

世界の数学者ゆかりの地を訪ねて

数学月間懇話会 2024.7.22 (月)

於：東京大学数理科学研究科

埼玉県立浦和第一女子高等学校 仙田章雄

0. 自己紹介

都立大学理学部数学科，同大学院博士課程（単位取得満期退学）を経て，埼玉県立高校の教諭。浦和高校定年後，浦和第一女子高校および中央大学理工学部学習支援室にお世話になる。中央大学も定年になり，現在は浦和第一女子高校非常勤講師。

1. 本日の全体の流れ

- (1) ピタゴラスを訪ねて（ギリシア，イタリア）1990年夏，2011年夏，2019年夏
- (2) プラマグプタを訪ねて（インド）2014年夏
- (3) その他

2. 今までの旅

- 1 1987 はじめての海外旅行
- 2 1988 一人でヨーロッパ
- 3 1990 ピタゴラスを訪ねて（ギリシア，トルコ）
- 4 1992 ガリレオを訪ねて（イタリア）
- 5 1994 ガウスを訪ねて（長男と，ドイツ）
- 6 1995 アインシュタインを訪ねて（次男と，スイス，ドイツ）
- 7 1996 はじめてのインド（インド）
- 8 2000 ガリレオ，アルキメデスを訪ねて（三男・長男と，イタリア）
- 9 2002 ミレトス（ターレス）とクレタを訪ねて（ギリシア，トルコ）
- 10 2003 ラマヌジャンを訪ねて（インド）
- 11 2004 ガロアを訪ねて（フランス）
- 12 2005 オイラーを訪ねて（スイス，ドイツ）
- 13 2006 アーベルを訪ねて（ノルウェー）
- 14 2008 デカルトを訪ねて（フランス，オランダ）
- 15 2009 オイラーを訪ねて（カリーニングラード，サンクトペテルブルク）
- 16 2010 フェルマとパスカルを訪ねて（フランス）
- 17 2011 デロス島とサモス島（ピタゴラス）を訪ねて（ギリシア）
- 18 2012 アーベルとハミルトンを訪ねて（ノルウェー，アイルランド）
- 19 2013 リーマンを訪ねて（ドイツ，イタリア）
- 20 2014 プラマグプタを訪ねて（インド）
- 21 2015 パスカルを訪ねて（フランス）
- 22 2016 ライブニッツとガウスを訪ねて（ドイツ）
- 23 2017 エルデシュを訪ねて（ハンガリー）
- 24 2018 ゲーデルとワイトゲンシュタインを訪ねて（オーストリア，チェコ）
- 25 2019 ピタゴラスを訪ねて（イタリア・クロトン）

3. まとめ

(1) 語学力が不足

基本的にはすべて一人旅

(2) 事前の準備が大変

楽しみでもある。ツアーはありえない。

(3) 数学通信「気まぐれ」がいい刺激

現在 37 年目

(4) 自分一人ではできない

何かありましたら, snd99ryu@oak.ocn.ne.jp まで

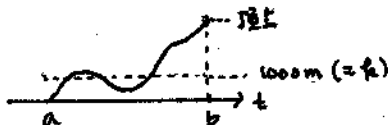
富士山に登るには標高1000mの地点を通らなければならない

富士山の標高は3976m。0m地点から登るにちどこかで1000mの地点を通る。登るにはアッパダウンがあるので、それは1回ではなうかおれもない。



数学的に表現してみよう。

登り始めから時間の高さを $f(t)$ とする。



登り方により f のグラフは異なる。しかし、中間値の定理を用いると、どこかで1000mの地点を通りかかると。

● 中間値の定理

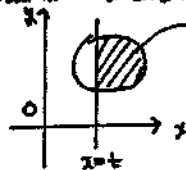
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a) \neq f(b)$ ならば、 $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 η に対して $f(c) = \eta$ となる c ($a < c < b$) が存在する。

(数Ⅲです)

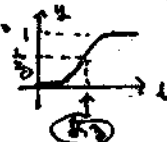
あんぱんを2等分しよう

図のようにあんぱんがある。1回包丁を入れるだけで2等分できるだろうか？
直感的にはできると思える。右のように関数 f をつくり、中間値の定理を用いる。どこかで面積を半分にすることが示せる。ただ、どうやって示すのがゆめがでない。

(証明) x は座標の第1象限にあるあんぱんをみる。

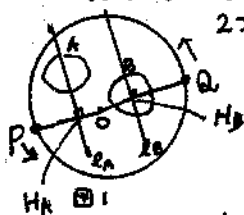


$f(t) = (\text{直線 } x=t \text{ の左側にあるあんぱんの面積})$
あんぱんの面積を1とする。
 t を0から大きくしていくとどこかで1/2となるものが存在する。



2つのあんぱんをいっぺんに2等分したい

あんぱんが2つある。2つのあんぱんに2等分することはできるのだろうか？
できる、できることを示そう。



2つのあんぱんを大きな円の中に入れて(図1)、直径 PQ をたぐ。 PQ は垂直にあんぱん A, B をそれぞれ2等分し、 PQ は垂直な直線 L_A, L_B をひく。垂直線の足をそれぞれ H_A, H_B とする。このとき

$$f(P) = PH_B - PH_A$$

とたぐ。図1では $PH_B > PH_A$ 。次に直径 PQ を O を中心として反時計回りに回転させる。すると180°回転させると

図2のようになる。あんぱんは動かさない。図2では $PH_B < PH_A$ となり、 P を連続的に変化させると

$f(P) < 0$ から $f(P) > 0$ となる。中間値の定理から、どこかで $f(P) = 0$ となる。このとき $H_A = H_B$ となり、 $L_A = L_B$ となる。これが求めるものである。

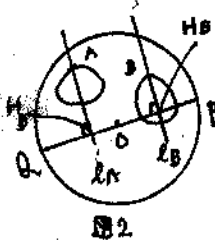


図2

(※数学に詳しい証明は中絶 (親山士郎) 著)

前回の問題

真上から見ると円、正面から見ると、横から見ると円となる立体は何か？

- ① 球と制限されない。
たとえば同じ半径の3つの円柱の共通部分。

(想像できるか?)



南イタリヤ人 - ピタゴラスを訪ねて (1)

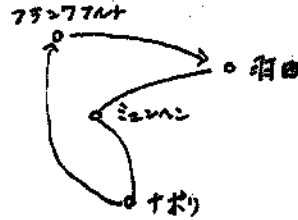
2019年の夏、S先生は南イタリヤ人 ひしり 旅した。

めざすはピタゴラス。過去にピタゴラスを訪ねる旅は何回かしたことがある。1990年にはトルコからサモス(ギリシア)に入った。ピタゴラスが生まれた島である。2011年にはアチネ→ミコリス→サモスと移動した。今回はいわゆるピタゴラス学園あたりを訪ねろと思った。

飛行機はネットで予約。まずナポリに入ったのだが、直行便はないのでシエンナ経由で行くことにした。ちよとせいたく(?)だが、ANA(全日空)とLH(ルフトハンザ)のシエナ便である。切符をたのむのはいいが、手元には切符がないので不安だ。パスポートを提示するだけでいいのだ。

旅立つ前日 ルフトハンザのメル。飛行機が遅れているし、昨年、デュッセルドルフで乗りおぼせを空港で一晩も過ごしたことを思い出した。

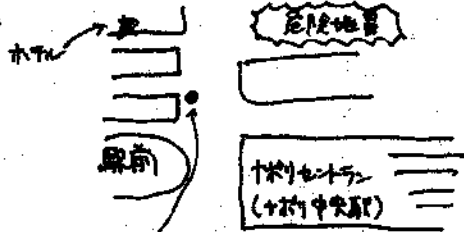
飛行機の近くの席に中学生の集団がいた。ロゼンハイムと市川市(千葉県)が1ポーター・シエナになっていて、泣きまわっているとのことであつた。



シエンナ乗りおぼせ 大変であつた。ナポリの空港には予定通り着いた。

駅前にはTaxi呼び込みが。無視してバスのりばを推す。少しウロツク。5分位歩くことになった。今は夜11時。切符はバス内で購入。5ユーロである。1ユーロ = 122円。ホテルは駅に近い安宿をネットでしていた。

ボロイのは分かつていた。ゴミが散らかっている通り。予約したあとグーグルアースで調べたらあやしい通りであつた。ムンバイを思い出した。



入口は鉄格子。ホテルのインターフォンを押すと、ロックが解除された。到着が遅いのは伝えてある。クラーがあった。何と淫靡庫もあつた。

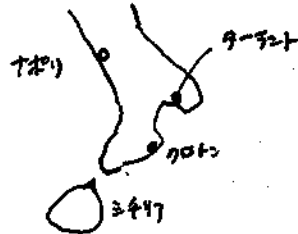
バスはこのあたりにとまった

朝食つきをあたのだが、フロント近辺にあるパンや菓子やコーヒーをもち自分の部屋で食べるということだった。いわゆる食堂はない。

翌日、列車の切符をどうと駅へ。大混乱。大きな荷物をもつ人でごうたがえしていた。ツリ入ったアキシーオンで地図をもらう。警りに心多数。

はじめは単に切符売り場。整理券をうけとり、駅の中をウロツク。もちろん改札体も11。するとお1つ切符売り場があつた。何と、おきのは高速列車のものたつたよめた。日本では新幹線のおなもか。ふつうの切符売り場で整理券をもらう。もちろん自動

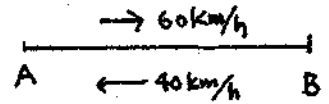
翌日の9-30の行きの切符を手に入れた。待つ。とにか待つ。8時にホテルを出たのだが、切符を手に入れたのは9:55であつた。もちろん座るところはないので、構内を歩き回る。あまり広くはない。



ナポリから9-30は317キロ。東京-豊橋が300キロ。東京-名古屋が370キロである。IC2等が34ユーロ。4200円。安いといえよう。

行きは時速60キロ、帰りは時速40キロ、平均は？

地点Aから地点Bまで行きは60km/h、帰りは40km/hだった。平均すると $\frac{60+40}{2} = 50$ (km/h) だ



走ったことになる。いや、ならない。

AB間の距離を a km とすると

行き $\frac{a}{60}$ 時間 } 合計 $\frac{a}{60} + \frac{a}{40} (= (\frac{1}{60} + \frac{1}{40})a \text{ 時間})$
 帰り $\frac{a}{40}$ 時間

往復では $2a$ km なのだから、平均の速度は

$$\frac{2a}{(\frac{1}{60} + \frac{1}{40})a} = 48 \text{ km/h}$$

となるのだ。40km/h ではないのだ。(Vol. 29, 85号参照)

a と b の調和平均だ。
 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} (= \frac{2ab}{a+b})$

比率はこわい

上にのべた時速は $\frac{距離}{時間}$ の数ではなく、比である。距離 ÷ 時間 という比である。比は単純に計算するとあわない。

この10月に消費税が8%から10%に上がった。たまたま2%である。……？

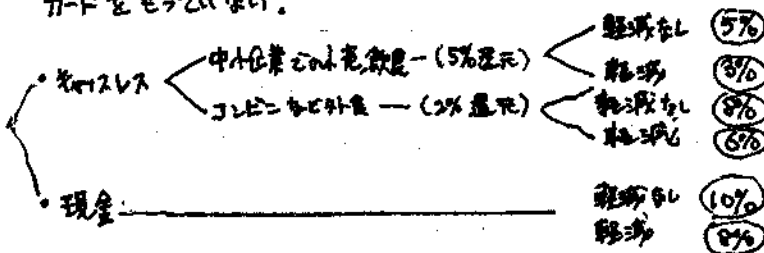
具体的に考えてみよう

10000円の買物をする時、今までは消費税は8%の800円だった。10%になると1000円である。10000円からすると、800円から1000円は200円のアップである。税金、つまり消費税という立場でみると

$$800 \text{ 円} \rightarrow 1000 \text{ 円}$$

の増率は、 $\frac{1000}{800} \times 100 = 125$ 、つまり25%のアップなのである。

前回の5%から8%の増率は、 $\frac{800}{500} \times 100 = 160$ 、つまり60%のアップだった。消費税が落ちたのはいろいろある。今回はその反省を挙げて軽減税率が登場した。生活必需品は8%のままという線引が混在している。要はキャッシュレスだと還元されるという。一般に弱者がカードをもちにくい。



私はキャッシュレスを持っていないけど



南イタリヤ — ピラゴラスを訪ねて(2)

今ナポリ。ナポリ・セントラル(ナポリ中央駅)を出て歩を始める。考古学博物館をめざす。裏通りを歩く。道が狭い。坂が多い。洗濯物がばらまがっている。近道と思いたがよく曲がったりするので近道はなかったようだ。

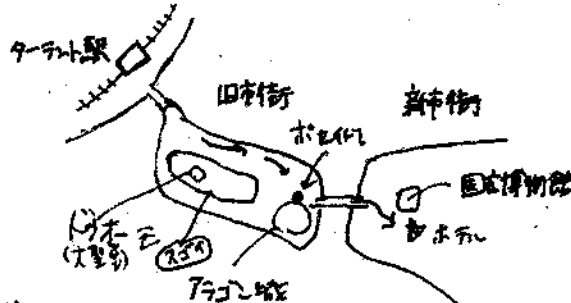
博物館の外装は工事中。でも中には入れた。15ユーロ(1800円)。広い。世界どしどし展覧のギリシ、ローマの美術コレクション。1585年に馬車隊の兵舎としてつくられ、のちに増設されている。

ケーブルカーに乗ろうと思った。モンテカステル駅。おもしろくない車に乗る。不安だったので途中(?)からひきかえした。ケーブルとロープウェイを分ちがいでいたのがおもしろい。

炎天下の中。1万7000歩はキツイ。足が痛いといふよりは、取り返して歩いている感じで背負っている。

② 2時半に目が覚めた。寝たのは6時。時差ボケと疲れが。今日はターラントに向かう。一気に70トンに行ってもいいが、果てはな。ターラントに近づくにつれてイオニア海が異様に感じに聞こえる。鉄塔が海上に2山ある。何か探検しているのか。

1時間遅れでターラント駅に着いた。駅からは左に海を見ながら旧市街から新市街へ。木立はよく。



ヌマホは程に直り。40分歩いた。強風。34°C。

ピラゴラスの本町にのり出す。博物館は工事中のため閉鎖。アラゴン城は時間によって入れるが、ボセマン神殿があった。旧市街へ。おもしろいところであった。一人歩きで危険な場面も。建物ほとんど木造。窓は木造り、すてきな住居。「ターラント 旧市街」で検査すると、老朽化の感圧感を感ずるともいわれる。

さて、ホテルにもどり。部屋をまちがえたよりの千重クインした部屋にもどったのだが、そこは指示された部屋ではなかった。1フロアか2か3か4か5か6か7か8か9か10か11か12か13か14か15か16か17か18か19か20か21か22か23か24か25か26か27か28か29か30か31か32か33か34か35か36か37か38か39か40か41か42か43か44か45か46か47か48か49か50か51か52か53か54か55か56か57か58か59か60か61か62か63か64か65か66か67か68か69か70か71か72か73か74か75か76か77か78か79か80か81か82か83か84か85か86か87か88か89か90か91か92か93か94か95か96か97か98か99か100か101か102か103か104か105か106か107か108か109か110か111か112か113か114か115か116か117か118か119か120か121か122か123か124か125か126か127か128か129か130か131か132か133か134か135か136か137か138か139か140か141か142か143か144か145か146か147か148か149か150か151か152か153か154か155か156か157か158か159か160か161か162か163か164か165か166か167か168か169か170か171か172か173か174か175か176か177か178か179か180か181か182か183か184か185か186か187か188か189か190か191か192か193か194か195か196か197か198か199か200か201か202か203か204か205か206か207か208か209か210か211か212か213か214か215か216か217か218か219か220か221か222か223か224か225か226か227か228か229か230か231か232か233か234か235か236か237か238か239か240か241か242か243か244か245か246か247か248か249か250か251か252か253か254か255か256か257か258か259か260か261か262か263か264か265か266か267か268か269か270か271か272か273か274か275か276か277か278か279か280か281か282か283か284か285か286か287か288か289か290か291か292か293か294か295か296か297か298か299か300か301か302か303か304か305か306か307か308か309か310か311か312か313か314か315か316か317か318か319か320か321か322か323か324か325か326か327か328か329か330か331か332か333か334か335か336か337か338か339か340か341か342か343か344か345か346か347か348か349か350か351か352か353か354か355か356か357か358か359か360か361か362か363か364か365か366か367か368か369か370か371か372か373か374か375か376か377か378か379か380か381か382か383か384か385か386か387か388か389か390か391か392か393か394か395か396か397か398か399か400か401か402か403か404か405か406か407か408か409か410か411か412か413か414か415か416か417か418か419か420か421か422か423か424か425か426か427か428か429か430か431か432か433か434か435か436か437か438か439か440か441か442か443か444か445か446か447か448か449か450か451か452か453か454か455か456か457か458か459か460か461か462か463か464か465か466か467か468か469か470か471か472か473か474か475か476か477か478か479か480か481か482か483か484か485か486か487か488か489か490か491か492か493か494か495か496か497か498か499か500か501か502か503か504か505か506か507か508か509か510か511か512か513か514か515か516か517か518か519か520か521か522か523か524か525か526か527か528か529か530か531か532か533か534か535か536か537か538か539か540か541か542か543か544か545か546か547か548か549か550か551か552か553か554か555か556か557か558か559か560か561か562か563か564か565か566か567か568か569か570か571か572か573か574か575か576か577か578か579か580か581か582か583か584か585か586か587か588か589か590か591か592か593か594か595か596か597か598か599か600か601か602か603か604か605か606か607か608か609か610か611か612か613か614か615か616か617か618か619か620か621か622か623か624か625か626か627か628か629か630か631か632か633か634か635か636か637か638か639か640か641か642か643か644か645か646か647か648か649か650か651か652か653か654か655か656か657か658か659か660か661か662か663か664か665か666か667か668か669か670か671か672か673か674か675か676か677か678か679か680か681か682か683か684か685か686か687か688か689か690か691か692か693か694か695か696か697か698か699か700か701か702か703か704か705か706か707か708か709か710か711か712か713か714か715か716か717か718か719か720か721か722か723か724か725か726か727か728か729か730か731か732か733か734か735か736か737か738か739か740か741か742か743か744か745か746か747か748か749か750か751か752か753か754か755か756か757か758か759か760か761か762か763か764か765か766か767か768か769か770か771か772か773か774か775か776か777か778か779か780か781か782か783か784か785か786か787か788か789か790か791か792か793か794か795か796か797か798か799か800か801か802か803か804か805か806か807か808か809か810か811か812か813か814か815か816か817か818か819か820か821か822か823か824か825か826か827か828か829か830か831か832か833か834か835か836か837か838か839か840か841か842か843か844か845か846か847か848か849か850か851か852か853か854か855か856か857か858か859か860か861か862か863か864か865か866か867か868か869か870か871か872か873か874か875か876か877か878か879か880か881か882か883か884か885か886か887か888か889か890か891か892か893か894か895か896か897か898か899か900か901か902か903か904か905か906か907か908か909か910か911か912か913か914か915か916か917か918か919か920か921か922か923か924か925か926か927か928か929か930か931か932か933か934か935か936か937か938か939か940か941か942か943か944か945か946か947か948か949か950か951か952か953か954か955か956か957か958か959か960か961か962か963か964か965か966か967か968か969か970か971か972か973か974か975か976か977か978か979か980か981か982か983か984か985か986か987か988か989か990か991か992か993か994か995か996か997か998か999か1000

翌日、ターラント駅で70トン行きの切符を予約しに行った。旧市街をめぐり。意外と近かった。

しかし... 駅の中人がほとんどいない。駅員もいない。窓口も閉まっている。しまった! こんなことがあるのか。わかりにくい... 駅員さんいなくて。聞いてみると、駅員ではなかった。

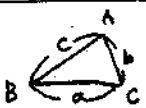
自動販売機があるので挑戦してみた。まず画面を英語にする。わからないからいれない。そばにいた人が手伝ってくれた。何とか購入することかできた。カードを使う。パスがきた。新市街へ行くので乗る。切符は乗車券から買える。アラゴン城へ。1時間のツアーで無料。海軍の施設なのでガイドがつく。英語。よくわかりにくい。話し方に難解があり参考になる。ナイスがいっぱい。握手をして別れる。新市街にピラゴラス通りを見つけた。

帰った。2万歩。明日は70トンに向かう

転換法とは？

あまり知られていない証明方法に転換法というのがある。

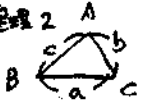
ピタゴラスの定理はよく知られている。直角三角形についての定理だ。鋭角、鈍角についてもあんな感じで次のようになる。

定理 1  におい

$C < 90^\circ \Rightarrow a^2 + b^2 > c^2$

$C = 90^\circ \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

$C > 90^\circ \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2$

定理 2  におい

$a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow C < 90^\circ$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow C = 90^\circ$

$a^2 + b^2 < c^2 \Rightarrow C > 90^\circ$

ピタゴラスの定理

ピタゴラスの定理の逆

もし定理 1 がいえたならば定理 2 は自動的に成り立つ。これは転換法による。

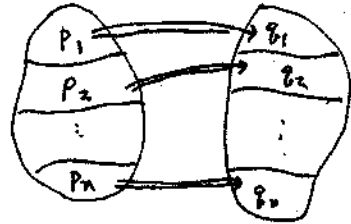
転換法

$P_1 \Rightarrow Q_1, P_2 \Rightarrow Q_2, \dots, P_n \Rightarrow Q_n$ が成り立つ。

P_1, P_2, \dots, P_n はそれぞれの場合を並列にみたし、 Q_1, Q_2, \dots, Q_n もそれぞれの場合を並列にみたせば、

$Q_1 \Rightarrow P_1, Q_2 \Rightarrow P_2, \dots, Q_n \Rightarrow P_n$ が成り立つ。

(ほかにもいろいろの事例がある。)



例 1 二次方程式の解について

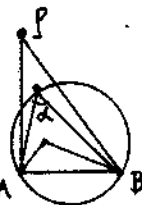
- $D > 0 \Rightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ
- $D = 0 \Rightarrow$ 重解をもつ
- $D < 0 \Rightarrow$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

例 2 $\triangle ABC$ におい

- $AB > AC \Rightarrow \angle C > \angle B$
- $AB = AC \Rightarrow \angle C = \angle B$
- $AB < AC \Rightarrow \angle C < \angle B$

例 3 直線 AB の上方に点 P がある。

- このとき
- $P: \text{円の外側にある} \Rightarrow \angle APB < \alpha$
 - $P: \text{円の周上にある} \Rightarrow \angle APB = \alpha$
 - $P: \text{円の内部にある} \Rightarrow \angle APB > \alpha$



「バサッ」



これらの例も、すべて「バサッ」と違えない。

(参考 「気まぐれ」 (Vol. 20, 15号))

南イタリアへ — ピタゴラスを訪ねて(3)

2泊で6400円のターラントのホテルをひきはらい駅に向かう。旧市街の入口でハムパンを購入。旧市街をぬけて、ナポリ橋の下で休憩。コーラを飲む。

ターラント → クロトンは 235km。ICのターラントはありがたし。

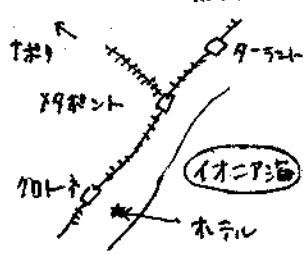
70トンとは今はクローネ (Crotone) という名前だが、クロトンという名前に親しみがあつた。クロトンと呼ぶ。駅についた。何もなし。タクシー2,3台停まっている。ガイドブックもないので本から出力した地図とスマホをたよりに歩く。ホテルからは「何時頃到着するのかわからせてほしい」というようなメッセージが入っていた。クロックは30時間を想定して、予定時刻を伝えておいた。それらしいところに着いたがわからぬ。ある建物のインターフォンを見たが、4Fにそのホテルの名前が書いてあった。押す。ロックがまいた。4Fまで歩く。中は暗い。受付には若い女性がいる。一応朝飯をたが、自分でとってモリモリ食べるシステムだ。普段は無人のようだ。

街に出る。ピタゴラス博物館 Museo di Pitagora を目指す。少しうつたが歩いていけるところだった。山とか丘とか、登ったところにある公園の中にあつた。3エロ。や、ピタゴラスに会えたという感だ。

建物は吹きぬけの2階建てである。まずピタゴラスのレリーフに出会う。肖像画のほか、学園で教えている風景もある。日本では見たことがない。長い通路に何本もある。天井からは

正多面体か形が下がる。ブロンズ像もある。何かコンサートをやる準備もしている。今夜来んのだろう。何人かが集まってる。

博物館裏の9Fにはパスカルの三角形のモニュメント。そこかと思つてピタゴラス三角形のモニュメントもある。眺めから見る感じのようになつて、人が乗れるよう



$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \quad 1 \\
 1 \quad 2 \quad 1 \\
 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
 \end{array}$$

パスカルの三角形



昨日ターラントからクロトンに向かう列車の中で、クロトンからナポリへ行く列車の予約をしようと思ったスマホをいじる。手帳なものがあつた。予約をした。したと思つたが、画面が凍ってしまった。カード番号は入れた...。どうなっているのだろう。不安。

どこの画面で「予約」したかわからない。たしか「ゲージルクラウド」に保存しますか? という画面まで覚えていた。そこで凍ってしまった。予約はとれているのか? とれていたら切符は?

翌日、切符の確認のため駅に向かう。3000歩。道はわかる。サッカー場があつた。どういふ、FCクローネというチームがある。

駅に着いた。駅員がいない。窓口はあいていない。まただ...。確認しようもない。お客は数人いる。列車がくれば駅員はくるだろう。待つ。とにかく待つ。窓口はあかない。乗客は自動券売機で買っている。幼い子と、駅員に相談したいのた。

列車が到着した。駅員が2人。タイミングを見て話しかける。英語。通じない。ホテルでイタリア語。所コトが通じたようだ。説明がむづかしい。そばにいた女の人が英語に翻訳してくれた。「切符はどこに?」「わからない」「どの会社で?」...

数学的帰納法は帰納法ではない

数列という分野で 数学的帰納法が登場する。これは証明方法の1つである。証明方法は 演繹法と帰納法がある。

演繹 deduction とは、普遍的命題から経験に頼らずに、論理の規則によりのみ結論を導く方法である。

帰納 induction とは、個々の経験やデータから、普遍的な命題を推し量る方法である。

● 数学的帰納法

$P(n)$ を自然数 n に対する命題とせよ。 $P(n)$ がすべての n に対して成り立つことを示すには 2 次を示せばよい。

(1) $P(1)$ が真である。

(2) $P(k)$ が真であると仮定すると $P(k+1)$ も真である。ここで k は任意の自然数。

(1), (2) より、

すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つ。

子供は泣くとお菓子を買ってもらえる



ウーーン

お菓子がほしいよー

子供が駄々をこねるとお菓子を買ってもらえる。スーパーに行くたびにそのような経験をする。「泣くとお菓子を買ってもらえる」という命題を発見する。100羽のカラスを観察したら黒かたのことから、「すべてのカラスは黒い」という命題を発見する。

自然科学 は、通常 ある命題を実験によって証明する。ニュートンは落下の運動を観察し、実験し、理論をつくり、古典力学を導いた。しかしのちに、それは否定され、拡張されたインシュタインの相対性理論となった。

一方、**数学** は、いくつかの前提から演繹的に導く。一連の演繹のプロセスを証明という。前提、証明が正しいならば結論がひっくり返ることはない。非ユークリッド幾何学はユークリッド幾何学を間違っていたからできたのではない、前提の一部を差しかえたため登場したのである。

数学的帰納法はパスカルがいわゆる「パスカルの三角形」の証明に用いたのがはじめてと言われる。1654年。(1623年, 1623~1662)

(141) $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \dots \textcircled{1}$

の証明:

(1) $n=1$ とし $(1(1))=1$, $(1(1)) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ によって成り立つ。

(2) $1+2+\dots+k = \frac{1}{2}k(k+1) \dots \textcircled{2}$ と

仮定し、 $1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \dots \textcircled{3}$ を示す。

$\textcircled{2}$ の両辺に $1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \textcircled{3}$ の両辺

(1), (2) より $\textcircled{1}$ が示せる

$\textcircled{3}$

$\textcircled{3}$ が成り立つ

[問題]

すべての自然数 n に対して

$$f(n) = n^2 + n + 41$$

は素数となることを示せ。

南イタリアへ — ピコガラスを訪ねて(4)

フロトンの駅。スマホで予約したのはどの切符はどこにいったのだろうか？ 日本語、英語、イタリア語が混りて説明する。フロトンからナポリへ向かう明日の列車の切符をしまったはずなのに確認してもらえませんか。チケットは程々買った。話がこみこみしているが、やはり通じたようだ。

「インターネットで購入したチケットの履歴書はどこですか？」

「ネットにダウンロードされたものが分かるのです」

「買わないでいいじゃない」

いろいろ考えた結果、再度(?) 購入することにした...

すると駅員は自動券売機を操作しはじめる。

「この列車どのですか？」

あぁ、おかしい、画面が動かかない

駅員はどこかに電話した。

「こわれた」

そんな...。それじゃ、困る。

「いつ直るんですか？」

「わからない。今日の夜か明日の朝に直るかどうか...」

そんなことがあるのか。ここは駅だ。

「では切符はどこで買えばいいのですか？」

「旅行会社がいい」

ここは駅だ。会社はどこにあるの...。

「旅行会社はどこにあるのですか？」

「車か？」

車は分からない。Taxiで行けという。どこに行っているかわからない。車を出る。するともう一人の駅員がやって来て、説明している。その人の車で行くことになった。ありがたい。

知らない道をぐるぐる。あやしいなと思うが...。交差点に着いた。信号待ちの間におぼろげに見え、周りを見ても旅行会社らしいのは見つからない。旅行会社の前を降りしてくれないかと思ったが...

うろろろ。あちろろろろ。こちろろろろ。おかしいところがあった。聞く。違う。旅行会社を知っていますか？ チケット。

「Carrelli書店の近くにある」

歩く。しかし、書店は見つからない。戻る。

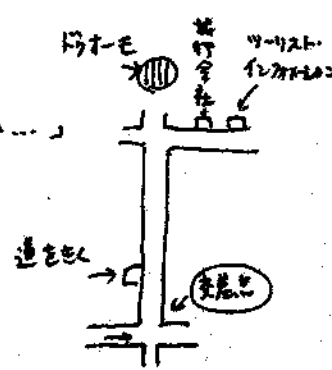
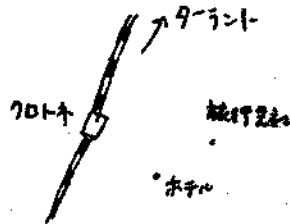
「すみません、地図を思い出しませんか？」

ドゥオモの近くで、そこを左に曲がるというが、手では右を指している...。ドゥオモを歩き、右に曲がる。ツーリスト インフォメーションがあった。これは助かる。

これは助かる。明日、ナポリへ行く列車の切符をしまった旨を伝える。バスはどうですか？ 列車との乗り換えがある。バスという手があったのか...。しかし時間が早すぎる。7時出発だ。チケットの地図もある。バス停をさがす不安がある。やはり列車にした。すると「すぐそばに旅行会社がある」と。他の人が、連れていってあげれば...と言っているようだ。

あった。これが旅行会社か。S先生のような御婦人がいた。事件を伝える。とれた！ やつとれた。カードが払おうとしたら、現金のみということだった。

ここまで長かった...。これでナポリに帰れる。



ここで問題です

以下の文を読みませい。

アミラーゼといふ酵素はグルコースがつながってできたデンプンを分解するが、同じグルコースからできていても、形が違えばセルロースは分解できない。

この文脈において、以下の文中の空欄にあてはまる最も適切なものを選択肢のうちから1つ選ばせよ。

グルコースからできているのは、デンプンと()である。

- ① セルロース
- ② アミラーゼ
- ③ 酵素
- ④ 形

答()

どうだろう。答えがわかったらどうか。

これは『AIに見けない子どもを育てる』(新井紀子)の中の問題の1つである。この本は前著『AI vs. 教科書が読めない子どもたち』の続編である。この本について「気まぐれ」(Vol.31 第1号)に載せた。

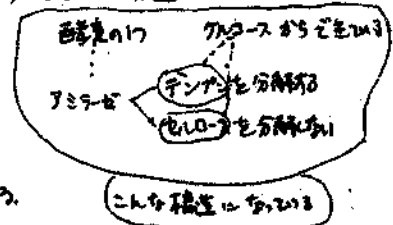
AIは数学で動いている。文章を入力しても意味がわかる反応ではない。人間にとって大切なことは意味がわかることだ。意味がわかるというのは(国語でも数学でも)同じ、読解力が必要。

上の問題は、いわゆるリーディング・スキル・テスト(RST)の1つである。単語のひたひたは介からなくても文章の中で説明されているので、それを構造としてとらえることができるからだ。

例えば次のことがわかる

- ・ アミラーゼは酵素の1つ
- ・ アミラーゼはデンプンを分解する
- ・ アミラーゼはセルロースを分解しない
- ・ デンプンやセルロースはグルコースがつながってできている。
- ・ デンプンとセルロースは形が違う。

S先生は生物は苦手だが、数学を学んだおかげで、文の構造が見えてきた。辞書で調べたら、グルコースとはブドウ糖 $C_6H_{12}O_6$ のことだった。



問題 次の中で数式はどれか?

- ① $3x$
- ② $2.5x$
- ③ $x^2 + 2x + 3 + x + 1$
- ④ \sqrt{x}
- ⑤ $\frac{1}{x}$
- ⑥ $\sqrt{2}$
- ⑦ $\frac{1}{2}$

前号の問題

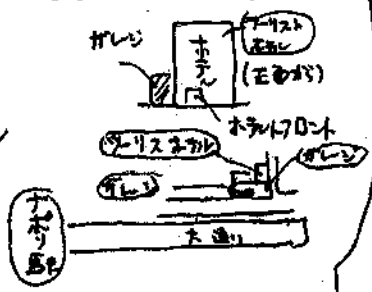
すべての自然数 n に対し $f(n) = n^2 + n + 41$ は素数となることを示せ。

④ この命題は偽であるを示せぬ。(反例 $n=41$)

訂正 前号で、右側下が訂正「条件を伝える」を「条件を伝える」に訂正して下さい。

ナポリの**ホテル前**に着いた。そこには Tourist Hotel というのがある。しかしここではない。
「何かお休みたいところがありますか？」

するとホテルの横のガレージを指し、ここだ、という。え？まさか…。
彼は電話してくれた。担当者が2人やってきた。1人ははいがめしい。もう1人は弱々しい。何かあってもこの男には勝てたろー。キャンセルしてこのホテルに泊まろうかなと思う。2人は駅前通りのガレージ。暗証番号を入力する。カギが動く。中庭があり、右の鍵持手の扉をカギをあける。暗い。中には、5センチ階段がある。中央の小をエレベーター。なんとか壁紙にいうようだ。(入ったここはいいけれど)降りたしころも暗い。どこかのスイッチを押す。一歩



のスイッチがついた。カーテンがある。そこがフロントにあたるようだ。4F。日本では5F。カードで支払いをしめると、5分と待って下をいって出た。しばらく待つ。エレベーターのドアが開いた。Tシャツを着た男が出てきた。ありむきをする。隣の部屋に男が夕飯を買ってきたようだ。泊まる人がいるんだ！と安心。

いけぬしい男が1人だけ来た。3300円。安い。朝食と午後の散歩のことも含む。朝食はここから持ってきて下を午後の散歩は、カギをガレージにおいて下をいって下さい。ガレージ入りの暗証番号の他に、鍵持手、エレベーター、部屋の大きさをカギを3つもたされた。

考えてみるとスマホは
「ホテルの到着時間を教えて下さい」

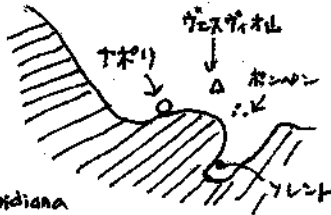
というメールが入っていた。少しおきおに連絡しておいた。早く着いたのと誰もいなかったのだから、部屋はない。クーラーはある。冷蔵庫はない。菓子パンのようなものを持って行って自分の部屋で朝食をとるといふシステムだ。

翌日は**ポンペイ**見学。ここまで来て行かない訳にはいかぬ。CV (ヴェスヴィオ開道鉄道 Circum Vesuviana) のナポリ駅から列車にのり、ソレント行きにのりと思っていたが、1つ前の列車に乗ってしまったので、途中から引き返す。改めてソレント行きに乗る。30分に(本位は30分)問題ない。しかし列車は本日は、ガタガタ、ガタガタ。坂をのぼるもゆるく。停頓して止まった。みんな降りている。

「日本人の方ですか？」

若い女の人。こちらに来て初めて聞く日本語だ。列車がこわれたので2番線から別の列車を出すので乗りかえて下さいとのこと。1997年のいわゆる日本語に感謝。

小原が降りてきたけれど観光客は多い。ポンペイは99年にヴェスヴィオ山の噴火で火山灰に埋もれた古代都市。当時のまき形態されたのが古代ローマの生活が垣間見える。発掘は今もつづいて、新たな発見もあるようだ。



その翌日は**ナポリ市内**を歩きまわると、7-11 (7-11) に乗る。トド広場からセンター街まで7-11。お土産は Villa Frondiana という公園。ナポリ市内が一望できる。穴場だ。人は少ない。穴場だ。地元民の散歩コースのようだ。

ナポリ大学。見学したいのですが」といって「合格してから」と言われた。冗言なのかな？
キャンセル料の印紙は違った。

10日。ナポリの空港からフランクフルトへ2時間。到着時間にはナポリとしてある。空港にアインシュタインの像があった。御自由にどうぞの標記が書いてある。日本人がふえたきた。フランクフルトから日本へ。通関機の席で、隣は日本人。奥には席が別になっている。彼は元大学教授。ドイツの史学、文学を研究し、子供がケルンにいたという。うらうら話す。ブログも開設していて、今回のドイツの旅についても載せている。

とちがいの列車の代金はカードから引かれていた。あー、一人旅はキビシイなあ。 (完)

整式とは何だ？

整式という用語が正式に登場するのは『数学I』においてである。そこには例えば

- $2a, -x^2$, 3 のように、数、文字およびそれらの積として表される式を単項式という。
- $3x^2 - 5x + 7$ のように、単項式の和として表される式を多項式という。
- 単項式と多項式を合わせて整式という。

と書かれている。

前号の問題を見よ

問題 次の中で整式はどれか？

- ① $3x$ ② $2.5x$ ③ $x^2 + 2x + 3 + x + 1$ ④ \sqrt{x} ⑤ $\frac{1}{x}$ ⑥ $\sqrt{2}$ ⑦ $\frac{1}{2}$

① ② ③ ④ ⑦

高い立場では -

高校では整式と多項式を区別している。しかし、大学からは、整式という言葉は使わずに、多項式と同じものとして扱っている。また、定数が1つのときは単項式である。区別すると

$$\begin{aligned} \text{単項式} + \text{単項式} &= \text{単項式} && \text{は、まちがひ} \\ \text{多項式} + \text{多項式} &= \text{多項式} && \text{は、まちがひ} \end{aligned} \quad \text{⑧}$$

となってしまう。高い立場では

$$\text{多項式} + \text{多項式} = \text{多項式} \quad \text{は、正しい} \quad \text{⑨}$$

といえるのである。おれに代わりの方がいいのでは？

よ！正式にいうと

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

(各 a_i は定数)

というのが1変数多項式である。(多項式 = polynomial)

おべこの a_i が 0 のときは零多項式と呼んでいる

整式という言葉は日本だけの言葉のようである。(『数学の小辞典』, 岩波ジュニア新書)

なお、教科書では係数について詳しく触れられていないが、みづうは実数を考えている。しかし、複素数でも有理数でもよい。一般には、 n 次方程式が解ける集合である。



問題 次の数を、歴史上古い順に並べよ。

- ① 正の整数 ② 0 ③ 負の整数 ④ 小数 ⑤ 分数 ⑥ 平方根

(『ガウスの謎』(鈴木智史) SB Creative)

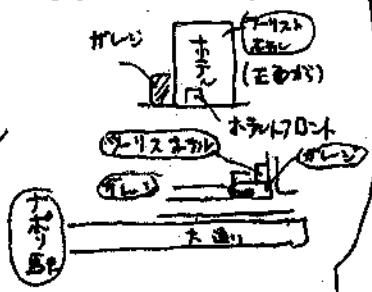
整式 { 単項式
多項式

整式 = 多項式

気まぐれ Vol. 32. 第 19 号
発行

ナポリの**ホテル前**に着いた。そこには Tourist Hotel というのがある。しかしここではない。
「何かお休みの予定はありますか？」

するとホテルの横のガレージを指し、ここだ、という。え？まさか…。
彼は電話してくれた。担当者が2人やってきた。1人ははいがめしい。もう1人は弱々しい。何かあってもこの男には勝てたろー。キャンセルしてこのホテルに泊まろうかなと思う。2人は駅前通りのガレージ。暗証番号を入力する。カギが動く。中庭があり、右の鍵持手の扉をカギをあける。暗い。中には、5センチ階段がある。中央の小窓をエレベーター。なんだか監獄にうようゆだ。(入ったことはいくらでも)降りたしころも暗い。どこかのスイッチを押す。一歩



の入りかづいた。カーテンがある。そこがフロントにあたるようだ。4F。日本では5F。カードで鍵をいれようとする。5分と待って下をいって出た。しばらく待つ。エレベーターのドアが開いた。Tシャツを着た男が出てきた。ありむきをする。隣の部屋に男が。夕飯を買ってきたようだ。泊まる人がいるんだ！と安心。

いけぬしい男が1人だけ来た。3330920。安心して安心。朝食と午後のアウトのこともせよ。朝食はここから持ってきて下を。午後のアウトは、カギをかかたーにおいでして下さい。ガレージ入りの暗証番号の他に、鍵持手、エレベーター、部屋の大きさをかかたーをうたされた。

考えてみるとスマホは
「ホテルの到着時間を教えて下さい」

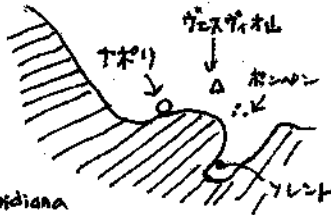
というメールが入っていた。少しおきおに連絡しておいた。早く着いたのと誰もいなかったのだから、部屋はない。クーラーはある。冷蔵庫はない。菓子パンのようなものを持って行って自分の部屋で朝食をとるといふシステムだ。

翌日は**ポンペイ**見学。ここまで来て行かない訳にはいかぬ。CV (ヴェスヴィオ火山鉄道 Circum Vesuviana) のナポリ駅から列車にのり、ソレント行きにのりと思っていたが、1つ前の列車に乗ってしまったので、途中から引き返す。改めてソレント行きに乗る。30分に(本位は30分)問題ない。しかし列車は本回、ガタガタ、ガタガタ。坂をのぼるもやけど。停車して止まった。みんな降りている。

「日本人の方ですか？」

若い女の人。こちらに来て初めて聞く日本語だ。列車がこわれたので2番線から別の列車を出すので乗りかえて下さいとのこと。1997年のうまい日本語に感激。

小森が降りてきた。しかし観光客は多い。ポンペイは99年にヴェスヴィオ山の噴火で火山灰に埋もれた古代都市。当時のまき形態されたのが古代ローマの生活が垣間見える。発掘は今もつづいて、新たな発見もあるようだ。



その翌日は**ナポリ市内**を歩きまわると。7-7ルカー (7-7ルカー) に乗る。トド広場からセンター街まで7-7ルカー。おれおれと Villa Frondiana という公園。ナポリ市内が一望できる。穴場だ。人は少ない。穴場だ。地元民の散歩コースのようだ。

ナポリ大学。見学したいのですが」といって「合格してから」と言われた。冗言なのか？
キャンセルしたのやめは違かた

10日。ナポリの空港からフランクフルトへ。2時間。到着時間にはナポリとしてある。空港にアインシュタインの像がある。御自由にどうぞの標記が書いてある。日本人がふえたきた。フランクフルトから日本へ。通訳者の席で、僕は日本人。奥には席が別になっている。僕は元大学教授。ドイツの史学、文学を研究し、子供がケルンにいたという。うちうら話す。ブログも開設して、今回のドイツの旅についても書かれている。

とちがいの列車の代金はカードから引かれていた。あー、一人旅はキビシイなあ。 (完)

ブラマグパタの公式って？

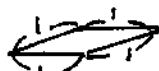
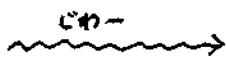
三角形の面積を求める公式はいろいろある。「(底辺)×(高さ)÷2」がもっとも有名だろう。これは、底辺の長さが高さが分かっているときの公式だ。

3辺の長さが分かっているときには、ヘロンの公式というものがあった。3辺が分かれば三角形は確定する。したがって、面積も確定するはず。

(ヘロン: ギリシアの数学者、Heron, 60年前後)

3辺ではなく4辺だったらどうなるか。それがブラマグパタの公式である。

しかし、4辺が分かっているときも面積は確定しない。例えば、4辺の長さがすべて1の正方形? 考えよう。



じわーとつぶしていくと面積は1より小さくなるがわかる。つまり、4辺の長さが与えられていても面積は決まらない。

そこで条件を1つ加える。円に内接するときはどうなるか。

sは周長の半分である。よって d=0 とすると四角形となり、三角形となり、ヘロンの公式に一致する。

(ブラマグパタ: インドの数学者 598~660? Brahmagupta.)

• ヘロンの公式

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

• ブラマグパタの公式

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

えーん



円に内接しない四角形では？

上では円に内接する...という条件をつけた。円に内接していないときも、角度に関する条件を加えると元の面積の公式もある。

右の公式で、よって円に内接するときは

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

となるので (このθ=0 となり)、ブラマグパタの公式になっている。

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos \theta}$$

インド人 — ブラマグアタを訪ねて (その1)

2014年の夏、S先生はひとりインドへ旅立った。

インドへは3回目である。1回目は1996年。コルカタ(カルカッタ)から入り、プダガヤ、ヴァラナシ(バナレス)、デリー、アグラを訪ねた。2回目は2003年。数学者ラマヌジャンを訪ねて、チエンタイ(マドラス)からバスの旅をし、ボンベイ(ムンバイ)、クンバコナムへ行ってきた。まだ考けるうちにと思い、3回目の挑戦となった。ブラマグアタ中りのウッジャインを訪ねることを目的とし、その後の発展のインドを見たいと思った。その意味でバンガロールも行きをたがったが、余りに広い国なのでそれは諦めた。

目指すはムンバイ(ボンバイ)。到着は寝たのどホテルは予約しておいた。また、空港からホテルまでTaxiを予約しておいた。コルカタでもタクシーにのりこもトラベルがあったので、今回は予約した。グリーンカードでもへんたすに連れていかれるのは常識のようだ。

タクシーといっても7ゴン車のような感じ。なぜか2人乗る。1時間くらい乗った。バスはない。着いたホテルはホロかった。70+は2階で、1階の何も無い所の奥の階段を上った。何となくいすすかしい。とりあえずゆっくりした。

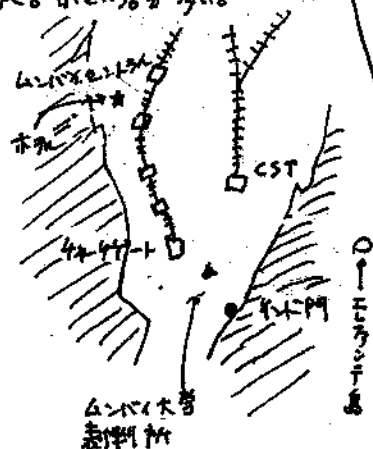
翌日。バリエーションは車庫はBoxed Breakfastと書いてあったので、廊下に出て、そこにいた人に頼む。V5さんのおムレツとコーヒーだった。なぜか40+90(ルピー)にサイン? 金持ちなのではなかったのか? フォントとそれをいって、No problem!。(1ルピー=1.7円)

3つ歩きにしていた。とりあえず(ムンバイ・セントラル)まで歩く。途中で何回か聞いた。30分位かかったか? 降りた方が分かるにしろいけないので、ぬかり月は写真にしてみた。長距離列車と短距離列車ではホームが分かるといふ。ホームのすぐそばにはスラムがある。列車からは人がはみ出している。ドアがあるが、あけておいた方が涼しいのでやっているのだ。落ちないだろうかと。落ちても1-70プロム。売店と時刻表を買った。長距離列車の時刻表が掲載されているので写真にしてみた。うろと男が並ぶいてきた。「切符売り場はここにあり」と言って誘導する。何となくあやしいが行ってみる。確かに、扉の外に立った。しかし、次にどこにいくかも決めていないので当然ながら買わない。

4-4ゲートまで乗った。5ルピー。ドア全開。インド門を目指して歩く。途中、裁判所の前で女子高校生に声をかけられた。スマホをもちいて写真を撮って下ると。何やら別行動をしようとした。自分もどてもらった。インド門は近いけれど遠かった。何回か道に迷った。雨が降っている。スジュール。次に(4-4ゲート・シガー・ターミナル)まで歩く。小さい店が多い。

この駅は世界遺産になっている。(CST駅)
このCST駅の近くのコーヒー専門店に入った。コーヒー息が。7-7-7と書いてある。今後のことを考える。100ルピーは高いが、それだけの価値はあった。
4-4ゲート駅まで降り、列車で再びムンバイ・セントラル駅へ歩いてホテルへもどる。道すがらホテルもどった。ホテル前のロータリーの植木に、大量のオアシスとくらべていた。

明日の予定。ウッジャインまでの切符をとることに、エシワラキ島へいくこと。



ゼロとブラマゴ

ものを数えるには「1, 2, 3...」という言葉があればよかった。しかし、「何もない」ことを表すにはまだまだ時間の経過が必要だった。

ブラマゴの書籍『ブラマゴ・スマ・シマゴ』には、ゼロの計算の規則が書かれている。現代の言葉でかけば

- $a > 0$ または $a < 0$ のとき, $a + 0 = a$
- $a > 0$ または $a < 0$ のとき, $a - 0 = a$
- $a > 0$ または $a < 0$ のとき, $a \times 0 = 0$
- $0 \times 0 = 0$
- $a > 0$ または $a < 0$ のとき, $a \div 0 = \frac{a}{0}$

30年代

これは
248頁

バビロニアで欠位を表すゼロが生まれたのは紀元前と言われる。インドもその頃はゼロはなかったといわれている。しかし、計算対象となる立派な数と認識されたのはブラマゴの頃からである。

ゼロ(零)は、インドでシュニヤ (śūnya, 空) と呼ばれ、はじめは点であった。0の形がはじめて表されたのは876年といわれている。インドのジャイールの東200キロのところにある成蹊都市ブハラリールに送られたる写本に添った文の中には、50と270があったという。1881年北西インド写本が見つけた。

2次方程式とブラマゴ

2次方程式の解の公式はよく知られている。初めて導いたのはブラマゴといわれている。(578~660)

一例として、 $x^2 - 10x = -9$ の解法をあげている。そこでは $x = 9$ を導いている。現代のことは右のようになる。

しかし、ずっとしてからバスカラ(1114~1185)は複数の解について言及している。アイデアは平方完成である。

方程式 $x^2 - 45x = 250$ の解としてバスカラは

$x = 50$ と -5 を与えている。そもそもギリシアの数学では負の数や0の考えはなかった。

$ax^2 + bx = c$ の解

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

(『数学史』(成俔良一), 『かつ数学の歴史』, 『バヤ-数学の歴史』, 『数と数学記号の歴史』(久米真一, 片野善一郎) などを参照)

インド人 — グラマグラマを訪ねて (その2)

ムンバイの同じホテル。朝食はオムレツとコーヒー。食事は大小の7オウガ2つ。その後はナイト・スナック。

9時すぎにホテルを出て、ムンバイセントラル駅へ。列車の手続をしたらヒンズーガキビシム。切符売り場は鎌倉もた警官。買い方がわからない。まず自分に書くらしい。書いて窓口へ。2枚と割りこみ。うしろに並んでいる人はビョウとくっついている。あとで思うと、割りこみとれなかったためかもしれない。窓口が高く、声も小さい。よくわからない。waiting numberをよきとる。これが何分わからない。どこかに表示があるのかと思えば見当が何もない。他の窓口へ行くと、「あつた」。また並ぶ。1時間以上いたが進展なし。

仕方がないので、別の駅に行くとそこを通過する。するに昨日の男。「これはインド人専用の窓口。ツリストは別にある。100ルピーで案内する」彼は(タクシ)の運転手だった。ウツシムは行かないかもしれない...と不安になっていたの、乗ってしまった。たしかにこの駅はツリストに対応していない。案内をしてくれたかもしれない。ツリストは見かけない。着いたのは、切符売り場でなく、旅行会社だった。一駅違った。入口の扉をむくとおいた。切符がとれた！インターネットである。

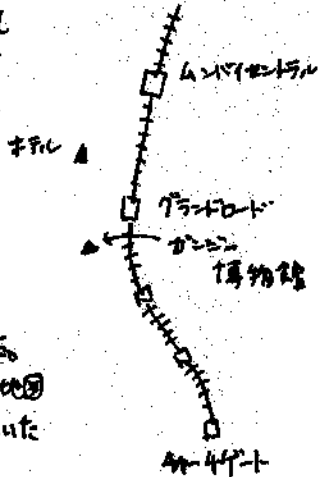
ムンバイセントラル → ヲツジャン (エフオン、舞台)

手紙料は任意。銀紙証を出したら。「そのまじはヒンズー?」大丈夫なので、ムンバイ→ムンバイと似た。(non AC、舞台)にした。ドルをルピーに両替した。やれやれ。再びかかとこが 運転手少 約 40ドルと叫ぶ。兄が来た。ドルを見たのがまずかった。7ルピー来た。「切符をヒンズーにあげた人だ」といふ。たしかに助かった。「借りている車にお金が足りません」と30ドルほど降りた。切符がとれて安心したためかもしれない。どこかに連れていかれるかもしれない...高い97を一代たうた。電車をとったので腹もかかした。

97を下りた。駅がわからず。少年に聞いた。「あつた」「いや、こっち」歩いていくと、「こっち」と言う。ついてきたようだ。曲がると、突然、「バクレーン」を止める人1人が思の座りこみ、S先生の右足をかす。ひきをおそうとする。3人組に驚かされるのは小乗れでるので引かれた。ナツツガシをぬかしているのか。両肩にかけつけてよめた。通りかかった人が手助けしてくれた。3人の少年は10才くらいか。1人は背が高かった。

それは4-4ゲート駅の近くだ。近所のマイダン公園でバズル。食べ物がと思った。バズルはあつた人が少ない。ここで驚かされた。逃げ場がない。と思えば老夫婦が電車をとってゆくと又ホを差し出す。S先生もどてもらった。

- 「どこから来たのですか?」
- 「日本です」
- 「あなたをどうして?」
- 「コルカタです」



多分5分ほど人たうた。 (2人で1人) 翌日、大雨。列車に乗る前に、ガズン博物館に11:00と思つた。407外。荷物手付した。ガズン博物館は道のた。又木の地図は役に立た。外は大雨。ここはガズンが活動の拠点と化したところだ。はじめツリストを見た。

ホテルにもどつておれしようとしたら、リュックがびりびりした。横が裂けてしまった。リュックをゴロゴロこぼしながら、中身が出た。かどうか見ながら歩き。途中でリュックを売っている店は全くな。車を止める。

4-4ゲート駅の方少し近代的なので、立ち入る。駅前の古い屋に入った。旅行用のリュックはなかった。紹介してくれた店に行つて、リュックを見繕う。リュックではなかった。

気まぐれ

△ロン, グラマグマ, そして次は?

3辺の長さを a, b, c が決まっていれば 三角形は確定し、面積 S は a, b, c の式で表すことができる。それが△ロンの公式だ。(乃12号参照)

4辺の長さを a, b, c, d が決まっていれば 四角形は確定しない。「円に内接する」という条件が加われば面積は確定する。それがグラマグマの公式であった。

となると5辺の長さの場合にはどうか——という疑問が生じる。S先生に問いかけたのは生物のI先生である。


考えてみようかと思った。

しかし、どこか頭の隅隅に記憶があった。調べてみると次のような定理があった。

定理 $n \geq 5$ を満たすどの n に対して、円に内接する n 角形の面積を、四則演算と n 乗根をとる操作を通して辺の長さで表現する一般の公式は存在しない。


五角形以上ではこのような公式はないという定理である。5辺の長さを a, b, c, d, e である五角形が円に内接しているとする。この a, b, c, d, e に $+$, $-$, \times , \div , $\sqrt{\quad}$ などの操作をして面積 S を求める式をつくらうとしてもできないという主張である。

●△ロンの公式



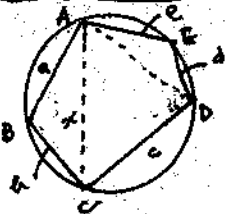
面積 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
ただし、 $s = \frac{a+b+c}{2}$
(周長の半分)

●グラマグマの公式



面積 $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
ただし、 $s = \frac{a+b+c+d}{2}$
(周長の半分)

証明のアイデア?

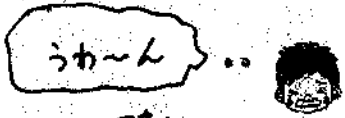


a, b, c, d, e が与えられた。補助的に x を用いて、補助的に x を用いて、 θ と $\pi - \theta$ を用いて。
 $S = S_1 + S_2$ ($S_1 = \triangle ABC$, $S_2 =$ 四角形 $ACDE$)

$\rightarrow S$ と x の関係式が得られる。 $\rightarrow S$ は x の 4 次式

\rightarrow 4 次方程式には解の公式がある $\rightarrow x$ が上の範囲でなければ S もと付く。(必ず+) \rightarrow ところが、 x は必ずしも正である。

2014年10月31日 乃12号
「1, 1, 2, 3, 4 とすると $8x^3 + 81x^2 + 200x - 114x^2 - 864x - 723 = 0$ となり、
カオI先生を計算すると、非可解群となる」
(「△ロンとカオI」(数学通信 2009.11)。なおカオIは 2007 年である)



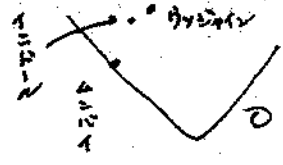
ツルギ!

わかちあひ
いひあひ

ムンバイ **セントラル** 駅。国境まで プラマグアタまでの ウツジイン。切符がとれているとは思わず、たまたまのこぼれかきと不安になる。そのときはどこに泊まるのか？ 馬車時刻表を見購入した。こぼれ乗るはずの列車は確かにある。早めにホームへ。列車の中乗客の名前が書かれた紙 (クイーターで打ち出されたままの紙) が張られている。あった！ どうやら乗れそうだ。外は大層。

旅に出る前から不吉な予感がしていた。旅立ちの10日前にサイフを落した。自動車車でスーパーに向かう途中盗まれたらしい。行方不明にたりにも見つからない。交番に届ける。クレジットカードを見許証も入っている。ひとつひとつの停止のテレビを見る。再発行まで時間がかかるといふ。すわテレビあり。警察がた見つかるといふ。本当にありがたかった。そのまま戻ってきた。また、右手の小指がささくやけどでいて、1週間おいたらうんでしまった。医者に行った。

さて、**列車**は3段の寝台。S 又はは中段。上に若い女の人。彼女がウツジインへ行くという。エンジンという。聞くと、コンピュターエンジンであった。6人の寝台は満席だ。毛布はあがるがシーツはぬい。カーテンも閉。夜中、カーテンが鳴った。まさか自分まで X-マールと思わなかった。4つ。3つは乗る。どこか何とかな... といっている。インドルから右。1つは日本からロマ字。折り返し電話する。何と、先日日本にテレビしたのがカードで引せおとせぬいど停止すると。あせった。再発行が早にあるカードもあつたので切り替えてもらった。小電灯で、寝ぼけになりながらの操作である。ウツジインの近くのインドルからの X-マールについて聞いてみると、「何もいかに大丈夫です」と。あつて落ちたときに見てみると、「インドルへようこそ」というマールだ。朝、テレビに行つた。インド式だつた。アツシは忘れた。

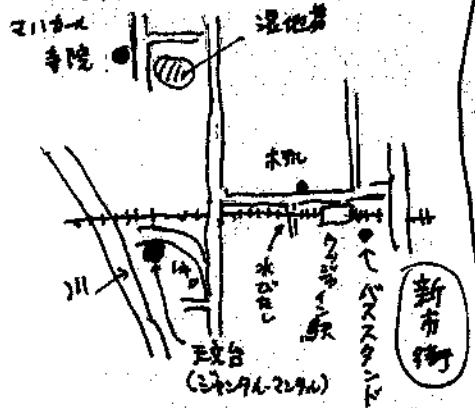


ウツジインに着いた。どしどし。馬車前はしゃばい。

「どこに泊まるのか?」「タキシは?」「ホテルは?」

としつこい。地理を知りたいなら馬車でドンドン歩く。どこにホテルはないか。2つ目で泊まった。プラマグアタは、ここ Utsujin の近くで生まれ、ウツジインで暮らしていた。そこにあった天文台の台長をしていた。今も天文台がある。おそろく当時の日は違うであろう。

ホテルで一息ついてから**天文台**に向かう。ゲルマップを印刷してきたの方向はわかる。道路の下へ連絡通路は水がたし。陸橋を渡る。途中、2,3回道を聞く。泥がたけ、水がたして前の中を歩くのはつらい。天文台 (ジャンタルマンタル) に着いた。比較的こじんまりしている。真中には川が流れていてウツジインは観光地ではなく、ヒンドゥ教の巡礼地である。ここは1934年につくられた。ホテル前の屋台でサモサとカレー。



聖地 地下の食堂で蕎麦とストロベリー。

聖地マハカール寺院に何かが。今日も雨。線路沿い。橋の下を歩く。この辺はスラムか? 道に迷ふ交通に出た。看板があったので指示に従うと湿地帯に出た。道の中を歩く。サンダルだ。何かマハカール寺院に付いたが、中には入らなかつた。近しの寺院をいくつか見てホテルへ。一休み。客屋の窓には何かセリカタリカタリかかっている。ウツジインの町中をひととおり歩く。人は多い。牛も歩いてる。象も歩いてる。ほりにおい。のどが痛くなる。口をふくと鼻がつかう。

ウツジインはヒンドゥ教の7大聖地の1つとして知られる。日本の本には載っていない。ネット、インド政府観光局、コンパニオンなど情報を入れた。

コーシー・シュワルツの不等式を味わう

不等式といえば相加・相乗の関係が有名だ。その次くらいによく知られているのが、コーシー・シュワルツの不等式だろう。

コーシーとシュワルツは 2 人の名前だ。

証明する方法は何通りがあるが、もっとも初等的なのは

$$(ax+b)(cx+d) \geq 0$$

を示すことだろう。

それを整理しなおすと次のようになる

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

これを、ブラスグアタの二平方小恒等式という。

- コーシー・シュワルツの不等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$$

こんなところに ブラスグアタの名前が...



ベクトルで表現してみよう

突然だが、コーシー・シュワルツの不等式 をベクトルで表現してみよう。

$$\vec{p} = (a, b), \vec{q} = (c, d)$$

とすると、 $|\vec{p}|^2 = a^2+b^2$, $|\vec{q}|^2 = c^2+d^2$, $\vec{p} \cdot \vec{q} = ac+bd$ なのぞ、

$$\text{コーシー・シュワルツの不等式} \Leftrightarrow |\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 \geq (\vec{p} \cdot \vec{q})^2$$

となる。何ということはない。内積 $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \theta$ からみれば当然の不等式だ。

さらに、ブラスグアタの二平方小恒等式も次のようにかける。

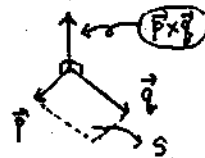
$$\text{ブラスグアタの二平方小恒等式} \Leftrightarrow |\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 = (\vec{p} \cdot \vec{q})^2 + |\vec{p} \times \vec{q}|^2$$

$$= (|\vec{p}| |\vec{q}| \cos \theta)^2 + (|\vec{p}| |\vec{q}| \sin \theta)^2$$

ここで、 $\vec{p} \times \vec{q}$ は、 \vec{p} と \vec{q} の外積と呼ばれるベクトルである。

\vec{p}, \vec{q} に対し、 $\vec{p} \times \vec{q}$ は図のような向きである。大きさは図の平行四辺形の面積 S と定められた。

(これは高倉の『数Bの教科書』参照)



整理でき

なお、ブラスグアタの二平方小恒等式の拡張をラグランジュの小恒等式という。

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) = \sum_{k=1}^n (a_k b_k)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$



(ワジメイン)からジャイプールへはエアコンの寝台をとっている。そのはず。時間がある
のでエアコンの時間を遅くした。外は雨。馬車のすぐ横のバスターミナルを抜けて、新市
街(?)へ行って来た。バーカーがあったので、夜行の左側とていつか買った。出るたびに
後ろにのびるバーカーは高級店。馬前でキイ。

乗る列車は 23:20 となっている。ジャイプールまで 772キロ。ナガール発なので、乗る車両が
見つかるか不安だ。ホテルにすうというので馬車のホームまで入るをみている。ホームでは人々は
毛布(?)をしいて寝ている。蚊がやってくる。蚊取りスプレーを出す。Yモをきいていて
隣の老婦人が話しかけてくる。リタイヤした銀行員が来た。時々車窓名簿を見に行く。一人分の
荷物をもて動く。あった! どうやら乗れそうだ。ふと馬車と婦人がホームの端に行き止まり
用足したらし、スリッパした履き(?)もどって来た。少年たちもしている。牛も歩いている。
列車は早急に到着。というより、自分は出発時刻に乗りかかっていた。乗る車両を何とか見つけた
例によると、コンゴから打ち出されたままのダブルパーパーが列車にはさみれている。列車に乗り込んだ!

何と、予約したところにはもう人が寝ていた!

何でもありのインドだが、これは困る。近くにいた客者と予約した席を確認する。すると

「レディがすでに寝ているのでこちらはどうぞ」

訳がわからない。隣のコンパートメントへいって、若い人たちが大騒いだ。気がつくとその輪の中心
にいた娘はこの闇入者(?)に興味津々。

「どこから来たの」「どこへ行くの」「お父さんは?」「インドは好きか」

「娘が自分のアヤシ」「ここからジャイプールへ行く」「お父さん家族」そうして隣のコンパートメントが
2人。「自分の父と母です」なぜか握手。2時間くらい話していると、アヤシが「どう
ぞ寝たいのではありませんか?」適当な口を返した。

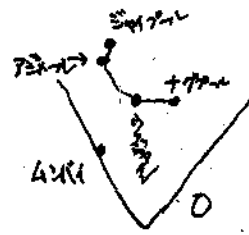
寒い。他の人は毛布をかかっている。寒からず風が、クーラーが寒い。自分の毛布中
はないかなあ。シーツは多い。カーテンもない。おりに寒いのでジャパーを出してかけた。

車中、どこかの馬車らしい。何人か列車を降りて、ホームで何かを食べている。S先生も朝食
として柿の種を食べた。アヤシがやって来た。Good morning. 気をつかうてくれている。これは
どうぞ—という食べものを差し出す。もうおなかがいっぱいです—と断った。悲しい顔をして
いばり出して—。目の前のミットの男たちが、おなかがいっぱいでも差し出す。娘はイスラムの人のようだ。
服装は2424だが、男からイスラムの男。アヤシは今目だけ出して寒い服に身をつつまづ
おばさんが一太郎のおばさんだ。強引に鉄血に朝飯をおいてS先生のひざに。おなかがいっぱい。
あったりしておいしい。おかわりも強引に。折角出たんだから忘れずに美味しく食べてほしい。
娘もS先生も又水で果物をとった。アヤシに着いた

Ajmerはムスリムを祀る寺院にとって重要な土地の
ようだ。ジャイプールに着いた娘は、娘がこぼれに干屋をこぼ
りれた。もしかしたら大隈のおばさんがあのLadyだったのかも知れない。
しばらくすると娘が少年がやって来た。何でもありのインドだ。

ジャイプールに着いた。雨。おと前。駅前はおトリアキだ。ササ
ワジメインと同じだ。ガレキにあるホテルを指し示す。水た
まりを歩く。交差点も水没。車は左側通行なので日本人には
耳が痛がる。信号なし。警官、警察、悪臭、雨、泥水の中を歩く。何とか泊まった。トラブルデ
が入っているのでもこにいた。トラブルはイヤだ。

早速、「ジャイプール → デー」の切符をとった。インドでは1日1つでなければいけない。
今日の仕事は終わった。



ピタゴラス数の一般解は？

ピタゴラス数とは、3, 4, 5 あるいは 5, 12, 13 などのように、直角三角形の辺の長さとなりうるような 3 つの自然数の組のことである。

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2$$



これ以外にどんなものがあろうか？

じつは、一般解がわかってる。

右の図で、 m, n にいろいろな数を代入してみよう。

$$m=2, n=1 \rightsquigarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$m=3, n=1 \rightsquigarrow 8^2 + 6^2 = 10^2 \text{ (上と同じ)}$$

$$m=4, n=1 \rightsquigarrow 15^2 + 8^2 = 17^2$$

$$m=3, n=2 \rightsquigarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$$

見たことのある組 (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) が出てくる。これもブラマブブが考えた。(『数学史の(武隈良一)』)

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (a, b, c: \text{自然数})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m^2 - n^2 \\ b = 2mn \\ c = m^2 + n^2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} m, n: \text{自然数} \\ m > n \end{array} \right)$$

不定方程式とは？

不定方程式とは一般に $2x + 3y = 1$ のように解が不定の方程式であるが、よく「整数」とか「自然数」という条件をつけたものをとずこが多い。これをディオファントス方程式ともいう。

ところで「整数」の分野がここのセンター試験から出題される。

$2x + 3y = 1$ の解は右に載せておいた。

ブラマブブは不定方程式

$$137x + 10 = 6y$$

を何れとして解き方を示している。

(『カッ 数学の歴史の』)

これは 1 次の不定方程式であるが、

ブラマブブは 2 次の不定方程式も扱っている。

また三角関数についての仕事もある。ほとんどが天文学から派生した問題のようだ。

(上の解答: $x = 60n + 10, y = 137n + 23$)

$$x = 6n + 1, \quad y = 137n + 93$$

● $2x + 3y = 1$ の整数解を求めよ

カンで $x=2, y=-1$ を見つけ

$$2x + 3y = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2 \cdot 2 + 3(-1) = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$2(x-2) + 3(y+1) = 0$$

$$2(x-2) = -3(y+1)$$

2 と 3 は互いに素だから

$$x-2 = 3n$$

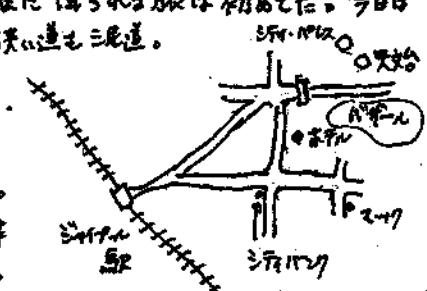
$$y+1 = -2n \quad (n \text{ は整数})$$

とあわせる。

$$\text{よって, } \begin{cases} x = 3n + 2 \\ y = -2n + 1 \end{cases} \quad (n: \text{整数})$$

インドへーグラマゲイターを訪ねて (その5)

シムラの朝。暴風雨である。雷も鳴っている。こんなに降られる旅は初めてだ。今日は天文台に行けばいいか。どしどし雨のどきどき。ホテル前の道を混雑。舗装はどこもない。サンダルである。天文台近く日本人らしい女の人が多いようだ。

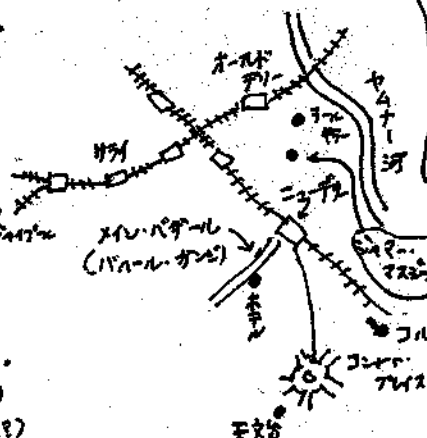


「日本人ですか?」「No, Chinese.」天文台の場所をきくと、おどろかした。人は少ない。200ルピー。この天文台はとこ広い。1728年につくられ、1901年に修復。日本人の男にあった。彼はデリーから回ってきた。先月年々木の3年生。海パンであった。それはいい。そんな方法は気がつかなかった。見学のうち駅までオートリキシャでいく。駅の構造を把握。そのあと再びグラブラ歩いてマウハ。入口にはやはり物置がある。入口には警官も。マウハ高級宿舎の前の歩道にサンダルがこぼれた。

夜中に急に寒くなった。まじい。「おどろか」で覚めた。シムラの上には海パンをはいた。シムラに着いた。おどろかしたとては天文台だ。インドの雨にやられたのかもしれない。

望日 6時シムラ発の列車(シムラデリー)でデリーへ 300キロあり。隣の席は親子。何と子連れをいかにかええているのか。おかげでが笑う。着いたのはニューデリー駅ではなく、手前のグライ駅。その駅の10分前にも停車していたが、そこはスラムだった。線路沿いはゴミの山。グライ駅からニューデリー駅まで列車でいこうとしたが、何人かにとくとオートリキシャでいけという。駅前では雨は降っている。

デリー 駅について。まあまあ大雨。しばらく構内には小降りになったのをみて町中へ。メインバザールに宿をとった。一泊1200ルピー。まあ、いいだろう。最後のホテルだ。



ほいちの。サンダルと水。ホテル前の店にサンダルを売っている。150ルピー。どうやら160ルピーを出したらいい。10ルピーも出さなかった。こんなことは初めてだ。コート・プレイスと天文台へ。全部歩いて。コート・プレイスは代々木風の雰囲気のある町だ。スラムもマウハもある。天文台はウヂヤーンのエリアだが、シムラのように小さい。

望日 デリー。マズットへ。旧市街にある巨大モスクである。ニューデリー駅をこえて歩いていったが道をまちがえて思ったより遠く分かった。観光地であった。ツアの日本人らしい夫婦(?)が出てくる。観光地であった。「暑いでは、」「雨が止み材料とそれとよ、」「大雨はダメで、おどろかしたものを借りなくちゃ」雲間を見ながら味わった。

ニューデリーは2回目なのでおどろかした見えない。以前泊まった100ルピーのホテルもあった。いよいよ帰国となる。空港へはタクシーで行った。なせか途中で1人分のリンゴを盗った。途中で降りたと思ったら、別の人が乗ってきた。空港まで。タクシー? そんなことあり? これはインドなのだ。

空港で時間をつぶしている。日本人の親子。女2人だけのツア-だと言う。また、何ヶ月かに訪ねると日本人のおばさんが親しそうに話を聞いてくれた。ゴルカでのマウハの家に泊ろうという。行って来た。ナースだ。おどろかした。おばさんかと思ったが、自分のおばさんだ。

インド 何だかありだ。どこでもトイレ。4リキシャ(使わず)各車。あと警官。車輪はなし。100ルピー5人乗り。トイレの洗面所からは流水が流れてきた。ホテルに10ドルの現金は少し足りない。おどろかした。おどろかした。高いものは食べ物が下痢はしなかった。帰る時、H先生とN先生にマウハへ帰国してまだ3ヶ月なのに妙になつかしい気がする。(完)