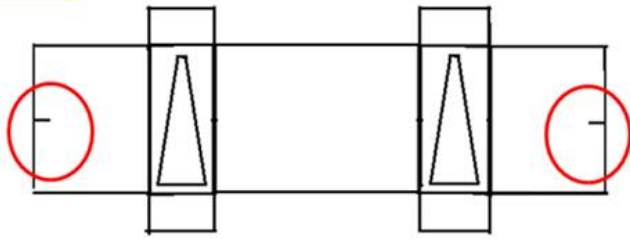
鏡

- ① 2枚のアルミニウム鏡(平板I型とL型)を、**青い保護膜面を机面に向けて**、2枚ピッタリ並べ、**黒いビニールテープ**で2枚をつなぐ。

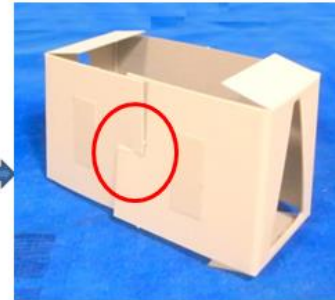


③ 鏡筒を内箱にセットする

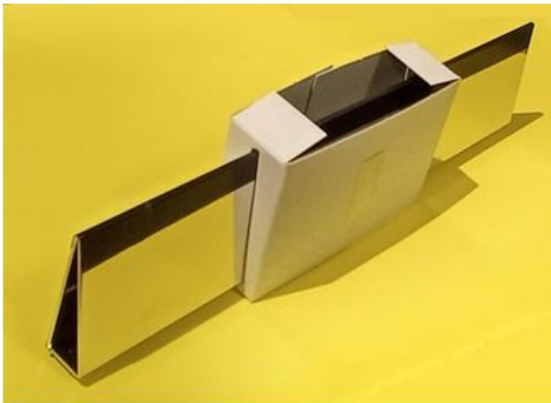
内箱



② 切れ込みを
組合せて
組み立てる



①紙の白色の方を外側にする。組み立てる前に、折り目をつけておくと綺麗に組み立てられる。
折り目をつけるとき、3角の窓を傷めないように注意するのがコツ！



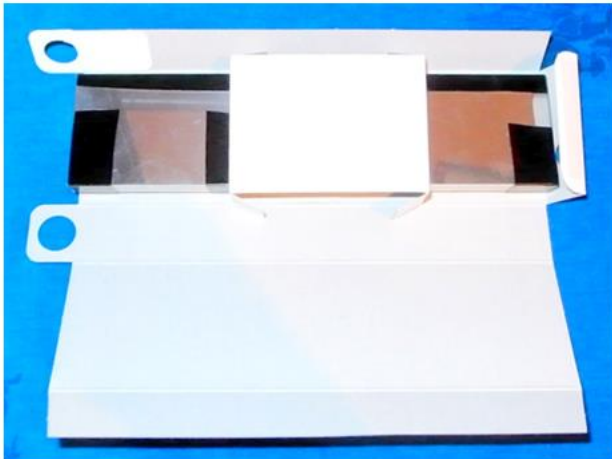
③ 内箱に完成した鏡筒を差し込む。
内箱の3角形穴を破らぬよう注意



鏡が内箱の中で動かぬように、
ビニールテープで1か所固定する。

④ 内箱を外箱にセットし組み立てる

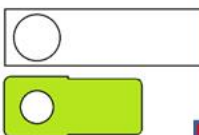
外箱に鏡付内箱を入れる



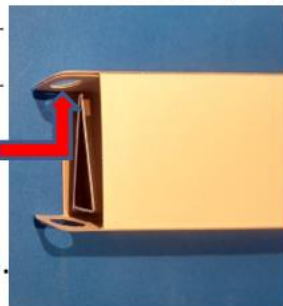
覗き穴

外箱の覗き穴の位置が
鏡3角形の底辺の近く
(内心)になるように
内箱の向きに注意！

① 外箱内に鏡をセットした内箱を入れる。向きを確認し、正しければ
すべての両面テープのシールをはがし、一気に接着組み立てる。



② グリップ穴部品を
内側から貼り付けて、
穴を一回り小さくする。



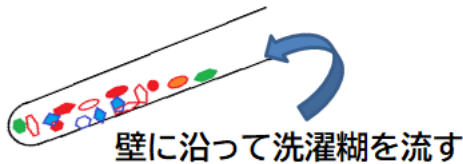
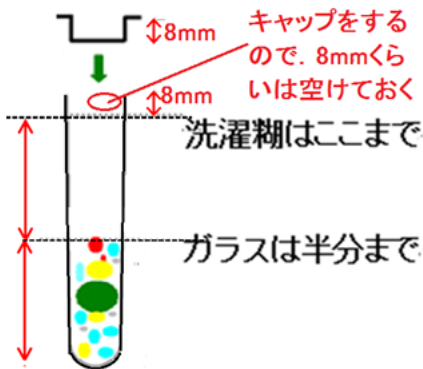
・内箱の3か所
・外箱の1か所
外側から指で押して接着する。

外箱の覗き穴のある面の両面
テープは、完成してからはがす
のでも良い。

5 ワンドを作る

ガラス屑が、ネバネバした液体の中でゆっくり落下するようにする

ワンド



①試験管に半分だけガラス屑を入れる！
(半分空きがないと移動できないから)

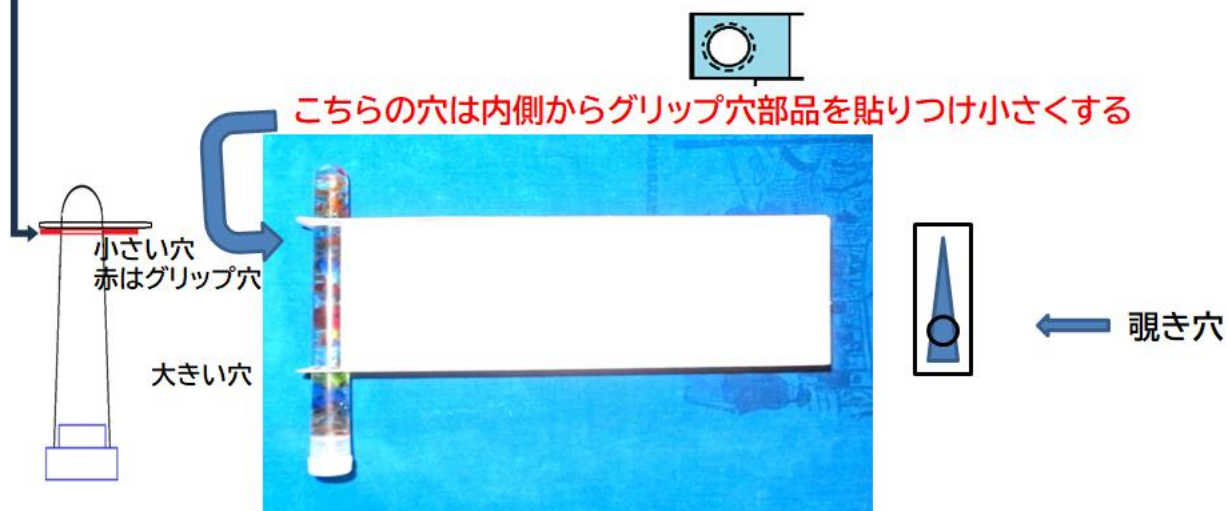
●色々な形や色のガラス屑が混ざると面白い。
(あまり大きいものが入ると、
試験管の中で動けないので注意)

●色の濃いものばかり入れると暗くなります。
自分の好みのもの(ビーズなど)を加えても面白い。
例えば、鏡の屑など少し混ぜると、
花火のようにピカッと光りきれいです。

②百均の洗濯糊PVAを、水で薄めたもの
(選択糊の濃度～85%)を、試験管に入れる。
試験管を斜めにしてガラス屑をばらけさせ、
試験管をゆっくりまわしながら、洗濯糊が
ガラス屑の間を通り、試験管壁に沿って
試験管の底まで行き渡るようにするのがコツ。
(ガラス屑層の中に空気を閉じ込めないようにする)

6 ブリュースターLI型万華鏡の完成

グリップ穴には試験管の細い側が入る。太い側を入れないように注意！



この万華鏡の映像は、以下で見られます

<https://youtu.be/VgNGY38opS0>