ロシアで発展した結晶群とその一般化

●結晶空間群 *Ф*←E.S.フェドロフ(1890)

第1部　古典結晶群(幾何空間の対称変換)

幾何空間次元とは異なる特性次元を追加

幾何空間次元の追加は高次元化という

●反対称群*Ш*←A.V.シュブニコフ(1945)

第2部　古典結晶群の一般化(色付き空間の対称変換)

●色付き空間群 *Б*←N.V.べーロフ

●空間群の一般化←A.M.ザモルザエフ

←V.A.コプツィク

数学月間企画講演(第13回)2024.01.20　谷 克彦

① シュブニコフが導入した「反対称」概念で, 結晶群の一般化が始まる.
ここで, 群の理論「正規拡大」が, どのように使われているだろうか.

② 群論と結晶物理は相互に影響を与えながら発展して来た.

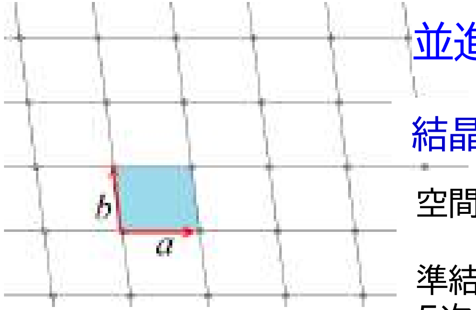
③ 群論と言えばガロア理論だが, 数学のための群論は理解より,
結晶(具体的な場)を踏まえて, 学ぶ方が理解し易い[数学月間流].

④ 2次元の簡単な例で仕組みを理解しよう.

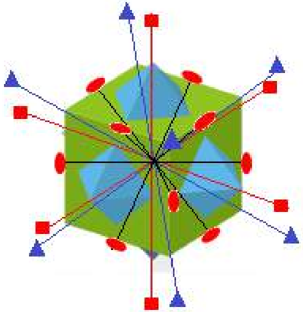
プレゼン狙いと方針

［予備知識］

結晶空間 ＝ 周期的なユークリッド空間(デジタル化された空間)



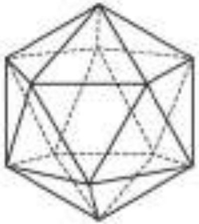
並進群(格子点)　$R_{nmp}=n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}+p\cdot\vec{c}$



結晶点群 ＝ 1点を不動点にする対称操作の群

空間周期性と両立できる回転対称には制限がある.

準結晶は正20面体の点群対称だが,
5次元格子なら両立できる.



古典結晶群 → 色付き結晶空間群 → 一般化

1890 — 空間群(230種);フェドロフ, シェンフリース, バーロー

1895 — X線の発見; レントゲン, 1901第1回ノーベル賞

1905(血の日曜日)

1912 — ラウエの実験; ラウエ(フリードリッヒ, クニッピング), 1914ノーベル賞

1913 — 結晶構造解析; ブラッグ父子, 1915ノーベル賞

1917(10月革命)

1941-1945(大祖国戦争)

1945 — 反対称の概念; シュブニコフ, ヘーシュ(1929)

1956 — 色付き空間群; ベーロフ

1970 — 空間群の一般化; ザモルザエフ, コプツィク

結晶空間群 → 高次元化 → 一般化

1900　ヒルベルト23の問題中　第18問

1911-12　ビーベルバッハ，　フロベニウス
n次元格子の対称群. n次元に, 有限個の異なる結晶空間群が存在する.

1929　ヘーシ
1945　シュブニコフ

1948　ザッセンハウス
n次元空間群：並進部分群の拡大として導出

1950-51　ヘルマン，　ハーレイ
最高位数の格子対称. 4次元ユークリッド空間で227の同型でない点群
グルサ(1889年)の結果[4x4実行列の有限群の類を列挙]を利用

1973　ブラウン，　ウォンドラチェック
4次元空間群4,783種(4,895種キラルも数える)のリスト出版

9種の最高位数の代数的結晶類(1965年Dade)から710種の代数的結晶類導出
ザッセンハウスのアルゴリズムに必要なユニモジュラ4x4行列の有限群の正規化群を得る.

● Heinrich Heesch(1929)
BieberbachとFrobenius
n次元空間群は有限個か(Hilbertの第18問)
⇒ ドイツ, スイスの数学者の関心事
高次元結晶空間

帯群, 層群など空間群内の「小群」構成 （20世紀初頭の研究）

● A.V.Shubnikov(1945)
「反対称」を, 物理性質次元による古典群の拡大として定式化.
幾何空間に物理的な変化を付与し, 特性の対称性を扱う応用的価値に注目した.
黒白群(Shubnikov), 多色群(Belov)
⇒ ソビエト結晶学派の思想
対称性理論は, それが自然科学の実践で機能するか, 将来的に機能する場合に価値がある.

高次元空間群
↓
一般化
↑
色付空間群

А.Ф.ヨッフェ　Абра́м Фёдорович Ио́ффе(1880-1960)

ウクライナ生まれのソ連の物理学者
1902年にペテルブルグ工業大学卒業後, レントゲンの弟子
1918年:ヨッフェ物理学技術研究所(ペテルブルグ)

ソビエト政権の最初の10年間の物理学はモスクワとレニングラードに集中した. 今や分散の時だ. **産業と結びつく必要のある研究所は工場(産業)が存在する場所になければばならない**. ⇒1928年, ハリコフ物理工学研究所創設

レフ・シュブニコフは, 帰国しここで極低温研究所を立ち上げ, 活発な研究が行われた(1930年代). ハリコフの物理工学研究所にはランダウもいた.

スターリン時代のユダヤ人狩りの対象となり, 1950年にその地位を追われる.
1952-1954年にはソ連科学アカデミーの半導体関連部門を監督し,
1954年にはこれを半導体研究所として独立させた。

二人のШубников

兄

Василий Васильевич Шубников

父

シュブニコフ=ド・ハース効果

Лев Васильевич Шубников(1901-1937)

レフ 甥

銃殺

Алексей Васильевич Шубников(1887-1970)

弟

アレクセイ 叔父

シュブニコフ群

祖父の名前

Василий

ヴァシリイ

ウクライナ(ハリコフ)物理工学研究所

L.D.ランダウ

モスクワ大, 結晶学研究所

E.S.フェドロフ(1853-1919)

ペテルブルグ工科大学, 化学
1880年ペテルブルグ鉱山大学, 結晶学
(Горный Институт)
貴族,　革命家
1905年ペテルブルグ鉱山大学, 学長

血の日曜日事件(1905), 2月革命(1917)


Симметрія правильныхъ системъ фигуръ.
Е. С. Федорова.
ПРЕДИСЛОВІЕ.

Trans. Mineral. Sciety
St. Petersburg, 1891

N.V.ベーロフ(1891-1982)

ペテルブルグ工科大学.　鉱物
シュブニコフが設立した新しい結晶学研究所入所,
X線部門の責任者
ゴーリキ大

ザモルザエフ (1927-1997)

・1950年：レニングラード州立大学卒
　幾何学(A.D.アレクサンドロフ)
・1953年：新設のキシネフ大学(モルドバ)へ
・離散幾何学のソ連2番目のセンターとなる.
(ステクロフ数学研究所(モスクワ)に次ぐ)
B.N.デローネなど

コプツィク(1924-2005)

モスクワ州立大学，物理学
結晶学研究所(モスクワ)
シュブニコフの後継者

Crystallographic groups of four-dimensional space
Brown, Bulow, Neubuser, Wondratschek & Zassenhaus (1978)

Hans Wondratschek (1925–2014)
鉱物学
カールスルーエ大

[定義]群

$G=\{a,b,c,\cdots\}$ 　集合Gが群と呼ばれるのは, 次の公理を満たす場合である:

0) $\forall a,b\in G \quad\rightarrow\quad a\cdot b\in G$ 　任意の2元に2項演算·が定義される

1) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ 　結合律

2) $a\cdot e=e\cdot a=a$ 　e :単位元, 左単位元

ある元e（ただ一つ)が存在し, すべての$\forall a\in G$に対して$e\cdot a=a$が成り立つ.

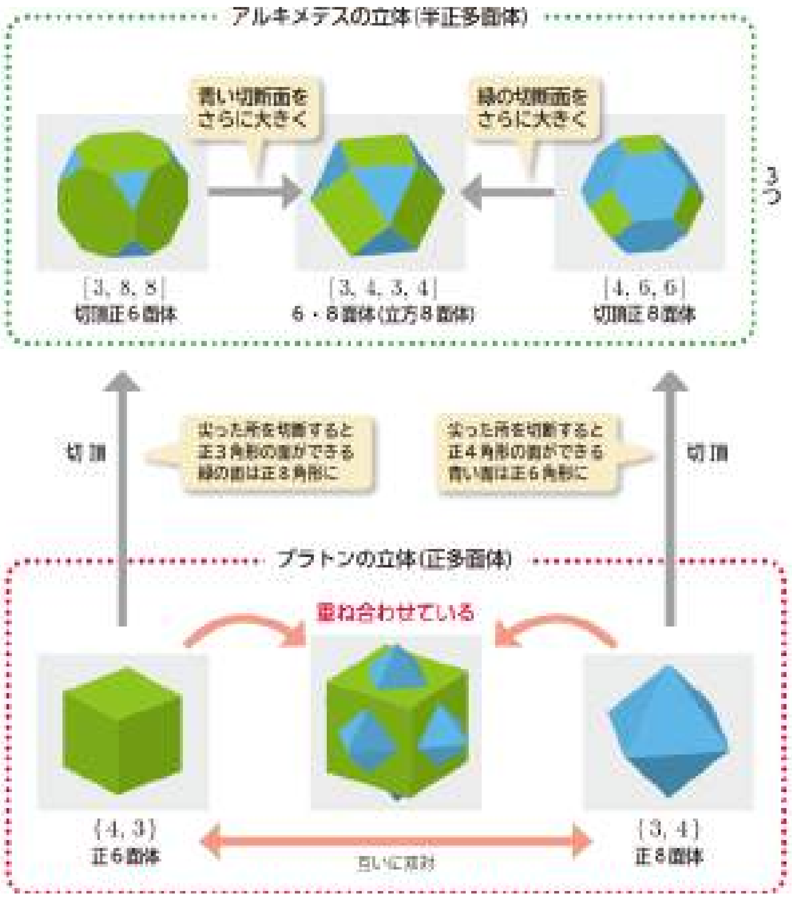
3) $a\cdot x=x\cdot a=e$ 　x : aの逆元a^{-1}, 左逆元

$\forall a\in G$に対して, xが(ただ一つ)存在する.

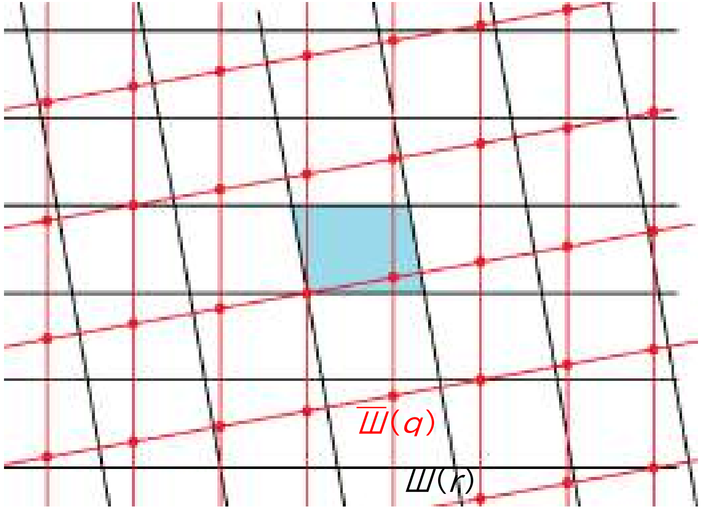
1)～3)を群の公理という.

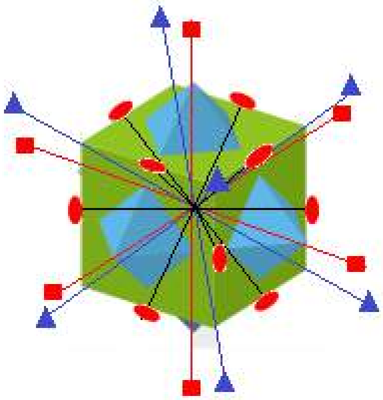
群の公理中の”ただ一つ”というのは公理に含めなくてもよい(導くことができる).

互いに双対な図形の対称性は同一　双対空間はFourier変換で変換しあう



美しい幾何学(技術評論社),p.17より





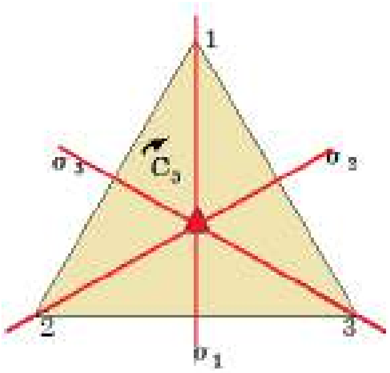
対称操作

(鏡映面は省略した)

4回対称軸 3本
3回対称軸 4本
2回対称軸 6本
鏡映面は略

点群 432
正8面体群

(2次元図形)正3角形⇒3次の対称群(置換群)　　$3m = 3 \rtimes m$



対称操作の表

1	2	3	E
1	3	2	σ_1
3	2	1	σ_2
2	1	3	σ_3
2	3	1	C_3
3	1	2	C_3^2

2次元は(表裏のない)単一表面

乗積表(演算の積)

↓後 先→	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
E	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	E	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^2	C_3^2	E	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	E	C_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	E

乗積表で確認すること:

・群を作る. 3次の対称群(有限群, 位数は6)
・可換群(Abel群)ではない.
・自明でない部分群はいくつあるか
・正規部分群: $\{E, C_3, C_3^2\}$

ラグランジュ展開：H(位数h) はG(位数g) の部分群；部分群の指数$r=g/h$

$$G=a_1H\cup a_2H\cup\cdots\cup a_rH \qquad a_i\in G,\quad a_1=1$$

適当な$a_i\in G$をr個選び，r 個の剰余類の直和で表現できる．r は一意に決まる．

$G/H\cong\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_r\}\equiv G^*$， $G=H\otimes G^*$

群Hを群G^*で拡大して群Gを得る．

［定義］ 正規部分群

$^\forall a\in G$に対して，$aHa^{-1}=H$（あるいは，$aH=Ha$）であるとき，部分群はHは正規であるという．

$G\triangleright H$ と標記する．　　・2つの左剰余類の積に関して，$aH\cdot bH=abH$が成立する．

$G\triangleright H$のときに，剰余類全体は，Hを法（写像の核）とする群G/H（商群）をなす．

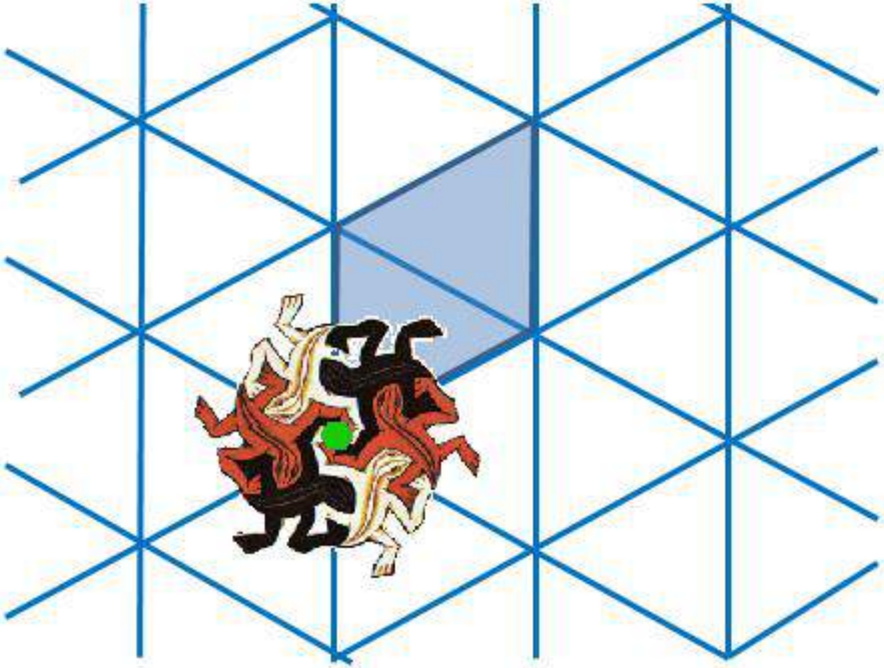
（注）部分群Hが正規部分群でない場合も，剰余類展開はできるが，剰余類は群をなさない．

結晶空間＝デジタル空間

結晶空間＝周期的＝デジタル(離散的)
蜥蜴(モチーフ)6匹で単位胞
空間群＝並進群×点群

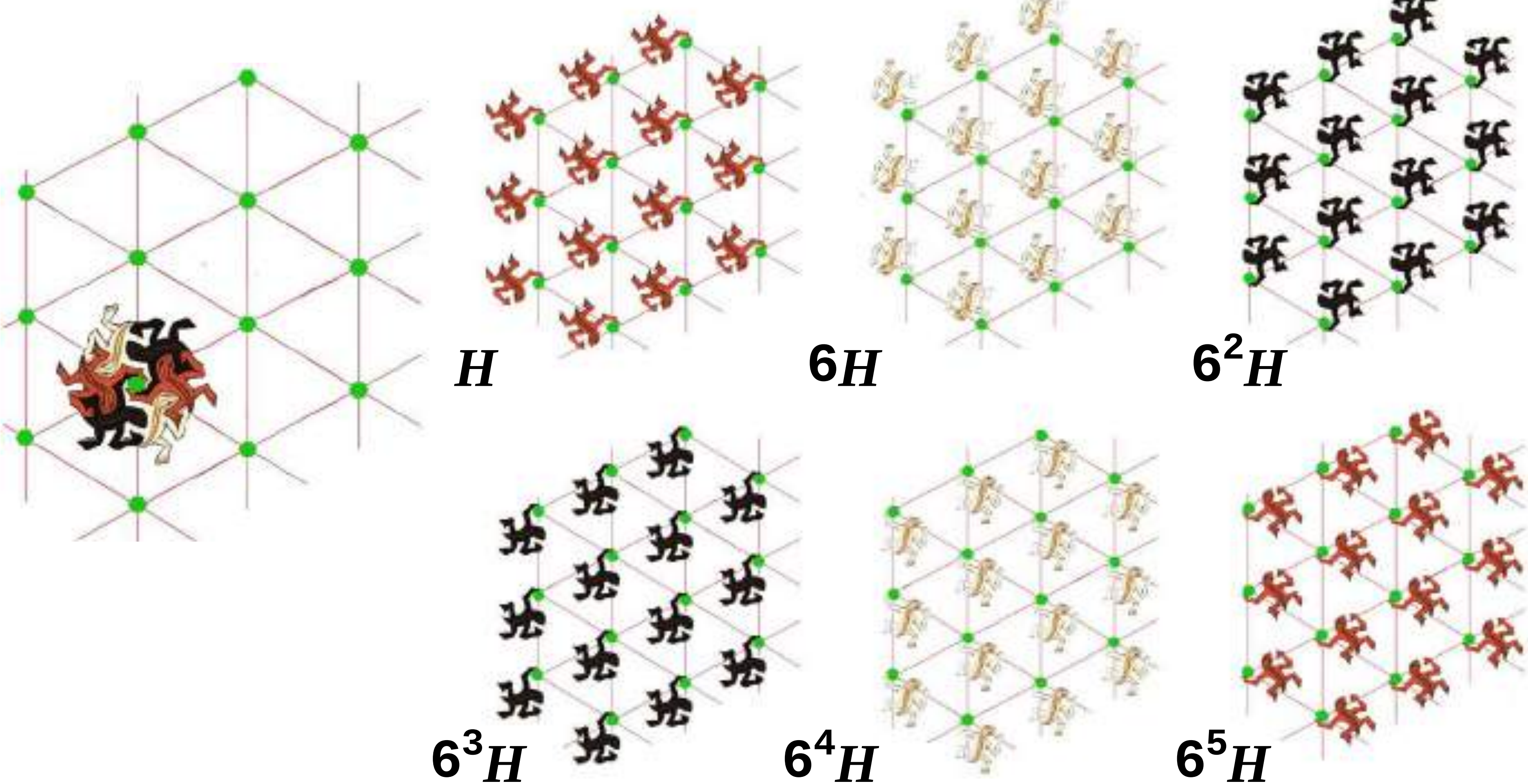
３色群　$P6^{(3)}$

M.C.Escher



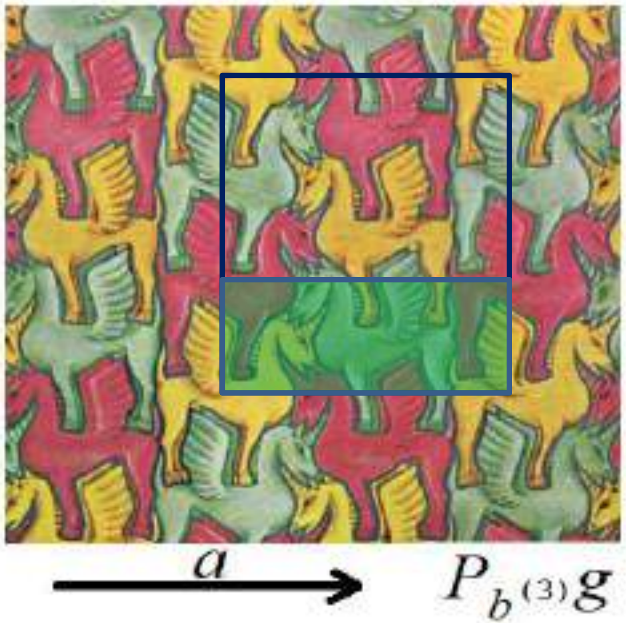
$G \triangleright H$（正規部分群）のとき,

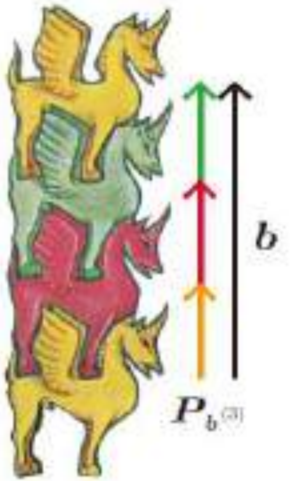
$G = g_1 H \cup g_2 H \cup g_3 H \cup \cdots \cup g_6 H$ ，　$G/H = \{g_1, g_2, g_3, \cdots, g_6\} = G^*$

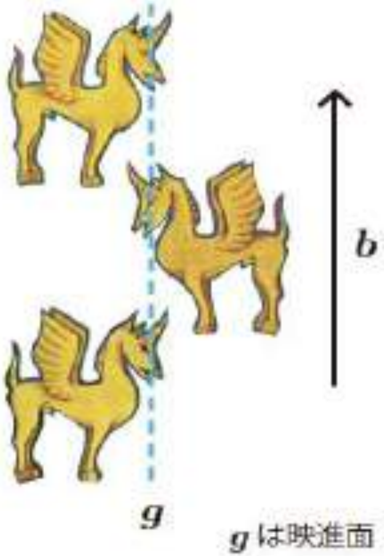


色付き平面群 $P_{b^{(3)}}g$ （Escher作品） 3色置換の原因が並進部分にある例 $G_2^{1,3}$

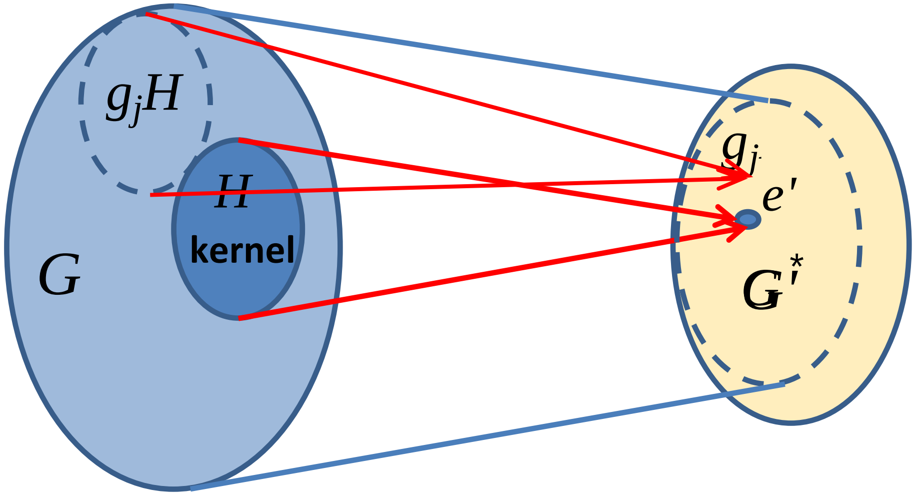
3色並進群 $b^{(3)}$ を, 点群 $\{m\}=\{g\}\,(\mathrm{mod}\,b\,)$ により拡大







群の正規な拡大



$G=g_1H\cup g_2H\cup\cdots\cup g_sH$

$G\triangleright H$ (正規部分群)ならば,

$G/H=\{g_1, g_2, \cdots, g_s\}=G^*$, $G^*\cap H=\{e=g_1\}$

[正規部分群の定義]

$^\forall g\in G$ に対し, $gH=Hg$ (あるいは $gHg^{-1}=H$)

$g_iH\cdot g_jH=g_ig_jH$ となるので,

剰余類が群をなし商群 G/H が作れる.

正規部分群 H を部分群 G^* で拡大して群 G を得る:

$G=H\otimes G^*$ 直積 $h_ig_i\cdot h_jg_j=h_ih_jg_ig_j$ $\Leftarrow G^*\triangleleft G$

$G=H\oslash G^*$ 半直積 $h_ig_i\cdot h_jg_j=h_ih_j^{g_i}g_ig_j$ ($h_j^{g_i}\equiv g_ih_jg_i^{-1}$) $\Leftarrow G^*\subset G$

$G=H\odot G^H$ 条件積 $G^H\simeq G^*(\mathrm{mod}H)$

点群　4mm　の乗積表

$$4mm=4\oslash m=2mm\odot C_4(\mathrm{mod}C_2)$$

後|先	1	C_4	C_4^{-1}	C_2	m_x	m_y	m_a	m_b
1	1	C_4	C_4^{-1}	C_2	m_x	m_y	m_a	m_b
C_4	C_4	C_2	1	C_4^{-1}	m_a	m_b	m_y	m_x
C_4^{-1}	C_4^{-1}	1	C_2	C_4	m_b	m_a	m_x	m_y
C_2	C_2	C_4^{-1}	C_4	1	m_y	m_x	m_b	m_a
m_x	m_x	m_b	m_a	m_y	1	C_2	C_4^{-1}	C_4
m_y	m_y	m_a	m_b	m_x	C_2	1	C_4	C_4^{-1}
m_a	m_a	m_x	m_y	m_b	C_4	C_4	1	C_2
m_b	m_b	m_y	m_x	m_a	C_4^{-1}	C_4^{-1}	C_2	1

正規部分群

$4mm=\{1, C_4, C_2, C_4^{-1}, m_x, m_y, m_a, m_b\}$

$2mm=\{1, C_2, m_x, m_y\}, \{1, C_2, m_a, m_b\}$

$4=\{1, C_4, C_2, C_4^{-1}\}$

$2=\{1, C_2\}$

部分群

$m=\{1, m_x\}, \{1, m_y\}, \{1, m_a\}, \{1, m_b\}$

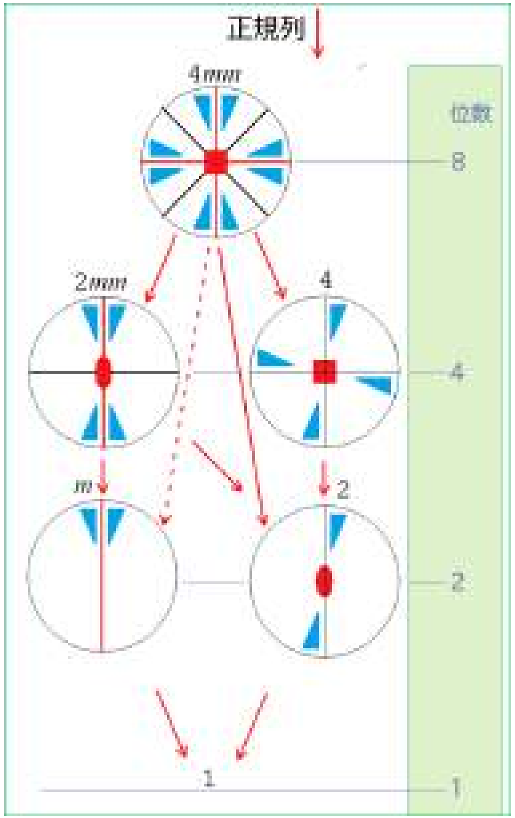
モジュラス群

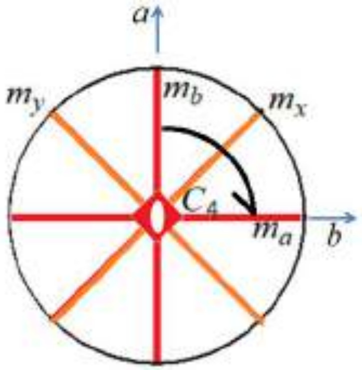
$C_4(\mathrm{mod}C_2)$

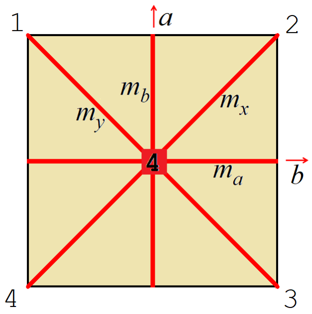
［定義］ 正規部分群 $H\lhd G$ とは

$^\forall a\in G$ に対して，$aHa^{-1}=H$

（あるいは，$aH=Ha$ ）





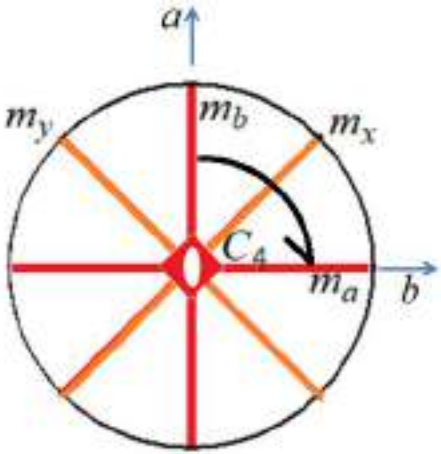


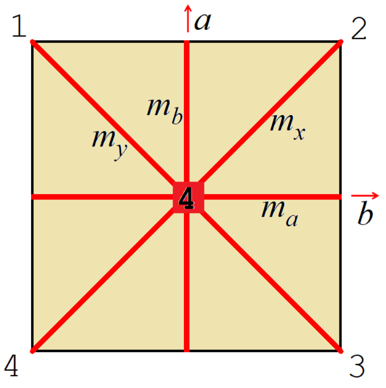
$$C_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\quad C_4^2=C_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\quad C_4^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$m_x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix},\quad m_y=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},\quad m_a=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix},\quad m_b=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

点群 $4mm$ の共役類を調べる

$ghg^{-1}\mid h$	1	C_4	C_4^{-1}	C_2	m_x	m_y	m_a	m_b
$1h1$	1	C_4	C_4^{-1}	C_2	m_x	m_y	m_a	m_b
$C_4hC_4^{-1}$	1	C_4	C_4^{-1}	C_2	m_y	m_x	m_b	m_a
$C_4^{-1}hC_4$	1	C_4	C_4^{-1}	C_2	m_y	m_x	m_b	m_a
C_2hC_2	1	C_4	C_4^{-1}	C_2	m_x	m_y	m_a	m_b
m_xhm_x	1	C_4^{-1}	C_4	C_2	m_x	m_y	m_a	m_b
m_yhm_y	1	C_4^{-1}	C_4	C_2	m_y	m_x	m_b	m_a
m_ahm_a	1	C_4^{-1}	C_4	C_2	m_x	m_y	m_a	m_b
m_bhm_b	1	C_4^{-1}	C_4	C_2	m_y	m_x	m_b	m_a





$4mm=\{1\}\cup\{C_4, C_4^{-1}\}\cup\{C_2\}\cup\{m_x, m_y\}\cup\{m_a, m_b\}$ ←互いに共役という同値関係で同値類別

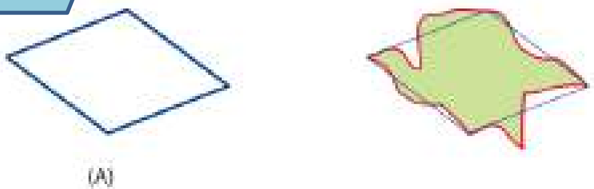
$$4mm=\{1\}+2\{C_4\}+\{C_2\}+2\{m_x\}+2\{m_a\}$$

有限群の異なる既約表現の個数は共役類の個数に等しい

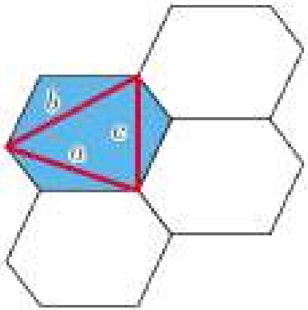
シクロブタジエン(点群$4mm$)のπ電子系の分子軌道(4つのC原子の原子軌道の線形結合)の永年方程式(固有値問題)を解き，エネルギー準位などが求まる．

4つのCの原子軌道関数を基底にして作った分子軌道(点群$4mm$)の正則表現を簡約して，それに含まれる既約表現を求める(各既約表現はエネルギー準位に対応)．

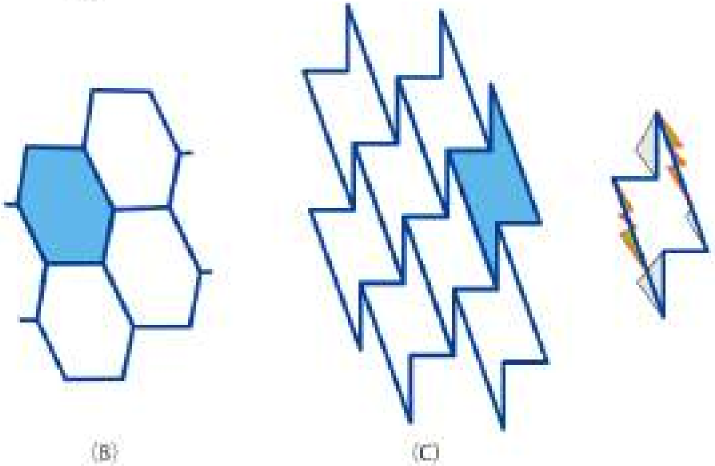
平面充填ができる平行多辺形は, 4辺形と6辺形



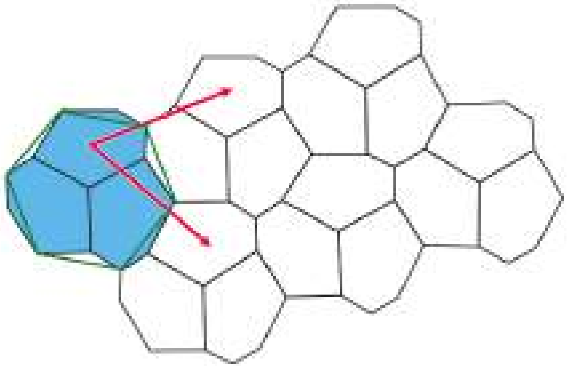
Escherのモチーフ



a, b, c のうちで独立な並進ベクトルは2つ



Taniのモチーフ



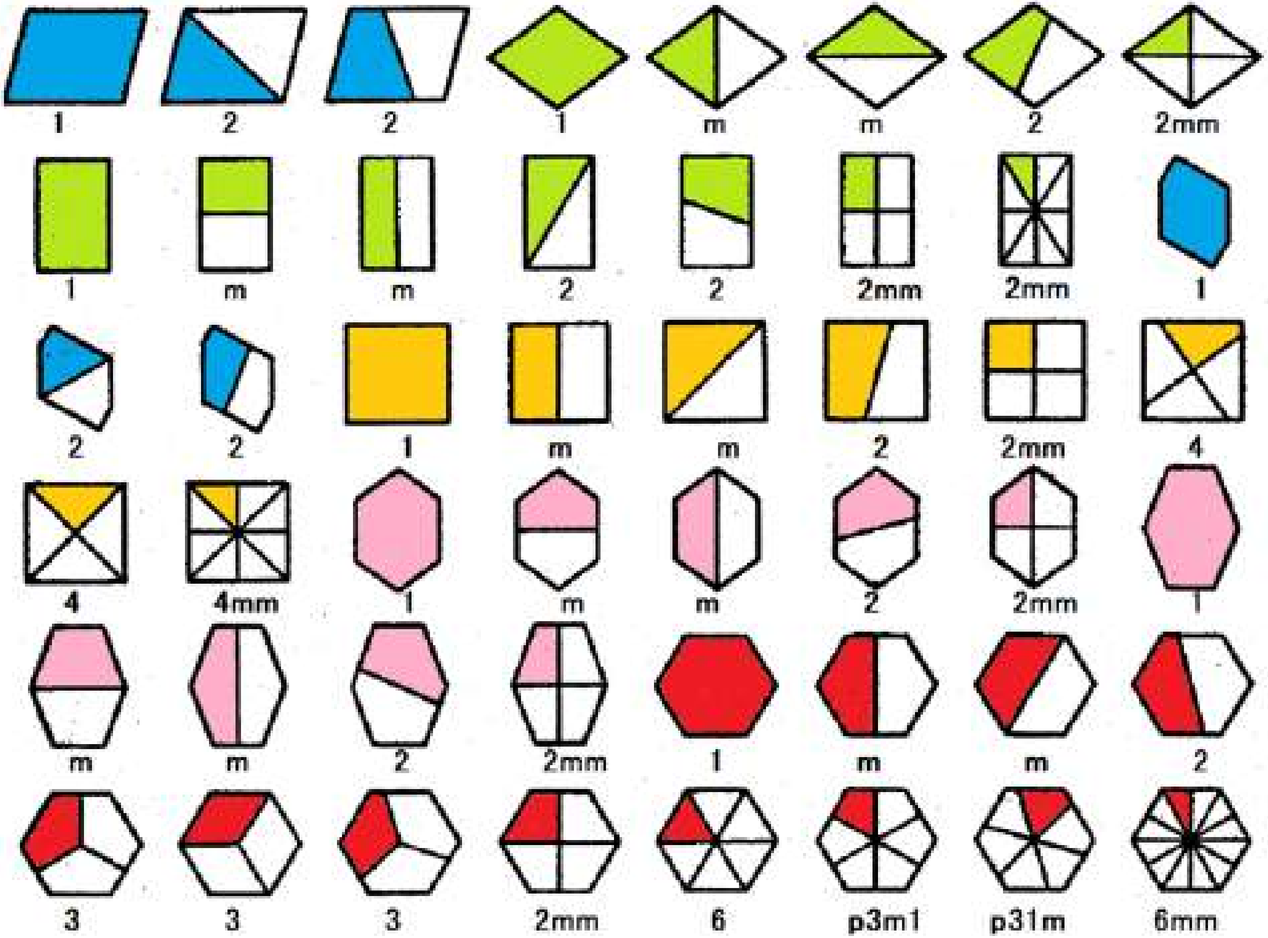
1種類のモチーフが3つ集まって平行12辺形
(平行6辺形)を作り, 平面を充填する例.

美しい幾何学(技術評論社),p.68,69より

(注)非周期タイリングも可能だがここでは扱わない

共型(symmorphic)群を求める → (非共型群4種を導き)平面群は全部で17種

13種



非共型群

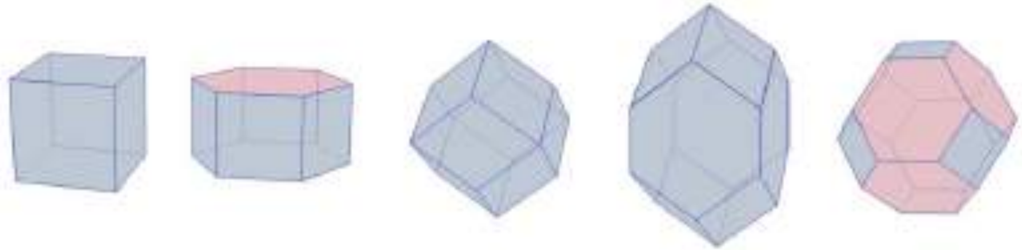
$pm \longrightarrow \begin{cases} pm \\ pg \end{cases}$

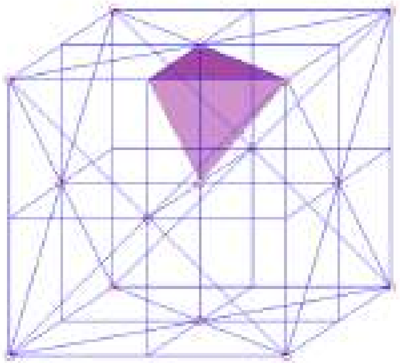
$p2mm \longrightarrow \begin{cases} p2mm \\ p2gm \\ p2gg \end{cases}$

$p4mm \longrightarrow \begin{cases} p4mm \\ p4gm \end{cases}$

3次元空間群

空間充填のできるフェドロフの平行多面体5種



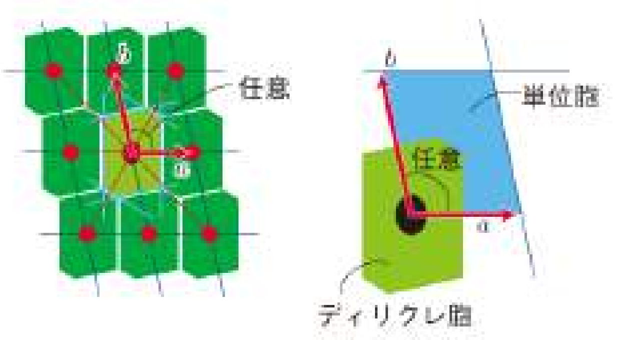


これを，等価な部分（非対称要素）に分割する.

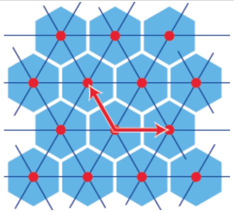
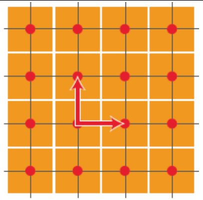
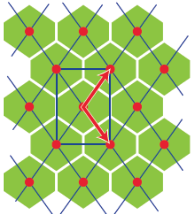
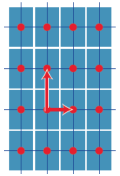
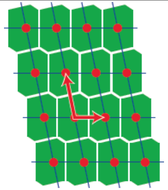
共型群73種　→　非共型群157種　→　230種（対掌体は区別している）

（注）非共型：点群成分と並進成分とが結合した対称操作を含む空間群
らせん軸，映進面など

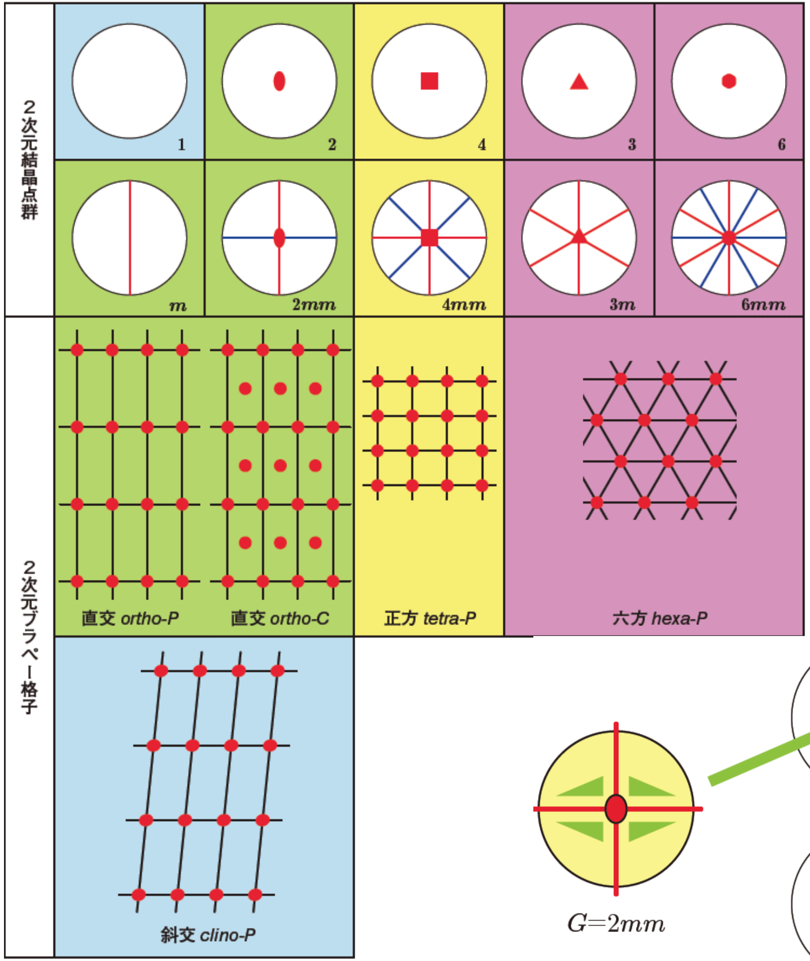
2次元ブラベー格子　5種

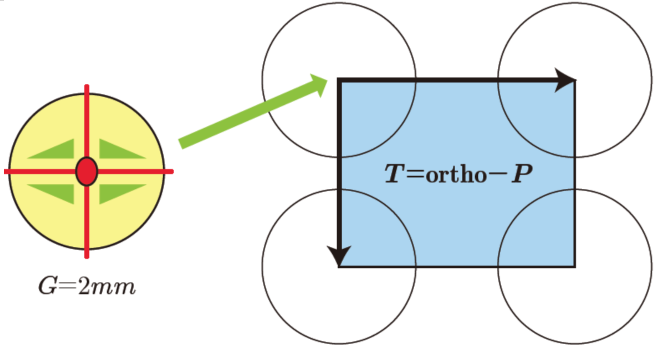


「美しい幾何学」p.55(技術評論社)より

晶系	単位胞	ブラベー格子	非座標式表示	座標式表示	点群	空間群
6方	2×正3角形		(a/a)	p	$6mm$ 6 $3m$ 3	$p6mm$ $p6$ $p3m1$, $p31m$ $p3$
正方	正方形		$(a:a)$	p	$4mm$ 4	$p4mm$, $p4gm$ $p4$
直方	長方形(2点胞) 菱形(1点胞)		$(c/b:a)$ $\left(\frac{b+a}{2}/\frac{b-a}{2}\right)$	c	$2mm$ m	$c2mm$ cm $p2mm$, $p2mg$, $p2gg$ pm, pg
	長方形		$(b:a)$	p		
斜方	平行4辺形		(b/a)	p	2 1	$p2$ $p1$

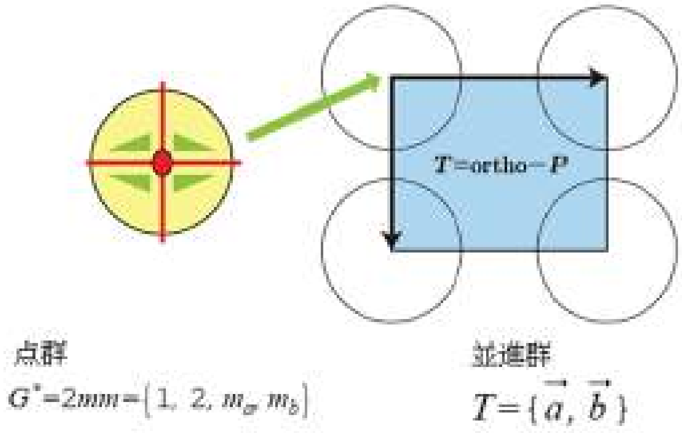
並進群を点群で拡大して空間群を得る

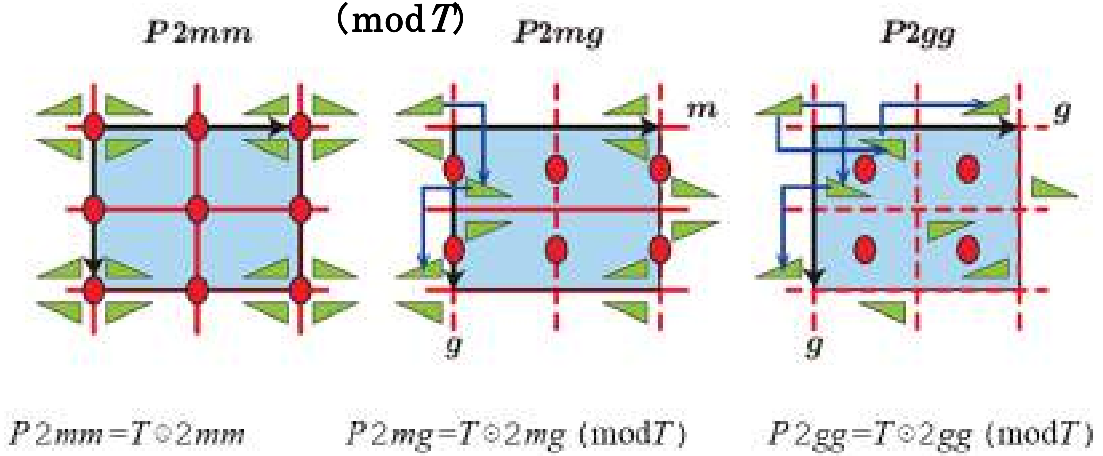




格子点に点群を配置し平面群を作る

映進 g は２回続けると格子分移動　$g^2=1$ (mod T)





共型　$P2mm$

非共型 $\left\{ \begin{array}{l} P2mg \\ P2gg \end{array} \right.$

平面群 Φ

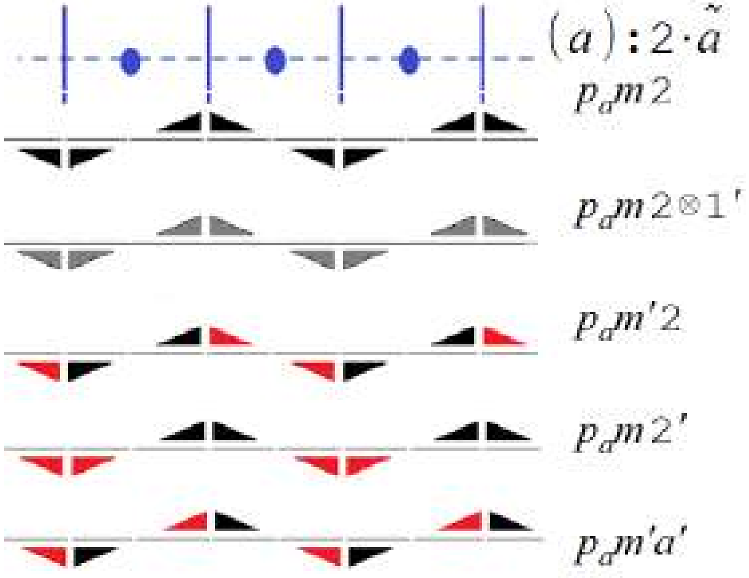
$P2mm$, $P2mg$, $P2gg$ は, 格子分移動した点は同値 (mod T) という見方をすると, $2mm$ **点群 G^*** に帰着する.

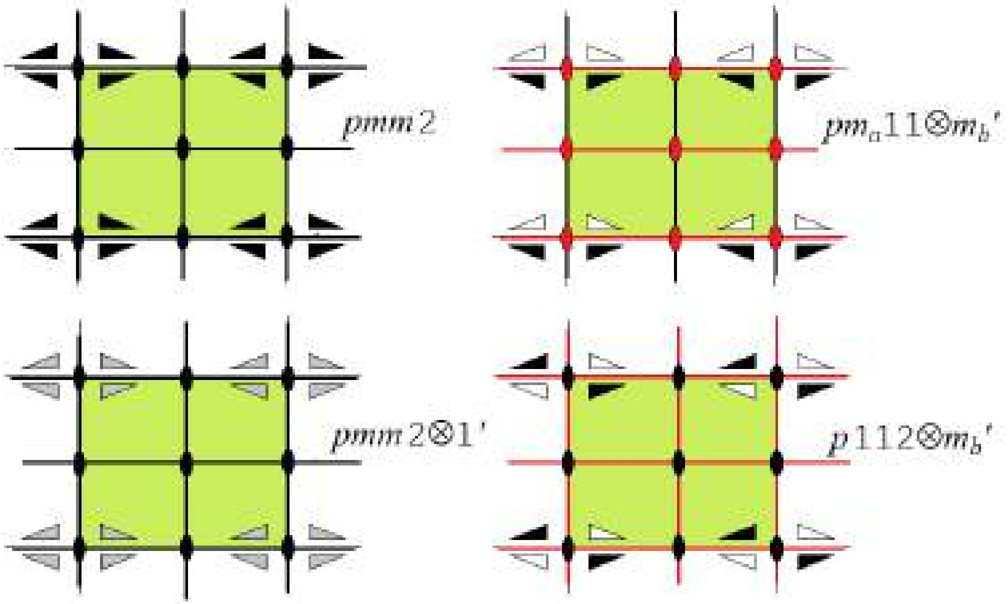
反対称概念の起源

⇒両面平面を単面平面上に, 黒白2色を用い描画した

Speiser(1927)
$7G_{2,1} \Rightarrow 31G_{3,2,1}$［3次元帯群］

Weber(1929)
$17G_2 \Rightarrow 80G_{3,2}$［3次元層群］





G_3に2値(黒白)の超幾何学次元1つの追加$G_3^{1,2}$は, 幾何学次元の増加$G_{4,3}$の1部

230$\boldsymbol{G}_3$(3次元空間群) → 1651$\boldsymbol{G}_3^1$ (3次元黒白空間群) → $\boldsymbol{G}_{4,3}$(4次元空間群の1部)

$$230\Pi(G_3)\ +230C\ +119M=1651G_3^1$$

17$\boldsymbol{G}_2$(2次元平面群) → 80$\boldsymbol{G}_2^1=\boldsymbol{G}_{3,2}$(両面層群) → 528$\boldsymbol{G}_{3,2}^1$ (3次元層黒白群)

$$17\Pi(G_2)+17C+46M=80G_2^1$$

75$\boldsymbol{G}_{3,1}$(丸棒群) → 394$\boldsymbol{G}_{3,1}^1$ (丸棒黒白群)

32$\boldsymbol{G}_{3,0}$(3次元点群) → 122$\boldsymbol{G}_{3,0}^1$ (3次元黒白点群) → $\boldsymbol{G}_{4,3,0}$ (4次元点群の1部)

性質数　　色数

$G^{l,p}_{r,t,s}$

次元　　保存される部分空間

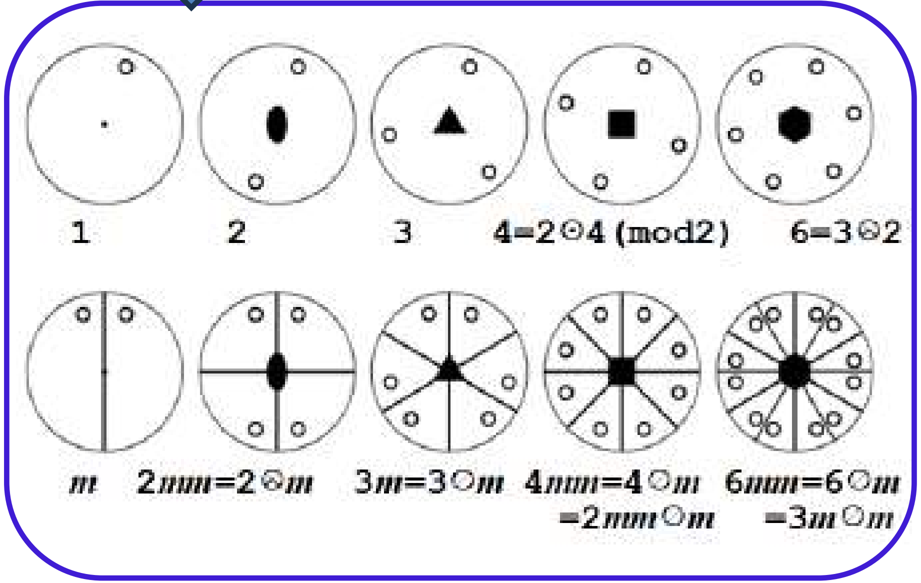
一般群の記号

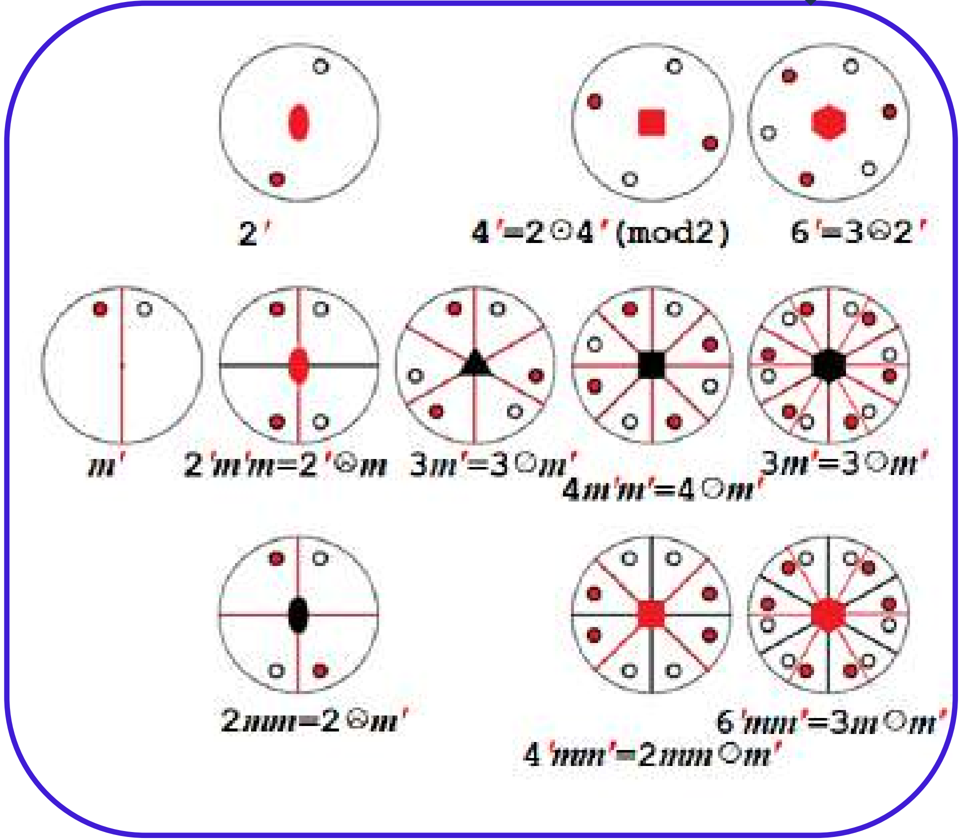
Bohm(1966)　　Koptsik(1967)

空間次元	4	3	2	1	0	2^l (反対称次元)
$G^1_{3,0}$		122	31	5	2	0
$G^1_{3,1}$		394	31	7		1
$G^1_{3,2}$		528	80			2
G^1_3		1651				3
						周期次元

空間次元	4	3	2	1	0	2^l (反対称次元)
$G_{3,0}$	227	32	10	2	1	0
$G_{3,1}$		75	7	2		1
$G_{3,2}$		80	17			2
G_3	1651	230				3
	4895					周期次元

$10\boldsymbol{G}_{2,0}$(2次元点群) → $31\boldsymbol{G}^{1}_{2,0}$（2次元黒白点群）（古典点群10 Π+中性点群10 C+黒白点群11 M）





半直積　$G=\{HA\}=H\rtimes A$ の積則　　　$G \rhd H$

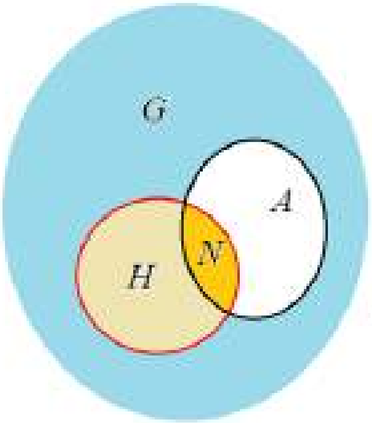
$$h_i a_j \cdot h_k a_l = h_i (a_j h_k a_j^{-1}) a_j a_l = h_i h_k^{a_j} a_j a_l$$

$$a_j h_k a_j^{-1} = h_k^{a_j} \in H \qquad h_k \longrightarrow h_k^{a_j}$$

$$A \longrightarrow \mathrm{Aut}H$$

直積は　$h_i\, a_j \cdot h_k\, a_l = h_i\, h_k\, a_j\, a_l$

（$a_j\, h_k = h_k\, a_j$，すなわち，$G \rhd H$ かつ $G \rhd A$ のとき）



$G \rhd H$

$$H \cap A = \begin{cases} \{e\} \\ N \end{cases} \qquad G/H \simeq A/N$$

半直積の一般化（リース積）
非正規の拡大へ

H，A :群，　X :左 H 集合．　$\psi, \phi \in W$:　$\psi(X)=A$ とする．

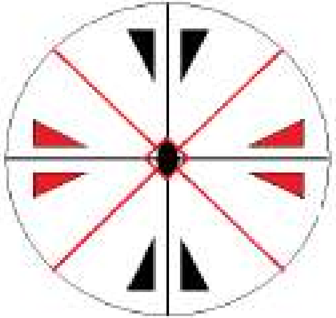
W は群をなし，H は W に群の同型として左から作用する．

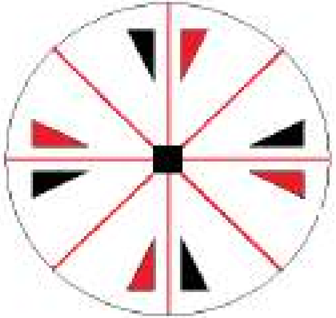
$$(h \cdot \psi)(x) = \psi(h^{-1} \cdot x)$$

［定義］半直積 $W \oslash H$ を A の H による非制限リース積という

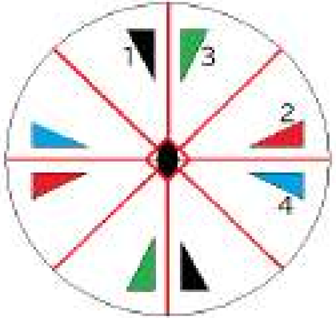
$$H \longrightarrow \mathrm{Aut}W$$

$4mm/2mm$ 反対称点群 $4mm/4$





4色点群 $4mm/2$



$4mm = 2mm \odot 4'\ (\mathrm{mod}2)$

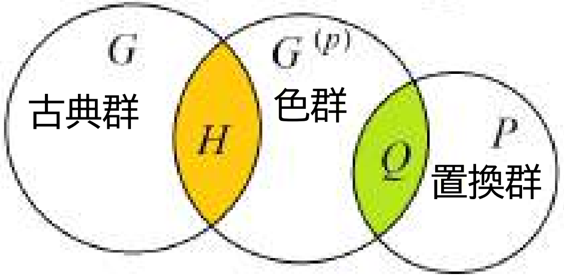
$4mm = 4 \oslash m'$

$4mm = 2 \odot 4^{(12)(34)}\ (\mathrm{mod}2)$

$4mm = 2 \circ m^{(13)(24)} m^{(13)(24)}$

色群の導出アルゴリズム

$G \triangleright H \quad P \triangleright Q$



$G/H \longleftrightarrow P/Q \qquad G^{(p)} = \{ gH \cdot \varepsilon Q \}$

色および高次元空間群の応用

(3+d)次元空間群

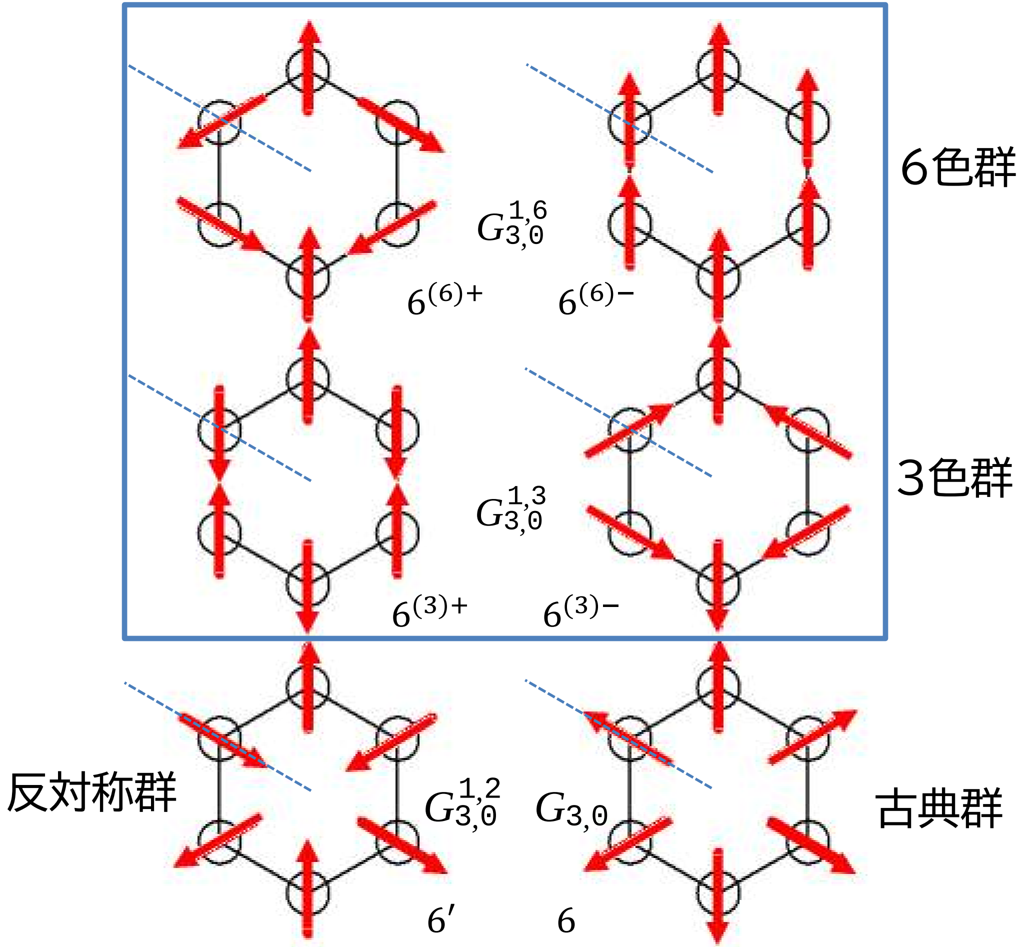
- 非整合結晶相, 変調構造, 複合分子系の記述
- 準結晶(正20面体の周期的なパッキングは可能か)
- 結晶場におけるエネルギー準位の分裂
- 反磁性相の記述
- 結晶とそこを舞台に発現する現象の対称性(注*)

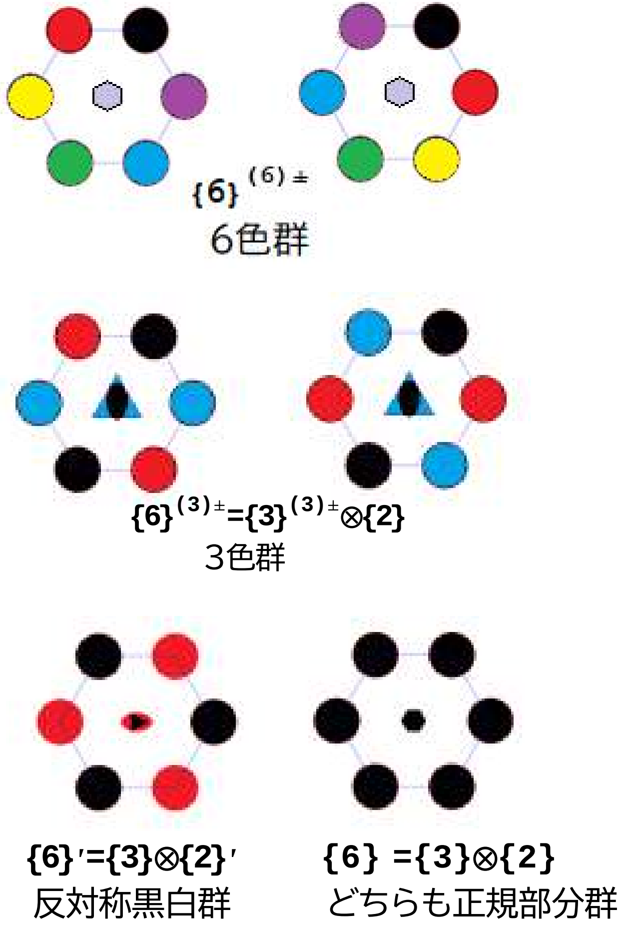
(注*)ピエール・キュリーの原理(1894)　$G_{p_i} \supseteq G_{\mathrm{cryst}} = \cap G_{p_i}$

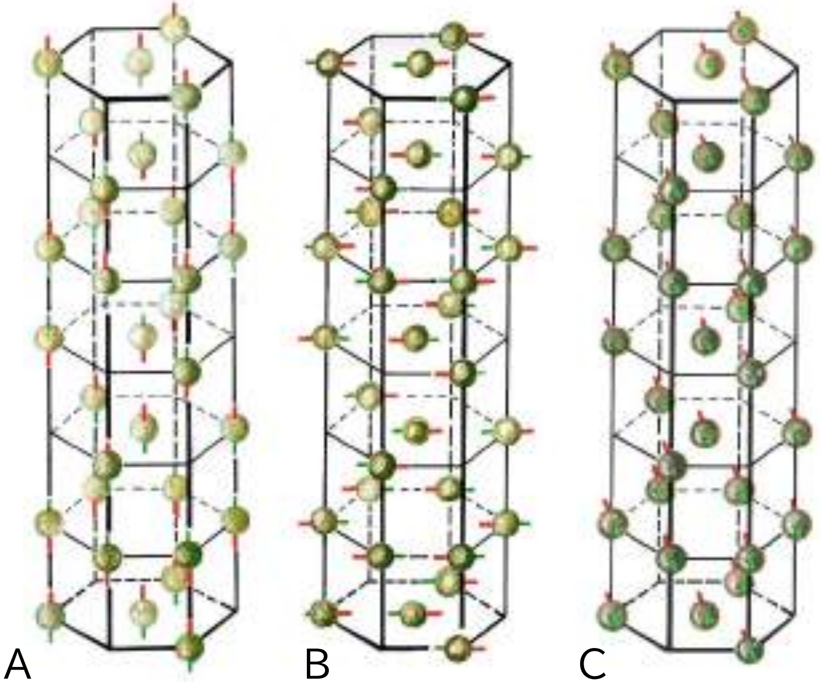
対称性$\boldsymbol{G_{pi}}$の現象iが起こるのは, 対称性$\boldsymbol{G_{pi}}$ (または, その部分群)の舞台で可能である.

「原因はすべて結果に反映されるべきである」という因果律

古典群6の磁気解釈例


6色群
$G_{3,0}^{1,6}$
$6^{(6)+}$
$6^{(6)-}$
3色群
$G_{3,0}^{1,3}$
$6^{(3)+}$
$6^{(3)-}$
反対称群
$G_{3,0}^{1,2}$
$G_{3,0}$
古典群
$6'$
6


$\{6\}^{(6)\pm}$
6色群
$\{6\}^{(3)\pm}=\{3\}^{(3)\pm}\otimes\{2\}$
3色群
$\{6\}'=\{3\}\otimes\{2\}'$
反対称黒白群
$\{6\}=\{3\}\otimes\{2\}$
どちらも正規部分群



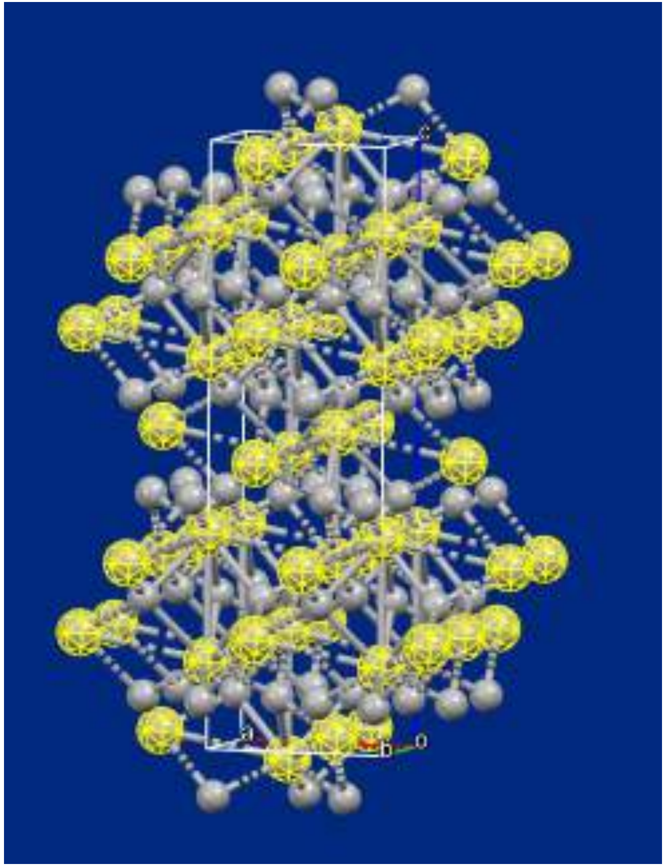
磁気モーメントは軸性ベクトルのため

→ではなく＿＿を用いた.

A　反強磁性相　α-Fe_2O_3（t<-20℃）

B　反強磁性相　コランダム型構造で実現

C　強磁性相　　α-Fe_2O_3(-20<t<675℃)



α-Fe_2O_3の結晶構造からFe原子のみ抽出