ロピタルの定理を巡って

数学月間企画講演会（第 16 回）

東京大学（駒場）数理科学研究科棟

大山 陽介　（徳島大学）

2025 年 10 月 5 日

QR コードからこの講演のスライドを見ることができます

https://researchmap.jp/painleve/presentations/50874879

ロピタルの定理

$f(x), g(x)$ が区間 (a, b) で微分可能とする。
$a < c < b$ となる c に対して $\lim_{x \to c} f(x) = 0$, $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ かつ $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在し、さらに c の近傍 $(\neq c)$ において $g'(x) \neq 0$ が成り立つならば

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ロピタルの定理は受験生・大学生に好まれて、入試に使っていいかどうかよく話題になる

ここでは試験などの話は触れないで、ロピタルの定理もしくはロピタル本人について語る

コーシーの平均値の定理

関数 $g(x)$，$h(x)$ を閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとし，$h(a) \neq h(b)$ さらに，$g'(x)$ と $h'(x)$ は開区間 $(a,\ b)$ で同時には 0 とならないものとします。このとき，次のことが成り立ちます。

コーシーの平均値の定理

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(c)}{h'(c)} \qquad (a<c<b)$$

となる c が存在する。

ロピタルの定理

コーシーの平均値の定理において，$g(a)=h(a)=0$ の場合は

$$\frac{g(b)}{h(b)}=\frac{g'(c)}{h'(c)} \qquad (a<c<b)$$

となる c が存在することになります。ここで，$b \to a$ となるとき $c \to a$ となることから，次のことが成り立ちます。

ロピタルの定理

$$g(a)=h(a)=0 \text{ のとき } \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)}$$

高校では発展でしか扱ってない
実教の現行の版では扱っていない
東京書籍や啓林館でも扱いがある

7 実教数Ⅲ 303
数学Ⅲ
平成24年 3 月 6 日 検定済
平成25年 1 月20日 印刷
平成25年 1 月25日 発行
©著作者 岡本和夫
ほか 10 名（別記）
●発行者 実教出版株式会社
代表者 戸塚雄弐
東京都千代田区五番町 5
●発行所 実教出版株式会社
〒102-8377 東京都千代田区五番町 5
電話（営業）(03)3238-7777
（編修）(03)3238-7788
（総務）(03)3238-7700

2. ギヨーム・ド・ロピタルについて

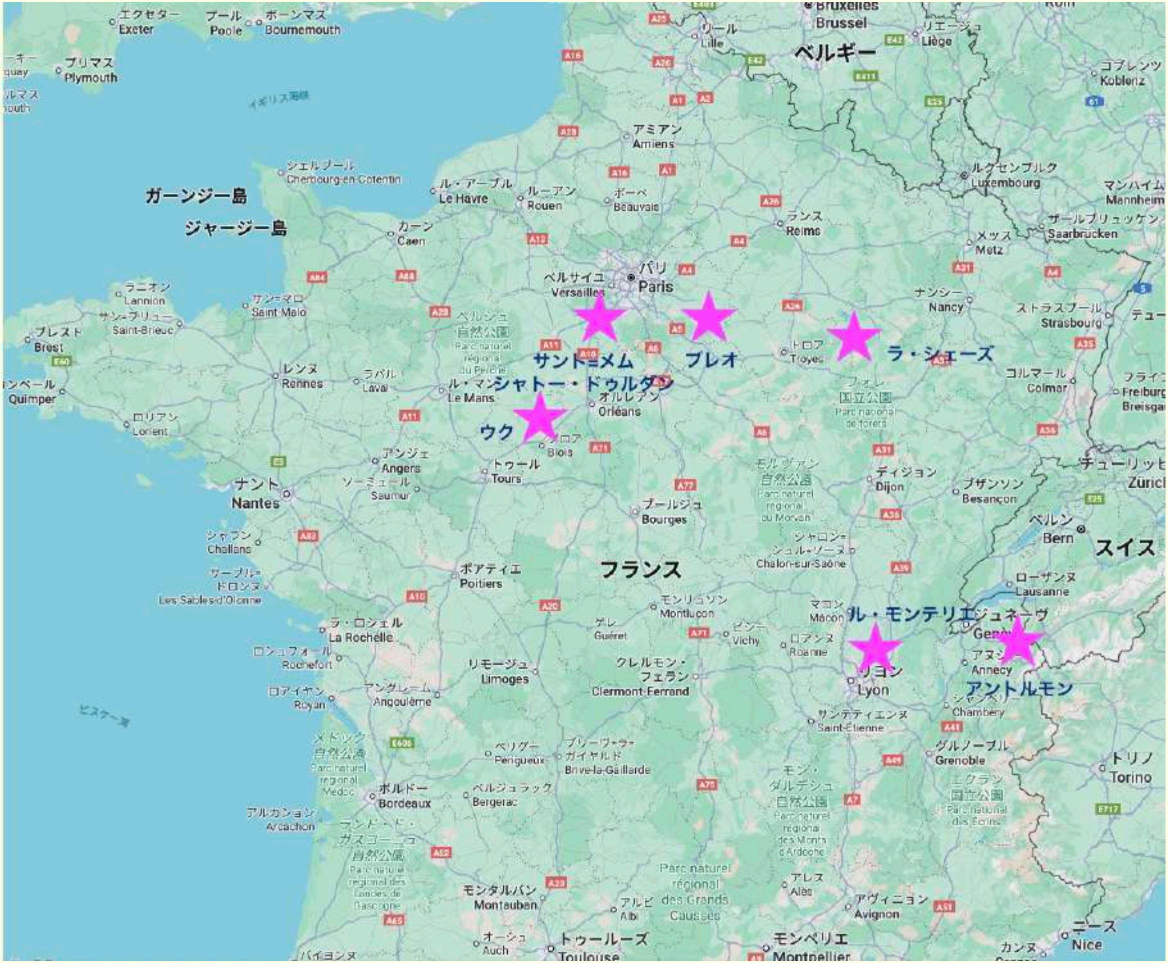
ギヨーム・ド・ロピタル（1661 年 6 月 7 日–1704 年 2 月 2 日）
Guillaume-Francois-Antoine de l'Hospital, Marquis de Sainte-Mesme et du Montellier, Comte d'Entremont, Seigneur d'Ouques, la Chaise, le Bréau et autres lieux, gouverneur des ville et château de Dourdan. (Fontenelle [16], [43])

ギヨーム・フランソワ・アントワーヌ・ド・ロピタル：サント＝メム侯爵およびモンテリエ侯爵、アントルモン伯爵、ウク、ラ・シェーズ、ル・ブレオおよびその他の地域の領主、ドゥールダンの町および城の統治者

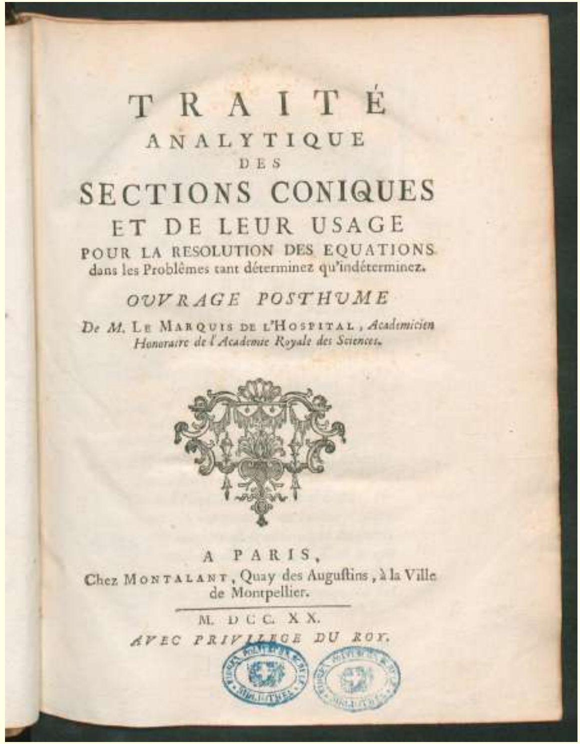
書くときは
Guillaume de l'Hospital　（ギヨーム・ド・ロピタル）
もしくは
Marquis de l'Hospital （ロピタル侯爵）
が良いかもしれない.

l'Hospital　か　l'Hôpital　か

s が脱落して**アクサン・シルコンフレクス** ô になったと思われる
アカデミー・フランセーズの正書法改革が 1740 年でロピタルの時代は過渡期
近年は発音に則して **l'Hopital** も多いようにも思われる



サント=メム
ブレオ
ラ・シェーズ
シャトー・ドゥルダン
ウク
アントルモン
フランス
ベルギー
スイス
ガーンジー島
ジャージー島
パリ
Paris
ベルサイユ
Versailles
オルレアン
Orléans
ブロア
Blois
トゥール
Tours
ル・マン
Le Mans
トロア
Troyes
ナンシー
Nancy
ストラスブール
Strasbourg
ディジョン
Dijon
リヨン
Lyon
アヌシー
Annecy
ジュネーヴ
マコン
Mâcon
ルーアン
Rouen
ル・アーブル
Le Havre
カーン
Caen
シェルブール
Cherbourg-en-Cotentin
アミアン
Amiens
ランス
Reims
メッス
Metz
ルクセンブルク
Luxembourg
リール
Lille
Brussel
レンヌ
Rennes
ナント
Nantes
アンジェ
Angers
ブールジュ
Bourges
ポアティエ
Poitiers
ラ・ロシェル
La Rochelle
リモージュ
Limoges
クレルモン・フェラン
Clermont-Ferrand
サンテティエンヌ
Saint-Étienne
グルノーブル
Grenoble
シャンベリ
Chambéry
ローザンヌ
Lausanne
ベルン
Bern
ボルドー
Bordeaux
トゥールーズ
Toulouse
モンペリエ
Montpellier
アヴィニョン
Avignon
ニース
Nice
トリノ
Torino
ブザンソン
Besançon
コルマール
Colmar
ブレスト
Brest
プリマス
Plymouth
エクセター
Exeter
ボーンマス
Bournemouth



TRAITÉ
ANALYTIQUE
DES
SECTIONS CONIQUES
ET DE LEUR USAGE
POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS
dans les Problêmes tant déterminez qu'indéterminez.

OUVRAGE POSTHUME

De M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, *Academicien Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.*

A PARIS,
Chez MONTALANT, Quay des Augustins, à la Ville de Montpellier.

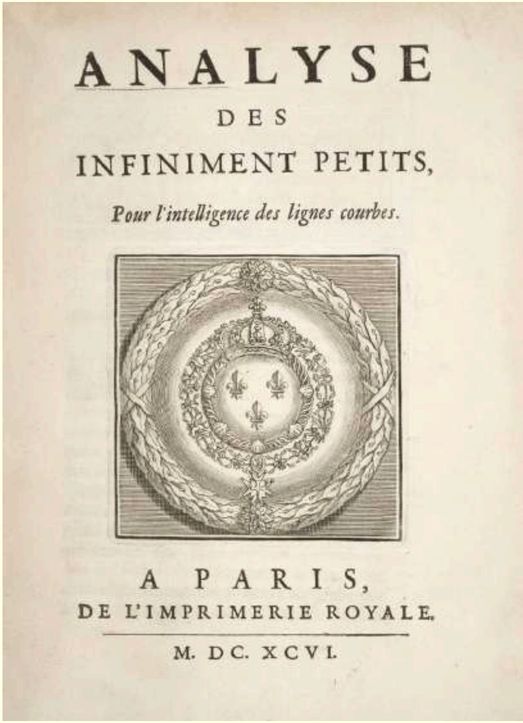
M. DCC. XX.

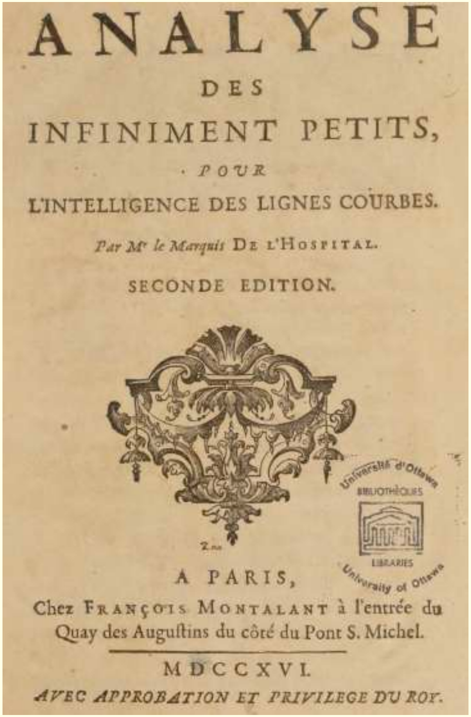
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

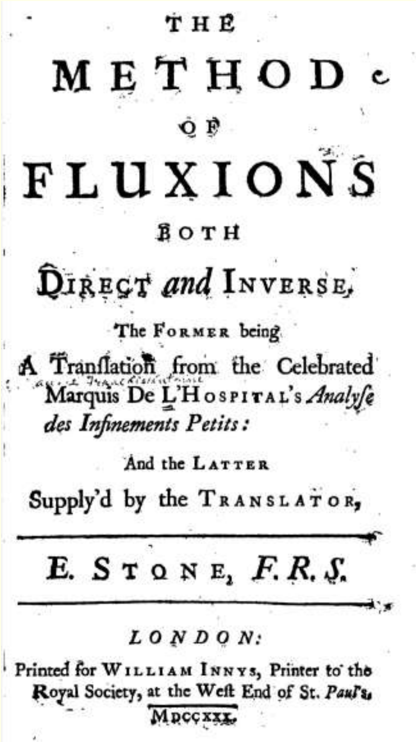
Traité analytique des sections coniques, 1707 （死後に発刊）

「円錐曲線に関する解析的考察」 [21]

Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes
『曲線を理解するための無限小の解析』1696, 1716 (2ed)

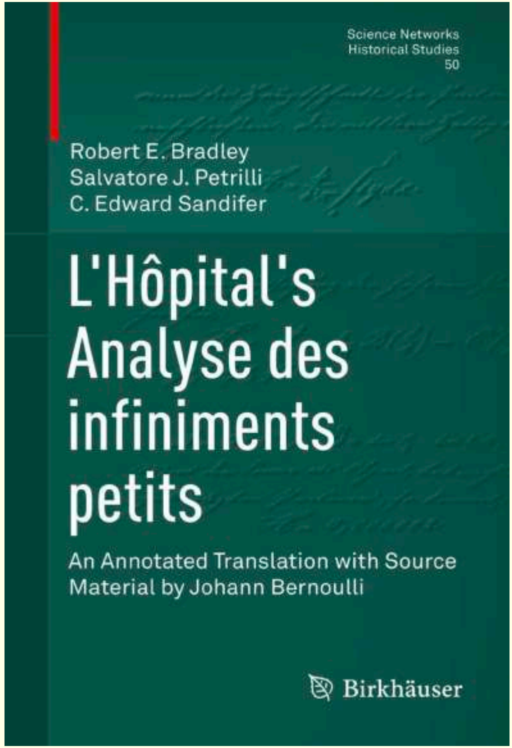





THE
METHOD
OF
FLUXIONS
BOTH
DIRECT and INVERSE,
The FORMER being
A Translation from the Celebrated
Marquis De L'HOSPITAL's *Analyse des Infinements Petits*:
And the LATTER
Supply'd by the TRANSLATOR,

E. STONE, *F.R.S.*

LONDON:
Printed for WILLIAM INNYS, Printer to the Royal Society, at the West End of St. *Paul's*,
MDCCXXX.



1696 表紙（Smithsonian Libraries ）
1696 初版　1716 第 2 版　1730 英訳 [20, 22]
R. E. Bradley, S. J. Petrilli, C. E. Sandifer (Birkhaeuser; 2015) [7]

ロピタルの本は全 10 章、本文は 181 ページである。
内容は代数函数で定義される**曲線に関する微分学**で積分はない。
ロピタルの定理は第 9 章の冒頭 p.145 に解説されている

DES INFINIMENT PETITS. *I. Part.* 145

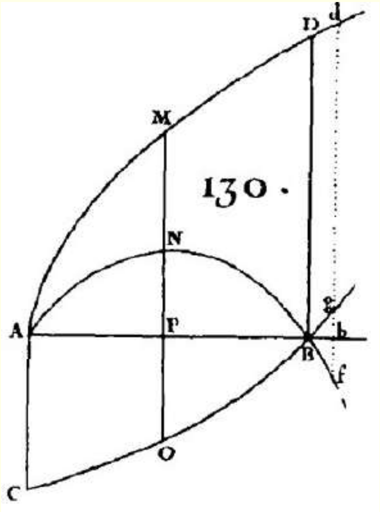
SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

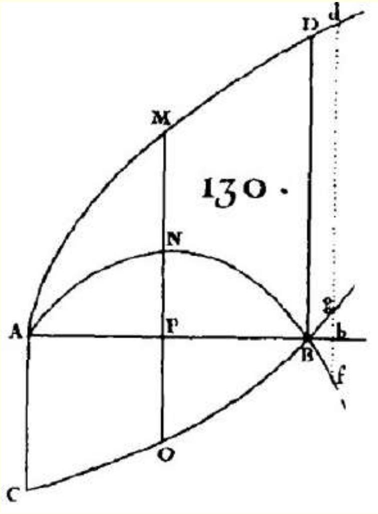
Problême.

163. Soit *une ligne courbe* AMD (AP = x, PM = y, AB = a) *telle que la valeur de l'appliquée* y *ſoit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorſque* x = a, *c'eſt-à-dire lorſque le point* P *tombe ſur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD. Fig. 130.



3.1.1 ロピタルの「証明」

A を原点として、$\dfrac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{PN}}{\mathrm{PO}}$ とする.
曲線 ANB が $y = f(x)$, COB が $y = g(x)$ で表され、
AB$= a$, $f(a) = f(B) = 0$, $g(a) = g(B) = 0$ とする.
曲線 AMD が函数 $a\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ である。



問題：BD の長さを求めよ。

B の近くで微少にずらすと、曲線 AMD の定義より

$$\frac{\mathrm{bd}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{bf}}{\mathrm{bg}}$$

となっている。$\mathrm{Bb} = dx$ と考えて

$$\mathrm{bf} = f'(B)dx,\ \mathrm{gb} = g'(B)dx$$

となるので bd $\to$BD の極限を取ると

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \frac{f'(B)}{g'(B)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

となる。 □

3.1.2 ロピタルの定理の例

定理に続いて、2つの例が挙げられている。

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}=\frac{16}{9}a$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^2-ax}{a-\sqrt{ax}}=2a$$

後者は、代数的に証明できる。

前者はロピタルの定理が有効な例

EXEMPLE I.

164. SOIT $y=\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{aax}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$. Il eſt clair que lorſque $x=a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'eſt-pourquoy l'on prendra la différence $\frac{a^3dx-2x^3dx}{\sqrt{2a^3x-x^4}}-\frac{aadx}{3\sqrt[3]{axx}}$ du numérateur, & on la diviſera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, aprés avoir fait $x=a$, c'eſt-à-dire qu'on diviſera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.

EXEMPLE II.

165. SOIT $y=\frac{aa-ax}{a-\sqrt{ax}}$. On trouve $y=2a$, lorſque $x=a$.

On pourroit réſoudre cet éxemple ſans avoir beſoin du calcul des différences, en cette ſorte.

Ayant ôté les incommenſurables, on aura $aaxx+2aaxy-axyy-2a^3x+a^4+aayy-2a^3y=0$, qui étant diviſé par $x-a$, ſe réduit à $aax-a^3+2aay-ayy=0$; & ſubſtituant a pour x, il vient comme auparavant $y=2a$.

Nr. 11

De l'Hôpital an Johann Bernoulli

Paris, 27. Juni 1693

Vorlage: *O in St. – Der Brief wurde am 20. Juni angefangen, aber erst am 27. beendet. Adresse wie bisher. – Siegel.*

à Paris ce 20e. juin 1693.

Je suis extremement surpris, Monsieur, de ce que vous n'auez fait aucune reponce à ma derniere, et je ne sçais à quoi attribuer ce silence[1]). je ne le veux pas cependant imiter, et j'aime mieux faire toutes sortes d'auances pour me conseruer vôtre amitié dont je fais un tres grand cas, que de risquer de la voir diminuer par la discontinuation du commerce qui est entre nous. Mr. l'abbé Bignon me vint trouuer il y a quelques jours et me pria de faire l'honneur à l'Academie des sciences (ce sont ses termes) d'assister quelques fois aux conferences qui s'y tiennent, ce que j'acceptai, et j'y allai hier pour la 1re. fois. Vous pouuez conter que je ne perdrai point les occasions de vous rendre seruice et de vous procurer ici quelque etablissement solide. j'y vis Mr. Varignon qui me paroit fort de vos amis, il me donna un petit papier, où est la question suiuante qu'il m'a dit que vous lui auez enuoyée. soit l'equation

$$\frac{\sqrt{2\,a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}=y$$

最初の例は友人の **Pierre Varignon** へヨハンが出した問題が元になっている

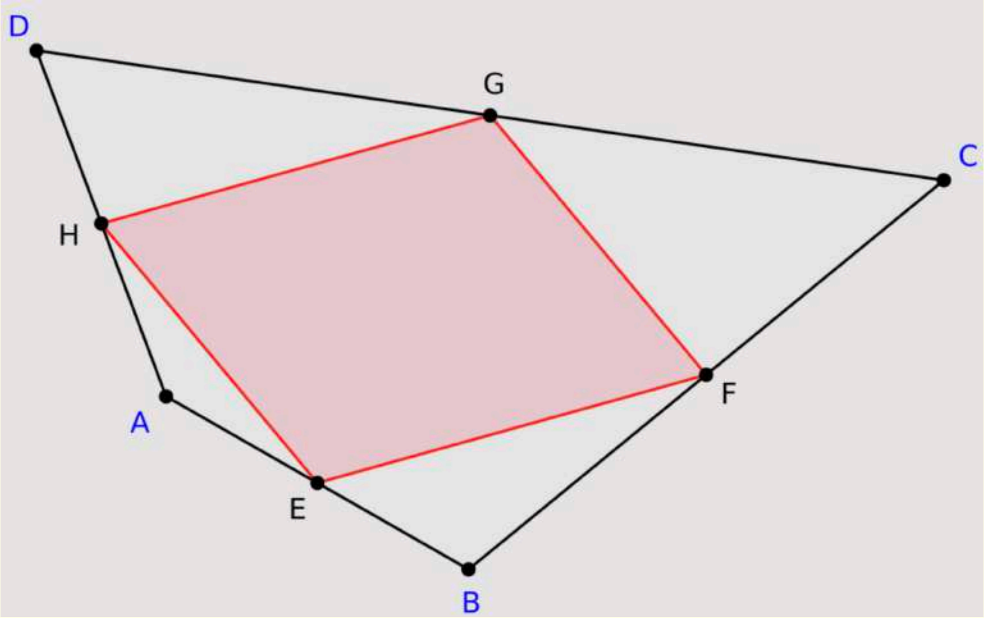
1693年ロピタルからヨハンにあてた手紙（Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Bd I, Springer, 1955; Bd 2,3もある [8]）

単純な誤答としては $x=a$ を代入して

$$\frac{a^2-a^2}{a-a}=a+a=2a$$ とするものがある

ヴァリニョンの定理

任意の四角形の辺の中点を結んでできた四角形が平行四辺形になる。
もとの四角形が凸の場合、平行四辺形の面積は四角形の半分になる。



・ヨハンとヴァリニョンとの間の手紙が多く残されている

Analyse des infiniment petits（以下 Analyse）は
1696 年の初版は著者なし、序文にはベルヌーイらに対する感謝 viii, xii

PREFACE.

des païs juſqu'ici inconnus; & il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. M^rs *Bernoulli* ont été les premiers qui ſe ſont apperçus de la beauté de ce calcul : ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de ſurmonter des difficultés qu'on n'auroit jamais oſé tenter auparavant.

Au reſte je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de M^rs *Bernoulli*, ſur tout à celles du jeune preſentement Profeſſeur à Groningue. Je me ſuis ſervi ſans façon de leurs découvertes & de celles de M. *Leibnis*. C'eſt-pourquoy je conſens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laiſſer.

viii) 両ベルヌーイ氏（兄ヤコブと弟ヨハン）は、微積分の美しさに初めて気づきました。挑戦することも考えられなかったような困難を超えるまでまでに、微積分を押し上げました。

xii) 私は両ベルヌーイ氏、特に**Groningen 大学の教授である若きベルヌーイ氏の啓示から多くを学びました**。私は両氏の発見とライプニッツ氏の発見を積極的に用いました。彼らが私に残してくださるものだけで満足し、彼らが望むだけ多くのものを主張することに同意します。

4. ヨハン・ベルヌーイの書簡

ベルヌーイとロピタルの間の書簡は書簡集 [8] として残っている (1955 出版)
[注釈] **1879 年**　この書簡は**グスタフ・エネストレーム**（Gustav Hjalmar Eneström, 1852–1923）が発見

ヨハン・ベルヌーイ Johann Bernoulli, 1667–1748、ロピタルは 1661 年生）

1691 年　ヨハン (24 歳) はロピタル侯爵 (30 歳) に個人指導
1692 年秋　**バーゼル**に戻る、以降も **1702 年**まで文通した
1694 年　博士号を取得
1695 年　オランダのフローニンゲン大学の教授就任
1705 年　バーゼルに戻る。兄ヤコブが務めていたバーゼル大学の数学教授職に

ヨハン vs ロピタル・最初の論争

ロピタルの **1692 年**の論文
Mr. G***,
Solution du probleme que M. de Beaune, *Journal des Sçavans*, 1692, 401–403. [19]
デ・ボーヌの問題 “逆正接問題で、$y' = \frac{1}{y}$ などを解け”

SOLUTION DU PROBLEME QUE M. DE BEAUNE
*propoſa autrefois à M. Deſcartes, & que l'on trouve dans la 79. de ſes lettres, tome 3. Par Mr. G****

PROBLEME.

UNe ligne droite quelconque N eſtant donnée, & ayant mené deux autres lignes indéfinies AC, AI, en ſorte que l'angle CAI ſoit de 45 degrez; on demande la maniere de décrire la courbe ABB qui ſoit de telle nature que ſi l'on mene d'un de ſes points quelconques B, l'ordonnée BC &

1692.　Iiiii

ロピタルはこの問題の答えをヨハンから教えてもらったのに匿名で発表

4.1 ロピタルからヨハンへの資金援助

1694年3月 ヨハンに対して、ロピタルは年300リーブルを送ることにした
1695年7月 200リーブル
1696年6月 Analyse 出版直後の300リーブル、合計800リーブル

Nr. 20

De l'Hôpital an Johann Bernoulli

Paris, 17. März 1694

°je vous donnerai avec plaisir une pension°° de trois cent livres, qui commencera du premier janvier de cette presente année, et je vous enverrai deux cent livres pour la premiere demie année à cause des journaux que vous m'avez envoyés, et l'autre demie année sera de cent cinquante livres et ainsi à l'avenir. je vous promets d'augmenter dans peu cette pension que je sçais bien estre tres modique, et ce sera si tost que mes affaires seront un peu debroüillées, et que je pourai joüir de la succession; car jusqu'à present

ロピタルは妻がアントルモン伯爵の財産を引き継ぐ一方で、ヨハンは
1694年　結婚、**1695年** ニコラス2世（Nicolaus II、–1726）誕生
1695年　フローニング大学教授就任

300リーブルはベルヌーイがフローニンゲンで得ることになる年俸の21％
ベルヌーイの状況では、十分ありがたい金額

この時期のヨハンはロピタルに感謝の手紙も書いている

[参考]　フランス革命時の1795年に **80フラン ＝ 81リーブル**でフランに
400フランあれば庶民は1年間生活できたようだ
次男ダニエルは1700年生まれ

4.2. ジョセフ・ソランとミシェル・ロルとの論争

ロルの定理 (1691) [32]

$f(x)$ が微分可能で $f(a)=0, f(b)=0$
ならば $f'(c)=0$ となる $a<c<b$ が存在

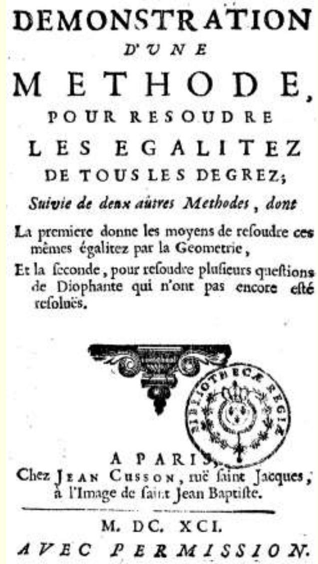
1700 年 無限小解析に否定的な**ロル**は**ヴァリニョン**と論争
最終的に**ロルが誤りを認めて決着**

1702 年 4 月 Journal des Sçavans の編集長である
ジョセフ・ソラン（Joseph Saurin, 1659–1737) が
ロルに対して、$x=a$ で不定形 $0/0$ なら問題がある
として、ロピタルの本を引用しつつロルを
自誌で批判 [34]

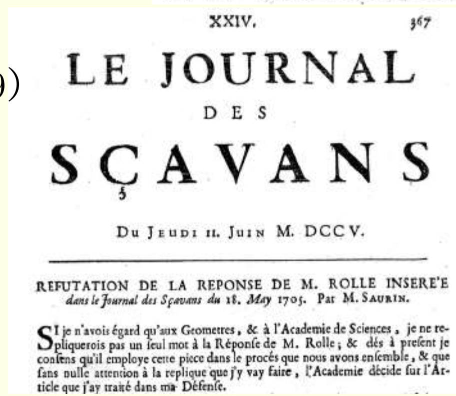
[参考] **ミシェル・ロル**（Michel Rolle、1652–1719）
ロル自身は、**多項式の場合**を考えていた。

ソランの批判自体は妥当ではあったが、
ソラン本人も無限小解析の理解が不足していた。

[参考] **Journal des Sçavans** は 1665 年に創刊
された 欧州最古の定期的学術誌


DEMONSTRATION
D'UNE
METHODE,
POUR RESOUDRE
LES EGALITEZ
DE TOUS LES DEGREZ;
Suivie de deux autres Methodes, dont
La premiere donne les moyens de reſoudre ces mêmes égalitez par la Geometrie,
Et la ſeconde, pour reſoudre pluſieurs queſtions de Diophante qui n'ont pas encore eſté reſoluës.

A PARIS,
Chez JEAN CUSSON, ruë ſaint Jacques, à l'Image de ſaint Jean Baptiſte.
M. DC. XCI.
AVEC PERMISSION.


XXIV. 367

LE JOURNAL
DES
SÇAVANS

Du JEUDI 11. JUIN M. DCCV.

REFUTATION DE LA REPONSE DE M. ROLLE INSERE'E *dans le Journal des Sçavans du 18. May 1705.* Par M. SAURIN.

SI je n'avois égard qu'aux Geometres, & à l'Academie de Sciences, je ne repliquerois pas un ſeul mot à la Réponſe de M. Rolle; & dés à preſent je conſens qu'il employe cette piece dans le procés que nous avons enſemble, & que ſans nulle attention à la replique que j'y vay faire, l'Academie décide ſur l'Article que j'ay traité dans ma Défenſe.

4.3. ヨハン・ベルヌーイの不満

ソランがロルを批判する中で、ロピタルの本を賞賛しすぎたことで、ヨハンは大きな不満を持っていた

1704 年 2 月 2 日　**ロピタル死去**

1704 年 8 月 ヨハンの論文 [3] ではロピタルの本を引用しつつ

1) **ロピタルの定理は自分の成果**

2) **結果を改善する必要がありさらに深く自分は知っている**

と主張

1705 年 5 月 ソランが反論 [35]

1705 年 7 月 18 日にヴァリニョンに宛てた手紙

N° 83

Jean Bernoulli à Pierre Varignon

Groningue, le 18 juillet 1705

Minute: Ms UB Basel L I a 669 N° 22 (2 fol.), de la main de Nicolas I Bernoulli. En haut de la lettre «à Mr. Varignon» de la main de Jean Bernoulli. A la fin date «Groningue, ce 18 Juillet 1705» probablement d'une autre main.

Monsieur.

J'ay reçû vôtre derniere lettre du 23. Juin avec le billet pour le libraire à Amsterdam pour en recevoir un exemplaire de l'Hist. et memoire de l'Acad. dont je vous remercie.

J'ay[1] lû avec beaucoup d'etonnement les plaintes de Mr. Saurin, il prend les choses d'un ton si haut, que peu s'en faut qu'il ne m'accuse d'injustice envers le defunct M. le M. de l'Hopital, en revendiquant la regle proposée dans l'article 163 de l'analyse des inf. petis: Je me trouve donc obligé de dire quelque chose touchant les deux points dont Mr. Saurin se pleint principalement, qui sont 1.mo que la regle est de moy, et 2.do qu'elle est defectueuse et qu'elle avoit besoin d'etre perfectionnée: quant au premier point M. Saurin dit que je me fay tort dans le monde par l'empressement que j'ay de revendiquer tout ce que je puis de l'Anal.

1707 年 2 月 26 日付のヴァリニョン宛の手紙

N° 95

Jean Bernoulli à Pierre Varignon

Bâle, le 26 février 1707

Minute: Ms UB Basel L I a 669 N° 23 (6 fol.). Copie de la main de Nicolas I Bernoulli. Dernier passage de la main de Jean Bernoulli.

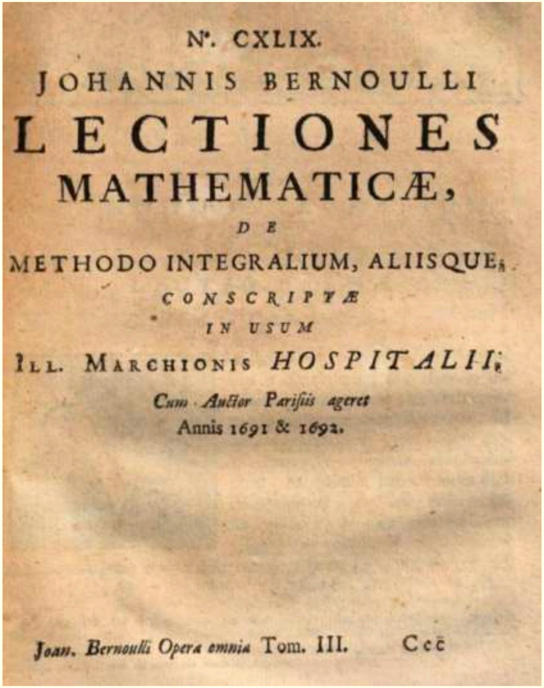
[à Mr. Varignon]

justice, par exemple lorsqu'on fait p. 131 l'Eloge du *fameux* livre de l'Analyse des infiniment petis, on se garde bien de m'en attribuer la moindre partie, quoique si on veut parler franchement Mr. de l'Hopital n'ait pas eu plus de part à la production de ce livre que d'avoir traduit en françois la matiere que je luy avois donné[e] la plus part en latin, vous le sçavez bien[14], et pour en convaincre le public j'ay en mains des lettres et d'autres pieces autentiques. Page 129 on insinue que Mr. de l'Hopital doit avoir eu une clef particuliere pour resoudre ces sublimes questions[15], mais il ne vaut pas la peine d'ajouter que c'est à moy seul qu'il est redevable de cette clef, que sans moy il ne l'auroit jamais trouvée vû qu'il ne sçavoit pas avant mon arrivée à Paris qu'il y eut au monde une telle clef.

ロピタル氏はこの本の出版において、私が彼に渡した資料の大部分を**ラテン語でフランス語に翻訳した以外には、何の役割も果たしていません**

この鍵は私に完全に負っているのです。私がいなければ、彼は決して見つけられなかったでしょう。なぜなら、**私がパリに到着するまで、彼はそのような鍵がこの世に存在することを知らなかった**からです。

Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium, Allisque
『積分法数学講義』in Johannis Bernoulli, Opera omnia 3 (1742) [5]



Nº. CXLIX.

JOHANNIS BERNOULLI

LECTIONES MATHEMATICÆ,

DE

METHODO INTEGRALIUM, ALIISQUE,

CONSCRIPTÆ

IN USUM

ILL. MARCHIONIS HOSPITALII,

Cum Auctor Parisiis ageret

Annis 1691 & 1692.

Joan. Bernoulli Opera omnia Tom. III. Ccc

LECTIONES MATHEMATICÆ

DE

METHODO INTEGRALIUM,

ALIISQUE.

LECTIO PRIMA.

De Natura & Calculo Integralium.

VIDIMUS in præcedentibus * quomodo quantitatum *Differentiales* inveniendæ sunt: nunc vice versa quomodo differentialium *Integrales*, id est, eæ quantitates quarum sunt differentiales, inveniantur, monstrabimus. Et quidem jam ex supra dictis notum est, dx esse differentialem ipsius x, & xdx differentialem ipsius $\frac{1}{2}xx$, vel $\frac{1}{2}xx$ + vel — quantitate constanti; $xxdx$ differentialem ipsius $\frac{1}{3}x^3$, aut $\frac{1}{3}x^3$ + vel — &c.

Ccc 2

* *Intelligit Auctor Lectiones in calculum differentialem quæ præcesserant, quas nunc supprimendas duxit, siquidem omnia, quæ in Lectionibus illis continentur, ab Illustr.* HOSPITALIO *relata fuerunt in Librum suum quem inscripsit*, Analyse des infiniment petits, *qui in omnium manibus versatur.*

出版年が1742年だが、1691年に執筆されたベルヌーイの初期作品の一つ
冒頭「前節で、量の微分がどのように形成されるかを見てきた」

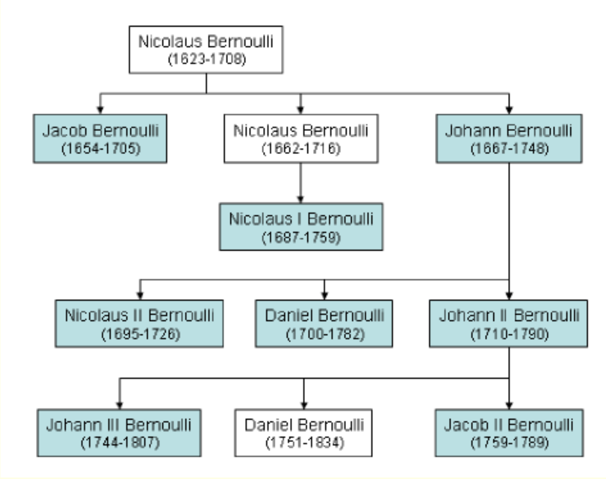
4.3.3 しかしながら …

ヨハンはライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716）らにも自分の先取権を訴えた

しかし、受け入れられず、**1716 年に２版がロピタル著として出版**された

ヨハンらの書簡が発見される前も、この Lectiones の記述からロピタルの本が第一部で、Lectiones が第二部という考えは知られていた

ベルヌーイ一族は互いに**先取権争い**をよくやっており、ヨハンの主張は当時は信用されなかった。
例えば流体力学の「ベルヌーイの原理」に関して息子ダニエルとの争い。



4.4 デ・ボーヌの問題

フロリモン・デ・ボーヌ (Florimond de Beaune,1601–1652)
デカルトの時代の法学者

デ・ボーヌの問題（1638）とは逆正接問題で、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y-x}$$

を解けというもの。解は

$$y = a\log\left(\frac{a}{x-y+a}\right)$$

で、指数・対数函数の微積分ができなかったデカルトの時代には解けなかった。
$y' = \dfrac{a}{y}$ なら $y = \sqrt{2ax+c}$ と解ける

[参考] デ・ボーヌの問題は一般化されて**ベルヌーイの方程式**

$$y' = P(x)y + Q(x)y^n$$

となった。**ヤコブ**が提唱して、**ライプニッツ**（**変数分離法**は彼による）が**変換** $w = y^{1-n}$ を見出して積分因子の考えで解いた。
すぐ後に**ヨハン**が**定数変化法**で解いた。Parker 参照 [30].

4.5 ロルの定理

ロルは1690年 [31]

Michel Rolle, Traité d'Algebre, 1690.

多項式 $f(x)$ の根 a, b に対して $f'(c) = 0$ となる $a < c < b$ の存在を使った。

翌1691年に証明を出版したが、無限小解析は使わない

ロルの定理 が再び表れるのは19世紀であるが、まだ微積分と繋がってない

1834 Moritz Wilhelm Drobisch [13]

1846 Giusto Bellavitis [2]

1861年 Weierstrass の夏の講義 [46, 14]

ロルの定理が**現代的に定式化**

1868年 Joseph Serret の解析教程 [39]

Cours de calcul différentiel et intégral

t.1, p.17, p.23.

ロルの定理を用いて平均値の定理を証明

ただし、この証明は **O. Bonnet** による

1878年 Ulisse Dini [12] で現代的に証明

Théorème IV. — *Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions de x qui restent continues pour les valeurs de x comprises entre des limites données, et qui, pour ces valeurs, aient des dérivées déterminées $f'(x)$, $F'(x)$. Si x_0 et X désignent deux valeurs de x comprises entre les mêmes limites, et que la dérivée $F'(x)$, qui peut être nulle ou infinie pour $x = x_0$ ou pour $x = X$, ne le soit pas pour les valeurs intermédiaires, on aura*

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)},$$

x_1 étant une valeur comprise entre x_0 et X.

Nous emploierons ici le raisonnement qui nous a déjà servi à établir le théorème I. Posons

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = A,$$

on aura

$$(1) \qquad [f(X) - AF(X)] - [f(x_0) - AF(x_0)] = 0,$$

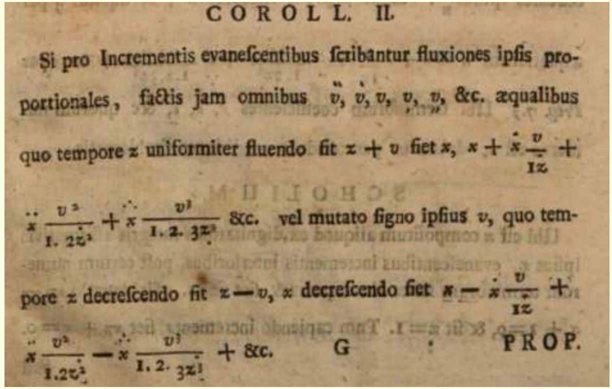
d'où il résulte que la fonction

$$(2) \qquad \varphi(x) = [f(x) - AF(x)] - [f(x_0) - AF(x_0)]$$

18世紀には微積分の教科書も出版され始めた

ブルック・テイラー

Brook Taylor (1685 – 1731),
Methodus Incrementorum Directa et Inversa, 1715. [45]



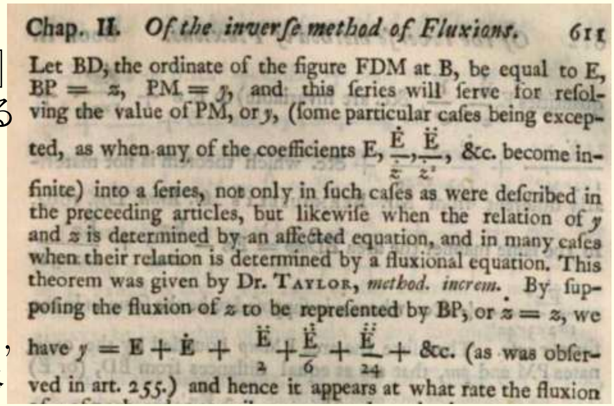
COROLL. II.

Si pro Incrementis evaneſcentibus ſcribantur fluxiones ipſis proportionales, factis jam omnibus $\ddot{v}, \dot{v}, v, \underset{\cdot}{v}, \underset{\cdot\cdot}{v}$, &c. æqualibus quo tempore z uniformiter fluendo fit $z + v$ fiet x, $x + \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1.2\dot{z}^2} + \dddot{x}\frac{v^3}{1.2.3\dot{z}^3}$ &c. vel mutato ſigno ipſius v, quo tempore z decreſcendo fit $z - v$, x decreſcendo fiet $x - \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1.2\dot{z}^2} - \dddot{x}\frac{v^3}{1.2.3\dot{z}^3}$ + &c.

G PROP.

コリン・マクローリン

Colin Maclaurin (1698 – 1746)
A Treatise of Fluxions: vol II, 1742. [27]
マクローリンの本は1749年に仏訳が出るなど大陸でも広く読まれた



Chap. II. *Of the inverſe method of Fluxions.* 611

Let BD, the ordinate of the figure FDM at B, be equal to E, BP = z, PM = y, and this ſeries will ſerve for reſolving the value of PM, or y, (ſome particular caſes being excepted, as when any of the coefficients E, $\frac{\dot{E}}{\dot{z}}, \frac{\ddot{E}}{\dot{z}^2}$, &c. become infinite) into a ſeries, not only in ſuch caſes as were deſcribed in the preceeding articles, but likewiſe when the relation of y and z is determined by an affected equation, and in many caſes when their relation is determined by a fluxional equation. This theorem was given by Dr. Taylor, *method. increm.* By ſuppoſing the fluxion of z to be repreſented by BP, or $\dot{z} = z$, we have $y = E + \dot{E} + \frac{\ddot{E}}{2} + \frac{\dddot{E}}{6} + \frac{\ddddot{E}}{24}$ + &c. (as was obſerved in art. 255.) and hence it appears at what rate the fluxion

マリア・アジェーニ（Maria Agnesi, 1718-1799）の『解析教程』[1]
Instituzioni analitiche, t.1 t.2 (1748) ,
オイラーの無限小解析なども続くが省略

5.1 ジョゼフ=ルイ・ラグランジュ

フランスでも 17 世紀後半には解析学の教科書が表れている
ジョゼフ=ルイ・ラグランジュ（Joseph Louis Lagrange, 1736 - 1813）
二変数函数の極大極小問題で 2 回微分を使った判定法なども発見

解析函数の理論（Théorie des fonctions analytiques, Paris, 1797）
ラグランジュの剰余項 全集 9 巻 [26]

Prenant donc $f'(z), f''(z), \ldots$ pour les fonctions dérivées de $f(z)$, on aura

$$
\begin{aligned}
f(z+x) &= f(z) + x f'(z+u) \\
&= f(z) + x f'(z) + \frac{x^2}{2} f''(z+u) \\
&= f(z) + x f'(z) + \frac{x^2}{2} f''(z) + \frac{x^3}{2.3} f'''(z+u) \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

où u désigne une quantité inconnue, mais renfermée entre les limites o et x.

引き続いて
シルヴェストル・フランソワ・ラクロワ（Sylvestre François Lacroix, 1765 – 1843)
Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, 1797, 1798, 1800. [25]
も広く読まれたが、やはり微積分の教科書は 19 世紀にコーシーが書き直した

オーギュスタン=ルイ・コーシー (Augustin Louis Cauchy, 1789 – 1857)
Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique, 1821 [10]
Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal 1823. p.24 [11]
コーシー微分積分学要論, 小堀 憲 訳, 共立出版（1969）[23]

0/0 の極限について言及している。
この証明はラフすぎるがロピタルの証明とほぼ同じである

4.^{e} Problème. *On demande la véritable valeur d'une fraction dont les deux termes sont des fonctions de la variable x, dans le cas où l'on attribue à cette variable une valeur particulière, pour laquelle la fraction se présente sous la forme indéterminée* $\frac{0}{0}$.

Solution. Soit $s = \frac{z}{y}$ la fraction proposée, y et z désignant deux fonctions de la variable x, et supposons que la valeur particulière $x = x_0$ réduise cette fraction à la forme $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire, qu'elle fasse évanouir y et z. Si l'on représente par $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ les accroissemens infiniment petits et simultanés des trois variables x, y, z, on aura, pour une valeur quelconque de x,
$$s = \frac{z}{y} = \lim \frac{z + \Delta z}{y + \Delta y},$$
et, pour la valeur particulière $x = x_0$,
$$s = \lim \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'}. \tag{3}$$
Ainsi, la valeur cherchée de la fraction s ou $\frac{z}{y}$ coïncidera généralement avec celle du rapport $\frac{dz}{dy}$ ou $\frac{z'}{y'}$.

Exemples. On aura, pour $x = 0$, $\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = 1$, $\frac{l(1+x)}{x} = \frac{1}{1+x} = 1$; pour $x = 1$, $\frac{l(x)}{x-1} = \frac{1}{x} = 1$, $\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}$; &c....

コーシーの平均値の定理 Résumé の p.161 ページ

D'après ce qui a été dit dans la 7.^{e} leçon, si l'on désigne par x_0, X deux valeurs de x entre lesquelles les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ restent continues, et par θ un nombre inférieur à l'unité, on aura

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}=f'[x_0+\theta(X-x_0)].$$

Or, il est aisé de voir que des raisonnemens entièrement semblables à ceux dont nous avons fait usage pour démontrer l'équation précédente, suffiront pour établir la formule

$$(1)\qquad \frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)}=\frac{f'[x_0+\theta(X-x_0)]}{F'[x_0+\theta(X-x_0)]},$$

θ désignant encore un nombre inférieur à l'unité, et $F(x)$ une fonction nouvelle qui, toujours croissante ou décroissante depuis la limite $x=x_0$ jusqu'à la limite $x=X$, reste continue, avec sa derivée $F'(x)$, entre ces mêmes limites.

ロピタルの定理の拡張 Résumé の p.164 ページ

Admettons, en effet, que les deux termes de la fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

et leurs dérivées successives, jusqu'à celles de l'ordre $n-1$, s'évanouissent pour $x=x_0$. La formule (6) subsistera généralement pour de très-petites valeurs numériques de i, parce qu'en général chacune des fonctions

$$F(x),\quad F'(x),\quad F''(x),\quad \ldots\quad F^{(n-1)}(x)$$

croîtra ou décroîtra sans cesse depuis la valeur particulière de x représentée par x_0 jusqu'à une valeur très-voisine; et l'on tirera de cette formule, en faisant converger i vers la limite zéro,

$$(9)\qquad lim\,\frac{f(x_0+i)}{F(x_0+i)}=lim\,\frac{f^{(n)}(x_0+\theta i)}{F^{(n)}(x_0+\theta i)}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{F^{(n)}(x_0)}.$$

コーシー微分積分学要論は $\varepsilon-\delta$ 論法など現代的な解析学の最初ではあった

同時期にベルナルト・ボルツァーノ（Bernard Bolzano, 1781 - 1848）も進めていたが、ロピタルと関係ないので省略

解析学の厳密化が進むにつれて、不定形の極限についても再び議論になった。

デュ・ボア=レーモン (Paul du Bois-Reymond,1831– 1889) は函数が振動する場合を除外して考察した.

Crelle, J. **74** (1872) [9]

Théorème. *Lorsque les fonctions continues* $f(x)$, $\varphi(x)$ *n'ont point de limite finie différente de zéro, et que ni ces fonctions ni leurs dérivées n'ont un nombre infini de maxima et de minima, on aura toujours:*

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \text{etc. in inf.}$$

デュ・ボア=レーモンの考察を受けて、現代的にロピタルの証明を与えたのがオットー・シュトルツである.

（Otto Stolz 1842 – 1905)

Math. Ann. **14** (1879) [40]

3. Satz. „Wenn die eindeutigen Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, welche sich für $\lim x = +\infty$ *beide dem Grenzwerthe Null nähern*, die Eigenschaft haben, dass sie für alle endlichen Werthe von einem bestimmten Werthe $x = x_1$ an endlich und stetig sind und Differentialquotienten $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ besitzen, die weder *zugleich* (bestimmt) unendlich sind, noch *zugleich* verschwinden, und *von denen der letztere* $\varphi'(x)$ *nicht entgegengesetzt bezeichnete Werthe annimmt**); so folgt *aus der Existenz des Grenzwerthes* $\lim \{f'(x) : \varphi'(x)\}$ ($\lim x = +\infty$) *die Existenz eines Grenzwerthes für den Quotienten* $f(x) : \varphi(x)$ *bei demselben Grenzübergange, und es ist*

(f) $$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.“$$

ロピタルの反例はシュトルツ以前に**Victor Rouquet** が与えている (1877) [33]
ただ $f(x)=x+\cos x, g(x)=x+\sin x$ というややつまらない例である

シュトルツは証明を与えたMath. Ann. の次の号で反例について考察してる [41]

$$f(x)=x+\sin x\cos x,\quad g(x)=e^{\sin x}(x+\sin x\cos x).$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=e^{-\sin x}$ は振動するので $x\to\infty$ で極限を持たないが

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x}\cos x(x+(\sin x+2)\cos x)}=\frac{2e^{-\sin x}\cos x}{x+(\sin x+2)\cos x}\to 0\ (x\to\infty)$$

この反例については **Ralph Philip Boas** [6] が一般化して考察している。

[**補足**] シュトルツは**ロピタルの差分版**でも名前が残っている [42]

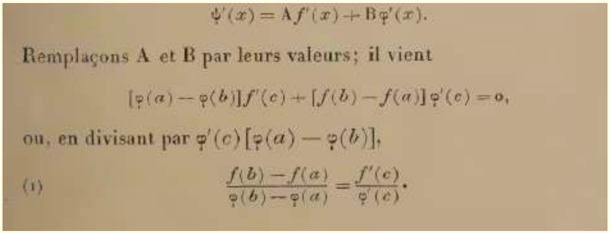
シュトルツ＝チェザロの定理 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\ell$ が存在すれば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell.$
$b_n=n$ の時が**チェザロ和**（Ernesto Cesàro, 1859–1906）である。

シュトルツの他の仕事として、**凸函数は片側導函数を持つ**ことの証明、また、**非アルキメデス的実数**の先駆的な研究がある。P. Ehrlich 参照 [15]

ロピタルの定理は 19 世紀後半に現代と同じ意味の厳密さで定式化された。

この定理を実際に「ロピタルの定理」と読んだのは **E. グルサ**である Stolz の頃は名前がなかった

Cours d'analyse mathématique, 2nd ed. t.1 (1910), p.37; p.39:



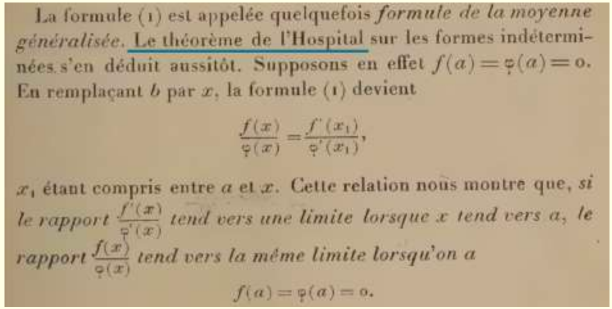
$$\psi'(x) = Af'(x) + B\varphi'(x).$$

Remplaçons A et B par leurs valeurs; il vient

$$[\varphi(a)-\varphi(b)]f'(c)+[f(b)-f(a)]\varphi'(c)=0,$$

ou, en divisant par $\varphi'(c)[\varphi(a)-\varphi(b)]$,

$$(1)\qquad \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$



La formule (1) est appelée quelquefois *formule de la moyenne généralisée*. Le théorème de l'Hospital sur les formes indéterminées s'en déduit aussitôt. Supposons en effet $f(a)=\varphi(a)=0$. En remplaçant b par x, la formule (1) devient

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

x_1 étant compris entre a et x. Cette relation nous montre que, *si le rapport* $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ *tend vers une limite lorsque* x *tend vers* a, *le rapport* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *tend vers la même limite lorsqu'on a*

$$f(a)=\varphi(a)=0.$$

ちなみにグルサ解析教程の初版 (1902) にはロピタルの名前がない

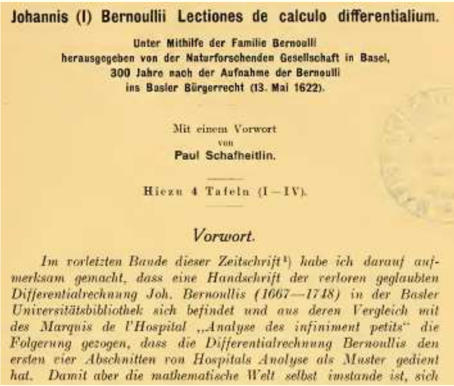
20 世紀に入って、ロピタル・ヨハンの論争が再度興味を持たれ、特にエネストレームは**二人の書簡**を発見した。

モーリッツ・カントール（Moritz Cantor, 1829–1920）

グスタフ・エネストレーム（Gustav Hjalmar Eneström, 1852–1923）

参考　エネストレームはオイラーの論文を整理、E-番号は Eneström に因む）

1742 年発表論文の**前節**がロピタルの本に相当すると考えられた
しかし、ロピタルの本の元がヨハンの講義であるのか不明であった
1921 年**シャフハイトリン**（Paul Schafheitlin） がバーゼル大の図書館で
ヨハンの講義録
"**Lectiones de calculo differentialum**" (1691/92)
を発見。この微積分講義録はロピタルの本の前半と一致した



Johannis (I) Bernoullii Lectiones de calculo differentialium.

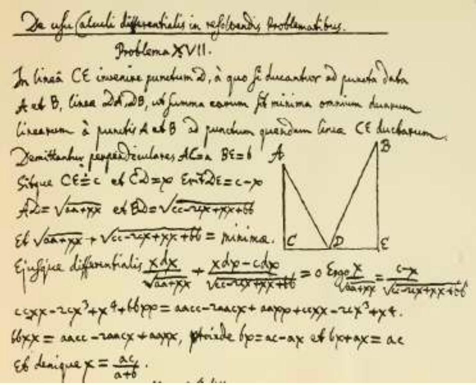
Unter Mithilfe der Familie Bernoulli
herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel,
300 Jahre nach der Aufnahme der Bernoulli
ins Basler Bürgerrecht (13. Mai 1622).

Mit einem Vorwort
von
Paul Schafheitlin.

Hiezu 4 Tafeln (I—IV).

Vorwort.

Im vorletzten Bande dieser Zeitschrift[1]*) habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass eine Handschrift der verloren geglaubten Differentialrechnung Joh. Bernoullis (1667—1748) in der Basler Universitätsbibliothek sich befindet und aus deren Vergleich mit des Marquis de l'Hospital „Analyse des infiniment petits" die Folgerung gezogen, dass die Differentialrechnung Bernoullis den ersten vier Abschnitten von Hospitals Analyse als Muster gedient hat. Damit aber die mathematische Welt selbst imstande ist, sich*



De usu Calculi differentialis in resolvendis Problematibus.

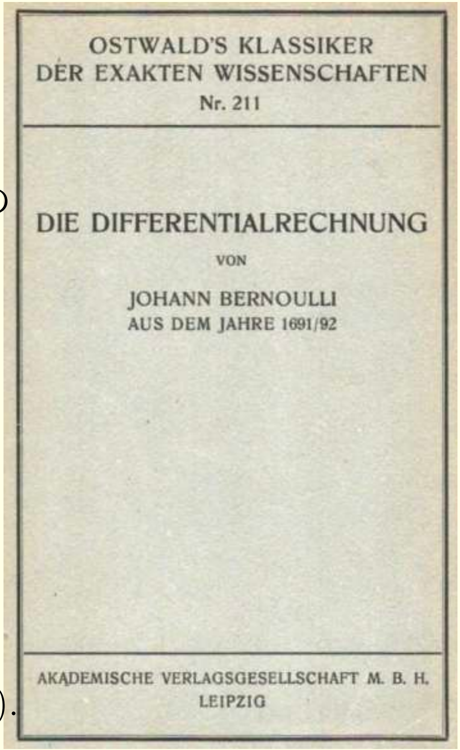
Problema XVII.

In lineâ CE invenire punctum D, à quo si ducantur ad puncta data A et B, lineae DA, DB, ut summa earum sit minima omnium duarum linearum à punctis A et B ad punctum quoddam lineae CE ductarum.
Demittantur perpendiculares AC = a BE = b
Sitque CE = c et CD = x Erit DE = c − x
AD = $\sqrt{aa+xx}$ et BD = $\sqrt{cc-2cx+xx+bb}$
Et $\sqrt{aa+xx}+\sqrt{cc-2cx+xx+bb}$ = minima.
Ejusque differentialis $\frac{xdx}{\sqrt{aa+xx}}+\frac{xdx-cdx}{\sqrt{cc-2cx+xx+bb}}=0$ Ergo $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}}=\frac{c-x}{\sqrt{cc-2cx+xx+bb}}$
$ccxx-2cx^3+x^4+bbxx=aacc-2aacx+aaxx+ccxx-2cx^3+x^4$.
$bbxx=aacc-2aacx+aaxx$, proinde $bx=ac-ax$ et $bx+ax=ac$
Et denique $x=\frac{ac}{a+b}$.

シャフハイトリンの発見によってヨハンの寄与が 200 年ぶりに示された！
Paul Schafheitlin:
Johannis (I) Bernoullii Lectiones de calculo differentialium,
Verh. Naturf. Ges. Basel **34**, 1– 32 (1922-1923).

7.2 シャフハイトリンの発見

前ページのSchafheitlinの論文は、ベルヌーイ家がバーゼル市民権を認められた1622年5月13日から300年後に、**ベルヌーイ家の助成**を受けて
バーゼル自然科学協会によって出版された



ベルヌーイの原稿は、ロピタルの Analyse の
最初の4章のモデルだった

ただし、ヨハンの直筆ではなく1705年にヨハンの
甥の**ニコラウス（I）ベルヌーイ**が写した原稿

右はSchafheitlinがまとめたベルヌーイの原稿

Bernoulli, J.
Die Differentialrechnung.
Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 211
Leipzig, Akademische Verlagsgesellsch. p.56 (1924)

Schafheitlinのもう一つの論文：
Johann Bernoulli's Differentialrechnung,
Verh. Naturf. Ges. Basel **32**, 230-235 (1920-1921).

8.1 グルサ「解析教程」

エドゥアール・グルサ（Édouard Goursat, 1858–1936）は超幾何函数や複素解析などの研究者である

グルサの **Cours d'Analyse Mathématique** は微分積分だけではなく、 複素解析・微分方程式の入門書として広く読まれた.

初版は２巻本

第２版で大きく内容が変わったが以降は大体同じ

第４版 t.2 で Painlevé の定理などが加筆

第４版 t.1. t.2 と第３版 t.3 の組み合わせで

今も Gabay Edition が購入できる

また**英訳もある（５巻本）**


COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

COURS

D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR

ÉDOUARD GOURSAT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

TOME I.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES.
INTÉGRALES DÉFINIES. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902
(Tous droits réservés.)

初版（２巻本） Tome.1 1902, Tome.2 1905

第２版（3 巻本） Tome.1 1910, Tome.2 1911, Tome.3 1915 [18]

第３版（3 巻本） Tome.1 1917, Tome.2 1918, Tome.3 1923

8.2 高木貞治・解析概論

高木貞治は Goursat を読んでいた

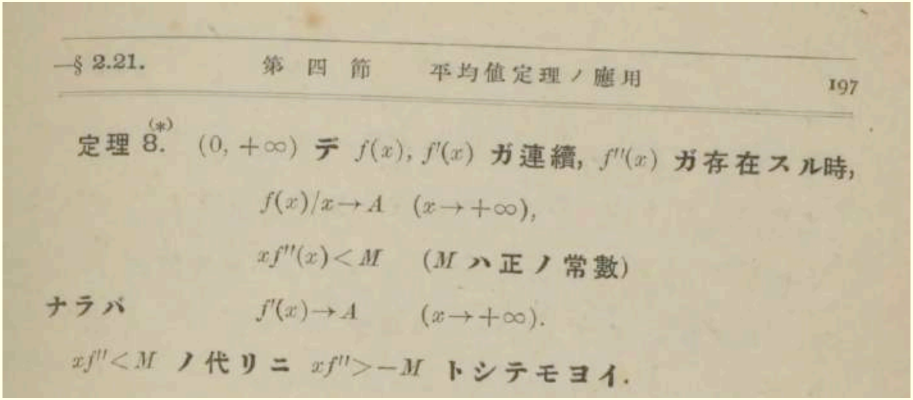
高木貞治「解析概論」岩波講座版の結語（**昭和 10 年 8 月**）には

「ロピタルの定理を現代の解析教程の中で扱うのは時代錯誤でなかろうか」

一例デアルガ,本稿第二章デ所謂不定形 ($\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$ ナド) ヲ述ベナカツタ. ソレハ忘レタノデハナイ. 既ニ第一章デ十九世紀式ノ lim. ヲ說明シタ後ニ,十八世紀ニ逆轉シテ不定形ノヤウナモノヲ特別扱ヒスルコトガ,解析概論ニ於テ適切デアラウカ? 傳統的ノ解析教程ニハ,往々練習(受驗數學!)ト稱シテ,不定形ノ夥シイ例題ガ列ベテアル. ソレラハ例外ナク解析函數ニ關スルモノデアル. ソレヲ解析性ヲ伏セテ置イテ單ナル微分可能性ダケデ處理シヨウトイフノデアル. 時代錯誤デナカラウカ. 本稿デハ最終ノ第七章ニ至テ始メテ(?)不定形 $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$ ニ遭遇シタガ, $x=0$ ニ於テ,コノ解析函數ハ正則デ,ソノ値ハ0デアルコトヲ,讀者ハ不定形ナドイフモノニ無頓着ニ了解シテシマウ.——

藤原松三郎・数学解析（内田老鶴圃・昭和９年２月）は詳しい (2.20 節)

2.21 節では**ロピタルの定理の逆**が扱われている



—§ 2.21. 第 四 節 平均値定理ノ應用 197

定理 8.(*) $(0, +\infty)$ デ $f(x)$, $f'(x)$ ガ連續, $f''(x)$ ガ存在スル時,

$$f(x)/x \to A \quad (x \to +\infty),$$

$$xf''(x) < M \quad (M \text{ ハ正ノ常數})$$

ナラバ $\quad f'(x) \to A \quad (x \to +\infty).$

$xf'' < M$ ノ代リニ $xf'' > -M$ トシテモヨイ.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ において、$g'(x) \neq 0$ より $g(x)$ は単調である。

そこで $t = g(x)$ とおき $\dfrac{f(g^{-1}(t))}{t}$ について $t \to 0$ の極限を考えればいい

ロピタルの定理の逆は**窪田忠彦** (1885–1952) による [24]：

T. Kubota, Einige Sätze den Grenzwert betreffend,
Tohoku Math. J. **15** (1919), 314–322

9. 終わりに

ロピタル侯爵は貴族でありながらも当時の数学者と基本的は良い関係を築いていたようである

ヨハン・ベルヌーイは貴族であるロピタル侯爵に自分の研究成果を渡してお金を貰うことに関して忌避感は持っていなかったと思われる

初版の出版時は29歳だったこともあってヨハンも特に不満はなかったようだが、その後ロピタル侯爵の本の評価が高まったことで不満が大きくなったようである。

1702年からのソランとロルとの論争があり、さらに1704年にロピタル侯爵が亡くなり、1705年には兄ヤコブの後を継いでバーゼル大教授になったことなどから、ロピタル侯爵に対する攻撃的な発言が目立った
ヨハン以上にソランも周囲からよく思われてなかったようである

しかしながら、エネストレームがヨハンらの書簡を発見して、シャフハイトリンがヨハンの講義録を発掘したことでヨハンの貢献が明確になった

でも今後もロピタルの定理なんだろうなあと思ってます。**ド・ロピタルの定理**の方が良いのですが。

References

[1] Maria Agnesi, Instituzioni analitiche, t.1 t.2 (1748).

[2] Giusto Bellavitis, Sul più facile modo di trovare le radici reali delle equazioni algebriche e sopra un nuovo metodo per la determinazione delle radici immaginarie, p.34 1846.

[3] J. Bernoulli; Perfectio Regula sua edita in Libro Gall. Analyse des infiniment petits art. 163, pro determinando valore fractionis, cujus Numerator & Denominator certocasu evanescunt, Acta Eruditorum 1704 375-380. Opera I, Op. LXXI, 401–405.

[4] J. Bernoulli; Die Differentialrechnung. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 211, Leipzig, Akademische Verlagsgesellsch. p.56 (1924).

[5] J. Bernoulli; 『Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium, Allisque, Johannis Bernoulli, Opera omnia **3** (1742), 385–558.

[6] R. P. Boas, Counterexamples to L'hôpital's Rule, Amer. Math. Monthly, **93** (1986), 644–645.

[7] R. E. Bradley, S. J. Petrilli, C. E. Sandifer; L ’ Hôpital’s Analyse des infiniments petits, Birkhäuser; 2015.

[8] Der Briefwechsel von Johann I. Bernoulli; Band 1: Der Briefwechsel mit Jacob Bernoulli, dem Marquis de l’Hôpital u.a., Springer, 1955; Band 3: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon. Zweiter Teil:1702–1714, 1992.

[9] Paul du Bois-Reymond Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées, J. reine und ange. Math. **74** (1872): 294–304.

[10] Augustin Louis Cauchy; Cours d’analyse de l’Ecole royale polytechnique, 1821

[11] Augustin Louis Cauchy; Résumé des leçons données à l’École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal 1823.

[12] Ulisse Dini; Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, 1878

[13] Moritz Wilhelm Drobisch, Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen nach ihren analytischen und geometrischen Eigenschaften, p.176, (1834).

[14] Dugac, P.; Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Arch. Hist. Exact Sci.* **10**, 41–174 (1973).

[15] Ehrlich, P., The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes. Arch. Hist. Exact Sci. **60** (2006), 1–121.

[16] Bernard Fontenelle, Éloge de M. le marquis de L'hopital, *Histoire de l'Académie royale des sciences* (1704), 125–132.

[17] 藤原松三郎, 数学解析第一, （内田老鶴圃・昭和９年２月）

[18] E. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, ed. 2. t.1 (1910).

[19] Mr. G***, Solution du probleme que M. de Beaune, *Journal des Sçavans*, 1692, 401–403.

[20] Guillaume de l'Hospital, Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, 1696; 2ed; 1716.

[21] Guillaume de l'Hospital, Traité analytique des sections coniques, 1707.

[22] Guillaume de l'Hospital, The Method of Fluxions: Both Direct and Inverse, (translated into English by Edmund Stone), 1730.

[23] コーシー著, 小堀 憲 訳, コーシー微分積分学要論, 小堀 憲 訳, 共立出版（1969

[24] T. Kubota, Einige Sätze den Grenzwert betreffend, Tohoku Math. J. **15** (1919), 314–322.

[25] Sylvestre François Lacroix, Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, Tome 1 (1797), Tome 2 (1798); Traité des différences et des séries, faisant suite au traité du calcul différentiel et du calcul intégral (1800).

[26] Joseph Louis Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, in Oeuvres de Lagrange. T. 9, 15–413, 1797.

[27] Colin Maclaurin, A Treatise of Fluxions: vol II, 1742.

[28] Gabriello Manfredi; De constructione aequationum differentialium primi gradus,1707.

[29] 岡本和夫 [ほか], 数学 III, 実教出版, 2019.1

[30] Adam E. Parker, Who Solved the Bernoulli Differential Equation and How Did They Do It?, College Math. J. **44** (2013), 89–97. Volume 44, 2013

[31] Michel Rolle, Traité d'Algebre, (1690).

[32] Michel Rolle, Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degréz, 1691.

[33] V. Rouquet, Note sur les vraies valeurs des expressions de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. *Nouv. annales math.*, **16** (1877), 113–116.

[34] J. Saurin, Reponse à l'ecrit de M. Rolle de l'Ac. R. des Sc. inseré dans le Journal du 13 avril 1702. sous le titre de Regles et Remarques pour le Problème general des Tangentes, Journal des Sçavans, 3 août 1702, 519–534.

[35] J. Saurin, Refutation de la Réponse de M. Rolle inserée, Journal des Sçavans du 18. May 1705: (Jeudi 11. Juin), pp. 367–382.

[36] P. Schafheitlin, Die Theorie Der Besselschen Funktionen, 1908.

[37] P. Schafheitlin, Johann Bernoulli's Differentialrechnung, Verh. Naturf. Ges. Basel **32**, 230-235 (1920-1921).

[38] P. Schafheitlin, Johannis (I) Bernoullii Lectiones de calculo differentialium, Verh. Naturf. Ges. Basel **34**, 1– 32 (1922-1923).

[39] Joseph Serret, Cours de calcul différentiel et intégral tome. 1, tome. 2, 1868

[40] O. Stolz, Ueber die Grenzwerthe von Quotienten, *Math. Ann.*, **14** (1879), 231–240.

[41] O. Stolz, Ueber die Grenzwerthe von Quotienten, *Math. Ann.*, **15** (1879), 556–559.

[42] O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, 1885

[43] D. J. Sturdy, "Science and Social Status: The Members of the Academie Des Sciences 1666-1750", Boydell &Brewer 1995.

[44] 高木貞治, 解析概論 (VIII), 岩波講座数学, 昭和10年8月.

[45] Brook Taylor, Methodus Incrementorum Directa et Inversa, 1715.

[46] Karl Weierstrass, Differentialrechnung 1861. Ausarbeitung der Vorlesung an dem König. Gewerbeinstitut zu Berlin im Sommersem. (von H.A. Schwarz).

[参考] 中根 美知代; 東大数理 2014 年度冬学期「数学史」配布資料 (Schwarz のタイプ原稿が2ページ挿入)