

差分法を通じて眺める連続と離散

齊藤 宣一 (さいとう のりかず)

東京大学大学院 数理科学研究科

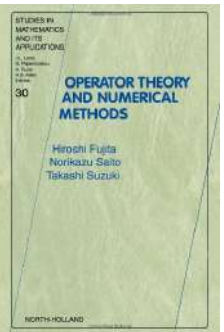
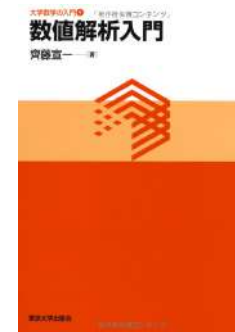
2024年度数学月間懇話会 (第20回)

東京大学大学院数理科学研究科 2024年7月22日

準備してみると、
差分法の話は一部のみでした。
申し訳ありません。



数値解析



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

齊藤 宣一 (さいとう のりかず)



数理科学連携基盤センター センター長
数物フロンティア国際卓越大学院 プログラムコーディネーター

日本数学会 (評議員、代議員)
日本応用数理学会 (理事、監事)
数学教育学会

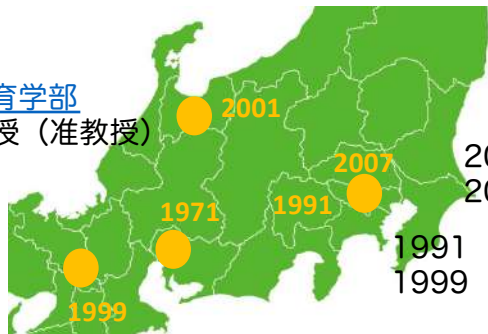
共同研究

- ダイキン工業株式会社
- Arithmer株式会社
- 株式会社豊田中央研究所
- 住友重機械工業株式会社

アウトリーチ

- 東京都立竹早高等学校 2024
- 群馬県立前橋高等学校 2023
- 東京都立富士高等学校附属中学校 2022
- 地方独立行政法人神奈川県立産業技術総合研究所(KISTEC) 2016, 2018, 2018

2001 [富山大学教育学部](#)
講師、助教授 (准教授)



博士学位14人

2007 東大数理 准教授
2017 教授

1991 [明治大学数学科](#) 入学
1999 博士課程修了

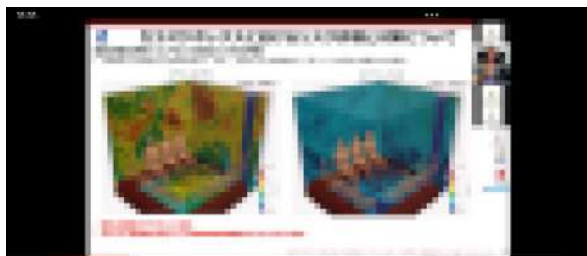
1999 [国際高等研究所](#) & [RIMS](#)
ポスドク

1990 総量規制
18歳人口
1991 200万
2022 110万

専門は、偏微分方程式の数値解析
これはどういう学問か？

COVID-19の飛沫・エアロゾル拡散

理化学研究所（理研）計算科学研究センターのグループは、2020年に世界最速のスーパーコンピュータ「富岳」を用いて、COVID-19の飛沫・エアロゾル拡散モデルを構築し、感染症疫学のデジタルトランスフォーメーションに初めて成功



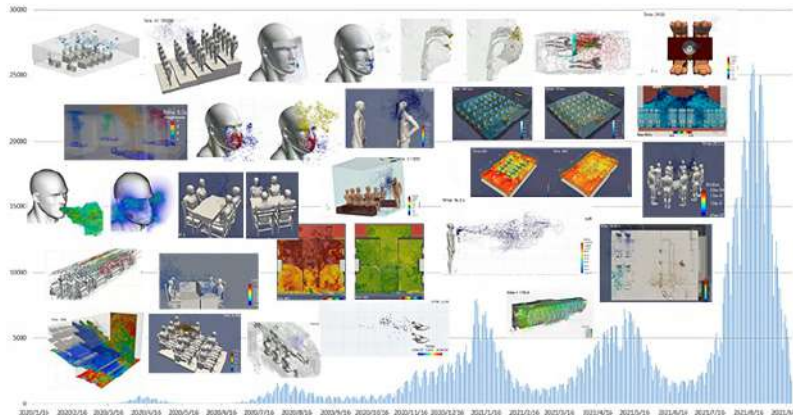
スーパーコンピュータ「富岳」記者勉強会 室内環境におけるウイルス飛沫感染の予測とその対策 (4)
19:428 視聴数 2:55 残り 0:00

COVID-19
COVID-19に関する最新の情報は内閣官庁ホームページをご覧ください

さらに詳しい情報も Google で

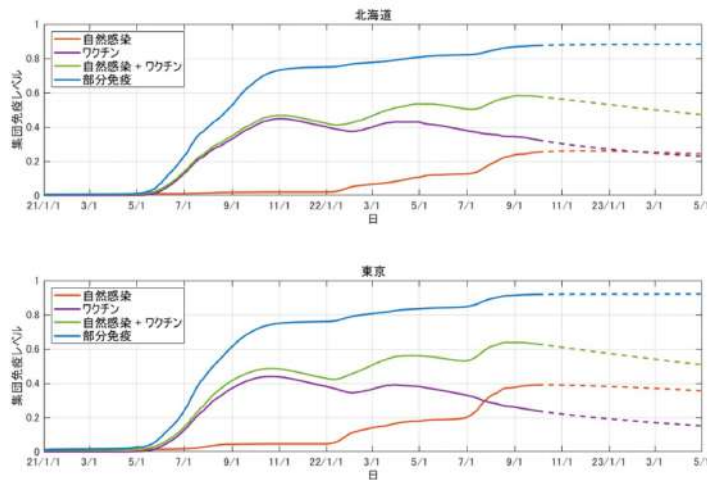
rikenchannel 2.5k 名

チャンネル登録



COVID-19の流行時期の予測

国内の主要な5都道府県（北海道、東京、大阪、福岡、沖縄）を対象に、2022年9月30日時点のCOVID-19に対する集団免疫レベルの推計を行った。また、免疫の減衰を考慮したシミュレーションにより、再流行時期の予測を行なった



どうやってシミュレーションしているか？

方程式を立てて、それを解いている！

ただし

微分方程式

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = \nu \Delta u_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + f_1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j} = \nu \Delta u_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + f_2$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} = \nu \Delta u_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + f_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{dS}{dt}(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$\frac{dI}{dt}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

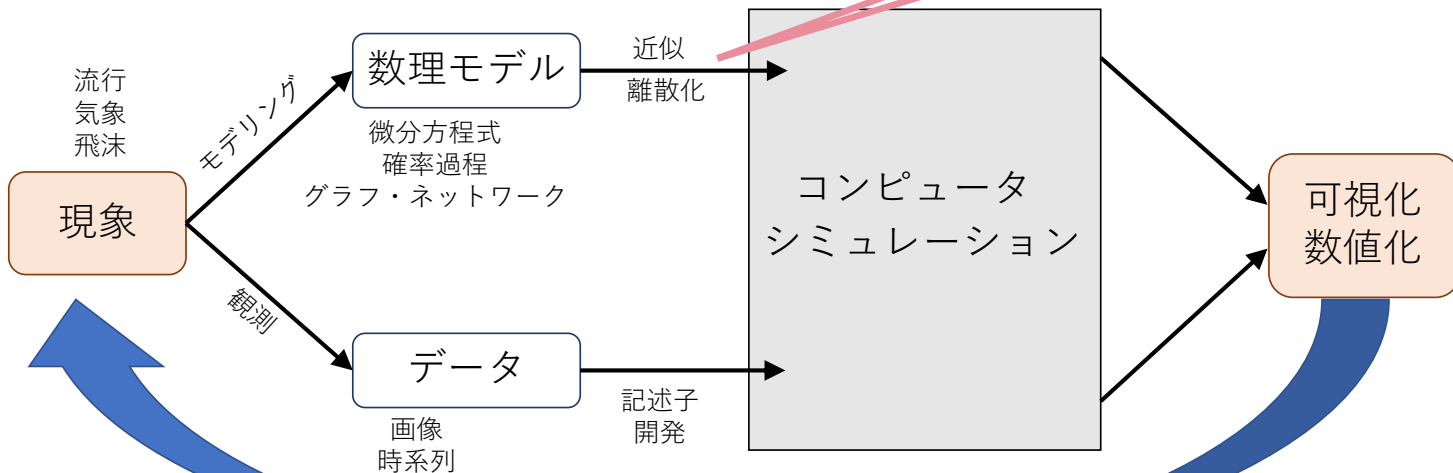
$$\frac{dR}{dt}(t) = \gamma I(t)$$

普通方程式は、解くと数字が出てくる
微分方程式は、解くと関数が出てくる

何枚か、高校生向けに作ったスライドを使いまわしますので、ご容赦ください

現実の現象とシミュレーション

ここが数値解析！

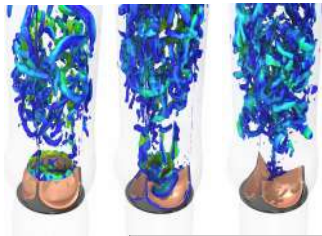


現象の理解・制御・予測

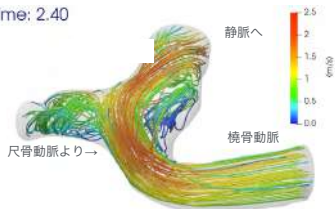
ナビエ・ストークス方程式

いろいろな応用！

- ✓ 人の血管系のシミュレーションが可能
- ✓ 医療において役立っている



Time: 2.40



"Numerical computation of blood flow for a patient-specific hemodialysis shunt model", S. Rathore, T. Uda, V.H.Q. Huynh, H. Suito, T. Watanabe, H. Sugiyama, D. Srikanth, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, DOI: 10.1007/s13160-021-00469-9, 2021.

ナビエ・ストークス方程式の数理 新装版

岡本 久著



名著
復刊

数学的理論と流れのイメージを
融合させた定評あるテキスト

邦字書にも期間できるより、でいかに算議、目録的な
集約の電子データ型を従来の紙媒体に置き換えて、読者の利便性
に照準できるように配慮、デジタル・ナビエ・ストークス方程式の
豊富な図解～読者を通す。

東京大学出版会

<https://www.claymath.org/millennium-problems/>



Navier-Stokes Equation



Image: Sir George Gabriel Stokes (13 August 1819–1 February 1903). Public Domain

Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.

This problem is: **Unsolved**

Rules:

Rules for the Millennium Prizes

Related Documents:

Official Problem Description

Related Links:

Lecture by Luis Caffarelli

解の存在証明が未解決 ➡ ミレニアム問題

100万ドル (今だと1億6千万くらい)

ナビエ・ストークス方程式

飛沫・エアロゾル拡散や数値予報に登場する

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} &= \nu \Delta u_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + f_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j} &= \nu \Delta u_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + f_2 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} &= \nu \Delta u_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + f_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0\end{aligned}$$

1823年 C. Navier (フランス)

1845年 G. Stokes (イギリス)



2022年9月 北海道大学

人類最初の微分方程式

惑星運動の方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{GM}{r(t)^3} x(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{GM}{r(t)^3} y(t)$$

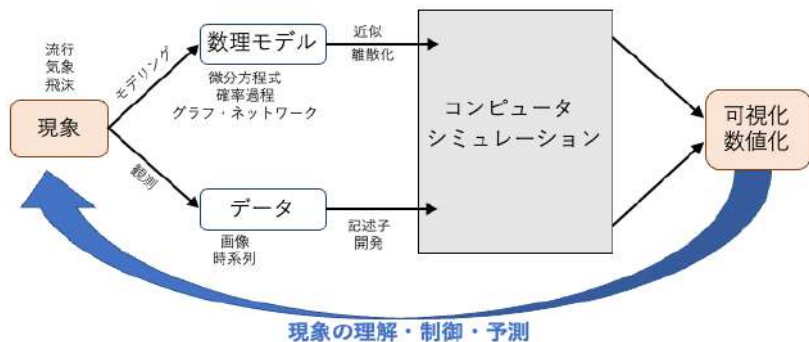
$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\frac{GM}{r(t)^3} z(t)$$

$(x(t), y(t), z(t))$: 惑星の位置
 G : 万有引力定数
 M : 太陽の質量
 $r(t)$: 太陽と惑星の距離



I. Newton
(1642-1727)

現実の現象とシミュレーション



- ✓ その後、**流体力学**、**固体力学**、**電磁気学**などで、現実現象を記述する微分方程式が、次々に発見される
- ✓ ただし、それらを解くことは簡単ではなかった
- ✓ 近代的な**コンピュータ**の発明により、実際に、これらの微分方程式を解くことができるようになり、私たちの生活を豊かにしている

- 1947年 ENIAC (アメリカ)
- 1952年 IBM701

余談

1952年から1953年にかけて、流体力学者の川口光年は、円柱を過ぎる粘性非圧縮流体（レイノルズ数40）の一樣流の数値計算を行った。コンピュータは利用できる状態になく、タイガー計算機という手動計算機で毎週20時間、約1年半を要する大計算であったそうである。

The numerical integration in this study took about one year and a half with twenty working hours every week, ... (J. Phys. Soc. Jpn. 8, 747-757, 1953)

<https://www.tiger-inc.co.jp/temawashi/temawashi3.html>



熱方程式 (熱伝導方程式)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\int_0^1 u(x, 0) \sin(n\pi y) dy \right) e^{-k(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

$u(x, t)$ ($0 \leq x \leq 1, t \geq 0$) 針金の温度

Fourierの方法で「解ける」

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

境界条件 $u(x, t) = 0$ ($x = 0, 1$)

差分商

$$\frac{df}{dx}(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

$$\frac{df}{dx}(a) \approx \frac{f(a+\frac{h}{2}) - f(a-\frac{h}{2})}{h}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}(a) \approx \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

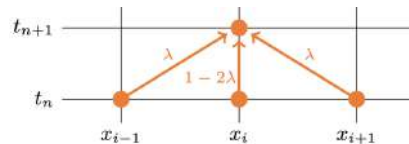
差分法

最も単純で強力な方法 $U_i^n \approx u(i\Delta x, n\Delta t)$

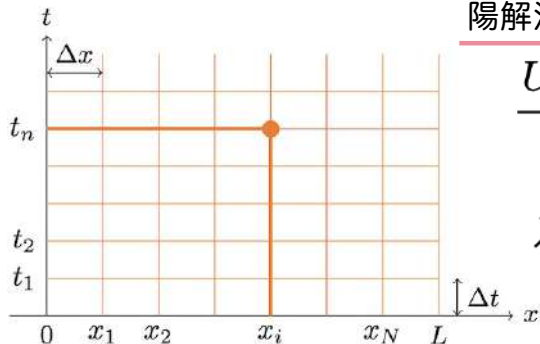
陽解法

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

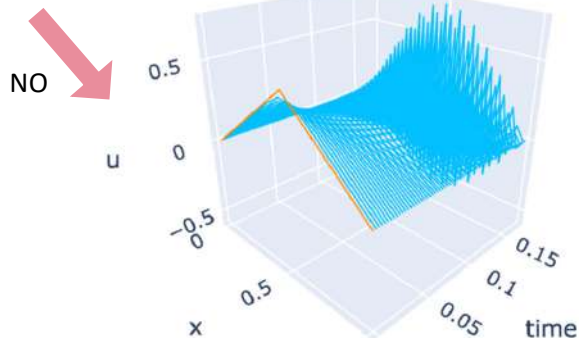
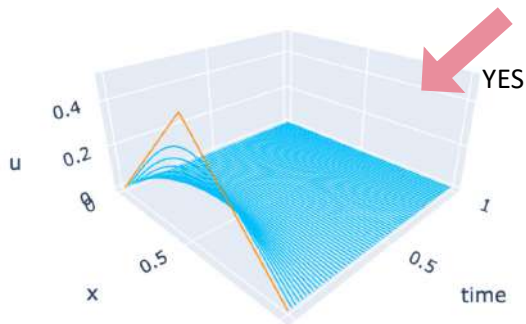
$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$



$$U_i^{n+1} = (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n)$$



実際、計算してみると $\lambda \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{1}{2} \Delta x^2$ が必要



差分解の L^∞ 安定性

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^n| \leq \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^0|$$

証明. $|u_i^{n+1}| \leq (1 - 2\lambda)|u_i^n| + \lambda(|u_{i-1}^n| + |u_{i+1}^n|) \quad (1 \leq i \leq N)$

となる. ここで, $M_n = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^n|$ とおくと, この不等式により,
 $|u_i^{n+1}| \leq (1 - 2\lambda)M_n + \lambda(M_n + M_n) = M_n$ となるから, 両辺の i についての最大値をとると,
 $M_{n+1} \leq M_n$ を得る. したがって, $M_n \leq M_0$, すなわち,

これは、熱方程式の解の持つ性質（ L^∞ 安定性、最大値原理）に対応するもの

波動方程式

ギターの弦のように真っ直ぐに張った弦の横振動は、波動方程式で記述される

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u(x, t)$ 弦の鉛直方向の変位

$$U_i^n \approx u(i\Delta x, n\Delta t)$$

$$\frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

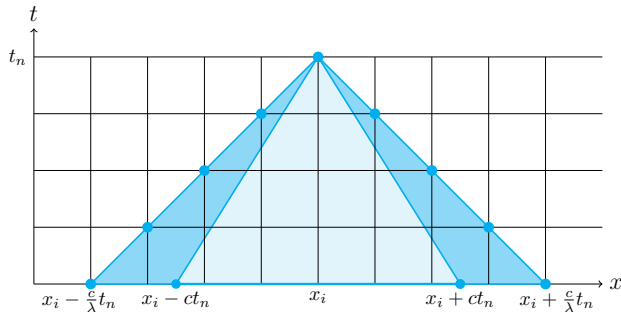
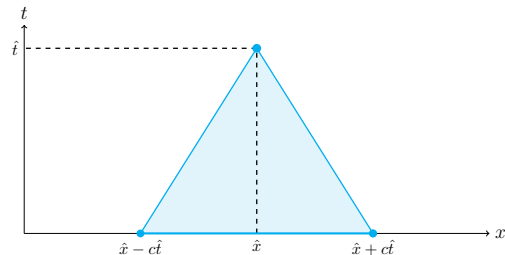
Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件 $\lambda = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

初期条件 $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$

の下でd'Alembertの解

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x+ct) + f(x-ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \right]$$

依存領域





Richard Courant (1888--1972)



Kurt Otto Friedrichs (1901--1982)



Hans Lewy (1904--1988)

https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Courant

https://en.wikipedia.org/wiki/Kurt_Otto_Friedrichs

https://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Lewy

R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, Über die partiellen
Differenzengleichungen der mathematischen Physik.
Math. Ann. 100 (1928), no. 1, 32--74.

Courantは、有限要素法のアイデア
もいち早く提出している

R. Courant, Variational methods for the solution of
problems of equilibrium and vibrations,
Bull. Amer. Math. Soc., Vol.49, pp. 1--23, 1943.

再度、熱方程式（熱伝導方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{陽解法} \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{1}{2} \Delta x^2 \quad \text{空間刻み幅に対して時間刻み幅を十分に小さくしなければならない}$$

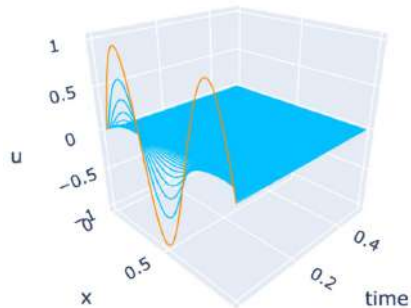
「無条件」かつ高精度の方法 De Fort-Frankelの方法

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{U_{i-1}^n - (U_i^{n-1} + U_i^{n+1}) + U_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

E. C. Du Fort and S. P. Frankel, Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations.
Math. Tables Aids Comput. Vol.7, pp. 135--152, 1953.

De Fort-Frankelの方法で計算してみる

$$\Delta t = \alpha \Delta x^2$$



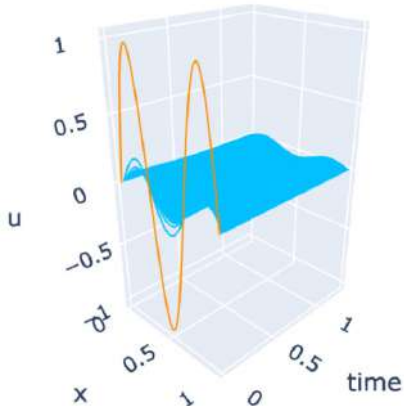
$$\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ の解に収束}$$

「高級」な数学を知らなくても
微積分の知識があれば、数学的に
説明できる

$$\Delta t = \beta \Delta x$$



$$\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ の解に収束}$$

$\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ の方法は自明ではない！

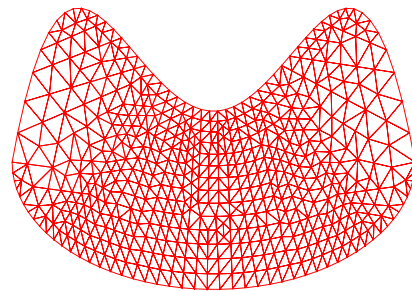
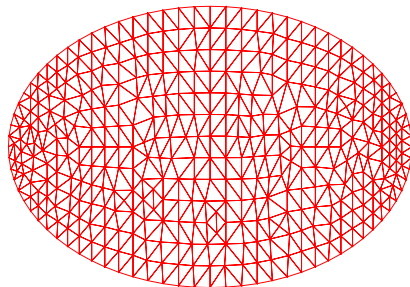
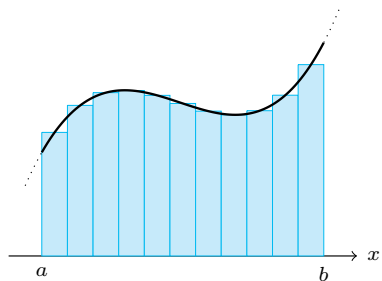
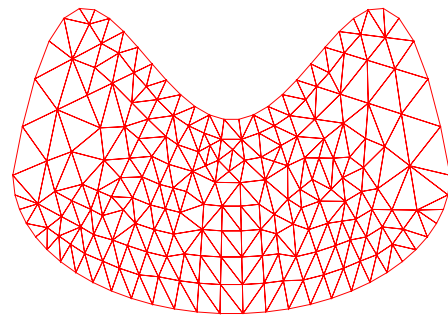
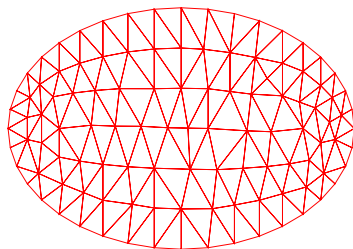
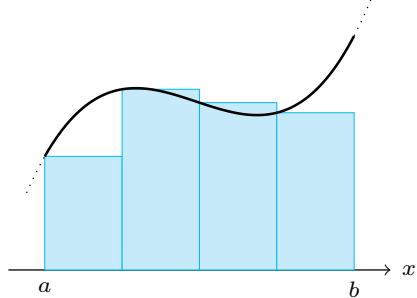
発散してくれれば、実害は少ない
しかし、収束すると厄介である

意図しない問題を、正しく解いてしまう！

近似であればこそ、数学理論で周りを固める必要がある

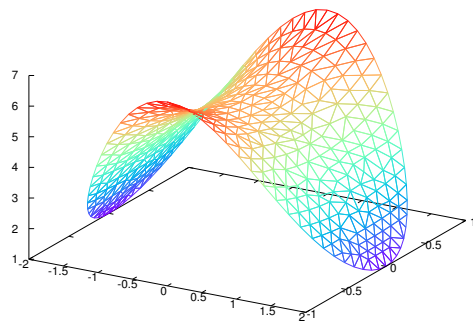
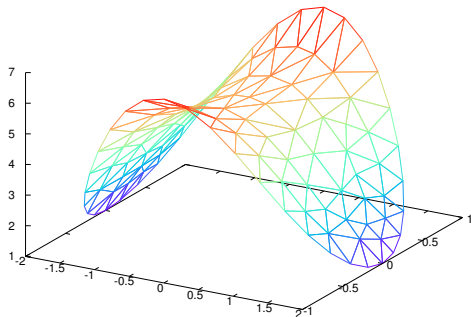
こういう問題 (issue) は、実はよくある。数値解析から離れてみよう

曲線で囲まれた部分の面積



曲面の面積？

次を準備しておく：曲面の三角形分割



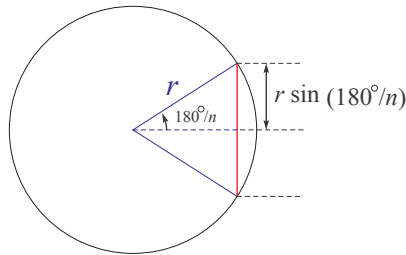
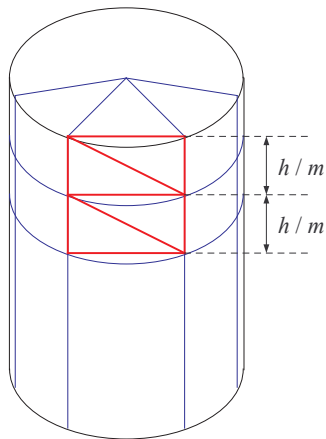
- 各三角形の各頂点は曲面上にあり，各三角形は三頂点を結んでできる平らな図形（ふつうの三角形）とする
- 三角形をすべて集めてできる図形は，もとの曲面には含まれない
- このような三角形の集合を曲面の三角形分割
- 三角形の面積の総和を三角形分割の面積
- 三角形を小さくしていく操作を分割を細かくするという



三角形分割を限りなく細かくすることで，曲面の面積を求めることはできるだろうか？

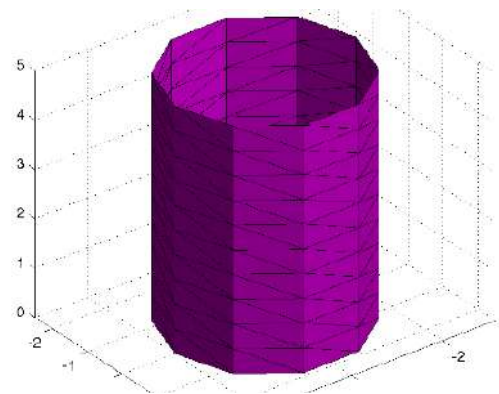
円柱（半径 r ，高さ h ）の側面積を考える
 側面積 $S = 2\pi rh$

方法1 円柱を縦に m 等分
 底面の円周上に等間隔に n 個の点を取る
 上面と下面の対応する点を線で結ぶ 長方形
 に対角線を入れて三角形を作る



$$S_n = 2rhn \sin \frac{\pi}{n}$$

(実は、 m はでてこない)

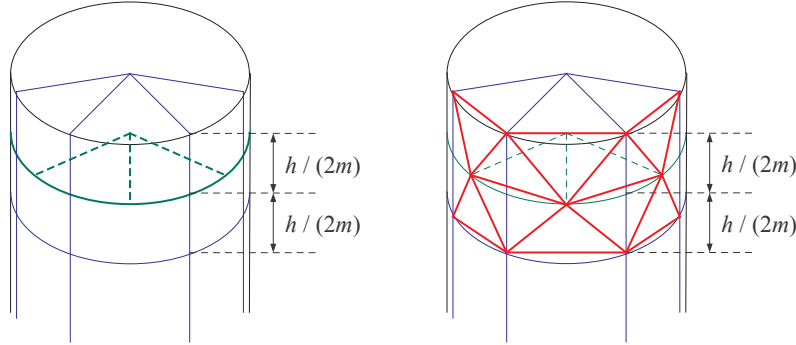
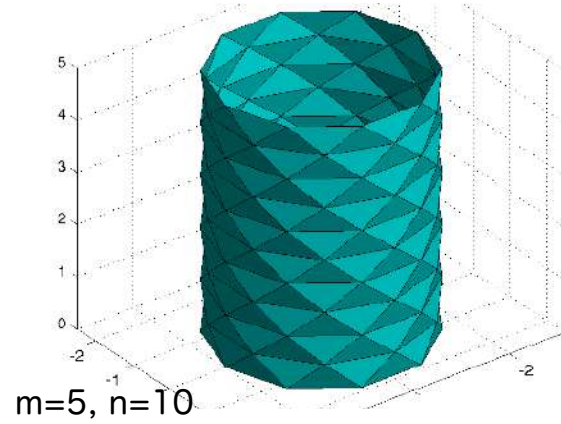


n	S_n	$ S_n - 20\pi $
16	62.4289	0.4030
32	62.7310	0.1009
64	62.8066	0.0252
128	62.8255	0.0063
256	62.8303	0.0016
512	62.8315	0.0004

$r=2$, $h=5$

三角形の作り方は，これだけではない！

方法2 円柱を縦に2m等分する
 各「切れ目」の底面の円周上に等間隔に
 n個の点を取る（前と同じ）
 ただし，今度は，半分ずらしたものを交
 互に考える
 これらを利用して三角形を作る



$$T_{n,m} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2r \sin \frac{\pi}{n}}_{\text{底辺}} \cdot \underbrace{\sqrt{r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{h}{2m}\right)^2}}_{\text{高さ}} \cdot \underbrace{(2 \cdot n \cdot 2m)}_{\text{個数}}$$

n	T _{n,n}	T _{n,n} -20π
16	64.2894	1.4575
32	63.2058	0.3739
64	62.9260	0.0941
128	62.8554	0.0236
256	62.8377	0.0059
512	62.8333	0.0015

r=2, h=5, m=n

しかし、、、引き続き「方法2」を考える

n	$T_{n,(n^2)}$	$ T_{n,(n^2)} - 20\pi $
16	253.5	190.6
32	253.3	192.4
64	253.7	192.9
128	253.8	193.0
256	253.9	193.0
512	253.9	193.1

n=5, m=25 r=2, h=5, m=n²

n	$T_{n,(n^3)}$	$ T_{n,(n^3)} - 20\pi $
16	3931.2	3868.4
32	7918.7	7855.9
64	15865.8	15802.9
128	31745.7	31682.9
256	63498.5	63435.7

r=2, h=5, m=n³

n=3, m=27

$$n \rightarrow \infty$$

$$T_{n,m} \rightarrow \begin{cases} 2\pi r h & (m = n) \\ 2\pi r \sqrt{h^2 + \pi^4 r^2} & (m = n^2) \\ +\infty & (m = n^3) \end{cases}$$

実際、見やすいように変形すると：

$$T_{n,m} = 2\pi r \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \sqrt{h^2 + \pi^4 r^2 \left(\frac{m}{n^2}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4}$$

シュワルツの提灯

一松信, 解析学序説 (下巻), 裳華房, 1967年, p. 199

・・・この立体を仮にシュワルツの提灯とよぼう.

・・・よく考えてみればこれは当然かもしれない. n に比べて m をものすごく多くすれば, 小三角形は激しく波うち, 見掛け上狭い範囲に, おびただしい面積をもつ面がおりたたまれていることになる (提灯という名前はこれからつけた).

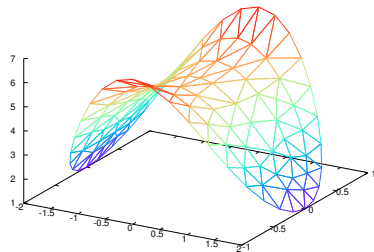
曲線の場合には内接折れ線を細かくすれば, 弦と弧の方向が自然に近づいてきたが, 曲面の場合には, ただ分割を細かくしただけではそうならないのである.

曲面の面積と三角形分割

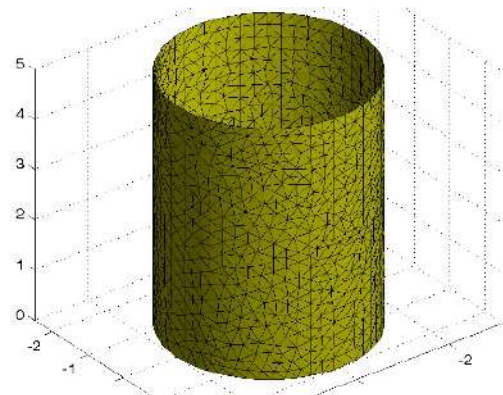
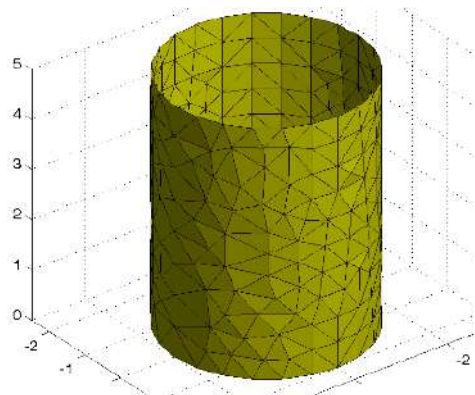
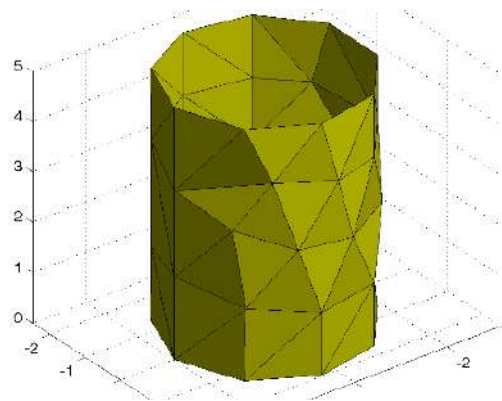
問題

規則的な三角形ではなく、いろいろな形の三角形を、無作為に並べて三角形分割を作ったとき、分割を細かくすれば、曲面の面積を計算できるか？
(そもそも、本当は、「曲面の面積」とは何か？という問題がある)

- 円柱の側面に限らず、**一般の曲面**について考えたい
- このような問題意識は、数学的な面白さだけでなく、極小曲面の研究で重要
 - ✓ 与えられた閉曲線に、面積が最小となるように、曲面を張る問題
 - ✓ 石鹸膜の実験
 - ✓ 第1回フィールズ賞(1936) J. Douglas



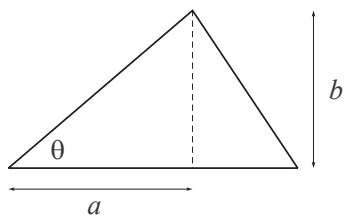
本当は、「三角形分割が可能か」という問題と「可能な場合それを具体的にどうやって構成するか」という問題がある



ラーデマツヘルの条件

ラーデマツヘル(H. Rademacher)の条件 (1919, 1920)

適当な正の数 α に対して、分割に現れる三角形の角度が、すべて、 α 以上となるように、分割を細かくすれば良い。



$$0 < \alpha \leq \theta \leq \tan \theta = \frac{b}{a}$$

これは、分割を細かくする過程において、**三角形がつぶれない**ことを要請している。

方法2：m=n	○
方法2：m=n ²	X
方法2：m=n ³	X
方法1	X

しかし、方法1がうまくいっていることの説明ができない
(mをどうとっても良い！)

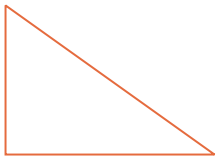
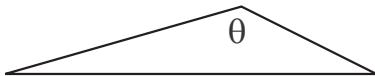
ヤングの条件

ヤング(Young)の条件 (1921)

適当な正の数 β に対して、分割に現れる三角形の角度が、
すべて、 β 以下となるように、分割を細かくすれば良い。

$$\frac{\pi}{3} \leq \beta < \pi$$

最大角が π に近づかないことを要請しているので、結果的に、三角形がつぶれないことを要請している。

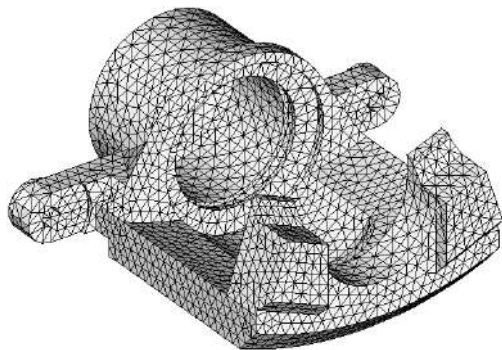


- したがって、ラーデマッヘルの条件と同じことを言っているようだが、
- 今度は、任意の直角三角形が許容される

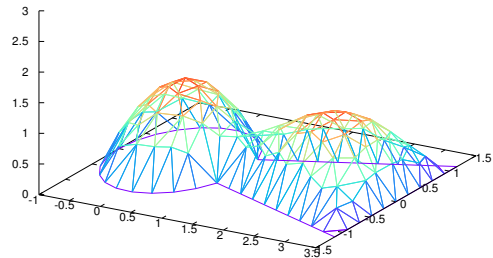
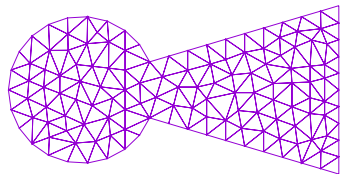
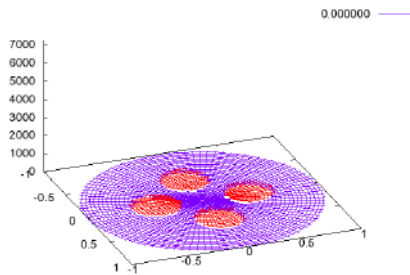


方法1が正当化される

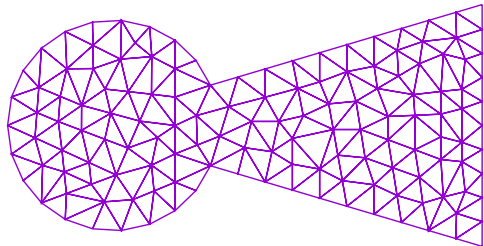
(話は変わって) 有限要素法



- 計算対象を，**三角形・四面体**に分割し，各四面体上で，近似方程式をたてて，それを統合し，近似解（数値解）を得る
- 普通，連立一次方程式を解くことに帰着される．未知数の数は， 10^{10} 程度になることも．
- 有限要素法で，正しい解が得られるかどうかを研究するのは，数学の一つの役割である．
- 問題が，平面問題なら，計算対象を**三角形分割**する問題がでてくる



平面の場合，どう三角形分割を小さくするか？



最小角条件 (M. Zlamal, 1968)

適当な正の数 α に対して，分割に現れる三角形の角度が，すべて， α 以上となるように，分割を細かくすれば良い。

最大角条件 (I. Babuska and A. K. Aziz, 1976)

適当な正の数 β に対して，分割に現れる三角形の角度が，すべて， β 以下となるように，分割を細かくすれば良い。

$$\frac{\pi}{3} \leq \beta < \pi$$

どこかで見たような、、、 実は全く同じ！

このように，数学では，時代を超え，分野を超え，同じことが再発見されることがよくある

これで終わります
ご清聴ありがとうございました