ピタゴラス数を探し出す

$A^2+B^2=C^2$　直角三角形を表すピタゴラスの定理で、A,B,C の 3 数すべてが整数であるのをピタゴラス数という。

ここで、A を奇数、B を偶数、そして A,B は共約数を持たない、としよう。

1. A 値を基準にピタゴラス数を並べる

   $A^2=C^2-B^2=(C-B)(C+B)$の式より

   $3^2=1 \times 9$ であるから C -B＝1，C+B＝9 として、C＝5，B＝4 が求められる（3，4，5）と表記する。以下同様にして、

   $5^2=1 \times 25$ より　C—B＝1，C+B＝25　　（5，12，13）

   $7^2=1 \times 49$　　C—B＝1，C+B＝49　　（7，24、25）

   $9^2=1 \times 81$　　C—B＝1，C+B＝81　　（9，40、41）

   9 は 3^2であるから（3，4，5）より、共約数 3 を含む（9，12，15）もある。

   $11^2=1 \times 121$　　C—B＝1，C+B＝121　　（11，60、61）

   $13^2=1 \times 169$　　C—B＝1，C+B＝169　　（13，84，85）

   $15^2=1 \times 225=9 \times 25$　より 2 解、

   　　C—B＝1、C+B＝225　　（15，112，113）

   　　C—B＝9，C＋B＝25　　（15，8，17）が得られ、

   共約数を含む（15、20，25）（15，36，39）もあること勿論である。

   $17^2=1 \times 289$　　C－B＝1，C+B＝289　　（17，144，145）

   $19^2=1 \times 361$　　C—B＝1，C+B＝361　　（19，180、181）

   このようにして、A≧3 の全奇数でピタゴラス数を見いだせる。

   3 素数の積、105＝3x5x7 では

   $105^2=1 \times 11025=9 \times 1225=25 \times 441=49 \times 225$ より

   （105，5512，5513）（105，608，617）（105，208，233）（105，88，137）

   が得られ、また共約数 3，5，7，15，21，35 を含む 9 例のピタゴラス数もある。

2. 直方体のピタゴラス数

   直方体の側面の三つの対角線全部の長さが整数であるもの、三辺 A, B, C として

   $A^2+B^2=E^2$、$B^2+C^2=F^2$、$C^2+A^2=G^2$総てが整数であるもの、オイラーが発見したといわれるのが（117，240，267）（240，44、244）（44，117，125）である。

   この解は $A=117=3^2 \times 13$ のピタゴラス数、3，9，13，39 の共約数あるもの（ゴシック表示）を含めて

   （117，6844，6845）（117、44，125）**（117、156，195）（117，520，533）**

   （117，756，765）（117，2280，2283）（117，240，267） より（44，240，244）を見

出したのであろう。同様にして

A=187＝11･17 より　（187，1020、1037）（1020，1584，1884）（1584，187，1595）

A=195＝3・5･13 より（195，748，773）（748，6336，6380）（6336，195，6339）

A=275＝5^2・11 より　（275，240，365）（240，252，348）（252，275，373）

と得られる。A≦1000 の範囲であと幾つ見つかるだろうか。

竹内淳実記 2020．11．25