原始ピタゴラス数

三分木の構造が発見された
それによって√2の超精密近似が可能になった。
その方法

愛知県立大学数学教育担当　亀井喜久男

原始ピタゴラス数とは

原始ピタゴラス数 primitive Pythagorean triplesとはピタゴラス数のうち3つの数が互いに素であるものをいう。つまり、自然数の3つ組 (a, b, c) であって aa+ bb = cc（ピタゴラス数の条件）
gcd(a, b, c) = 1（原始性の条件）をともに満たすもののことである。
ユークリッドの式またはピタゴラスの公式とは、
(a, b, c) = (mm − nn, 2mn, mm+ nn)又は(2mn, mm − nn, mm + nn)の形のことである。ここで、m, n は自然数でm, n は互いに素。
m > n。 m と n の偶奇は異なる（一方が奇数で他方が偶数）。
を満たす。

原始ピタゴラスの実例

（３，４，５）
（5，12，13）、（15，8，17）
（21，20，29）

ピタゴラスの系列

（3，4，5）

（5，12，13）

（7，24，25）

奇数a

自乗ー引き2で割ってb

それに1足しcとせよ。

a,b,cこれ原始ピタなり。

プラトンの系列

偶数一つ用意する

自乗1引きbとする

それに2を足しcとする

はじめの偶数2倍しa

abcこれ原始ピタなり

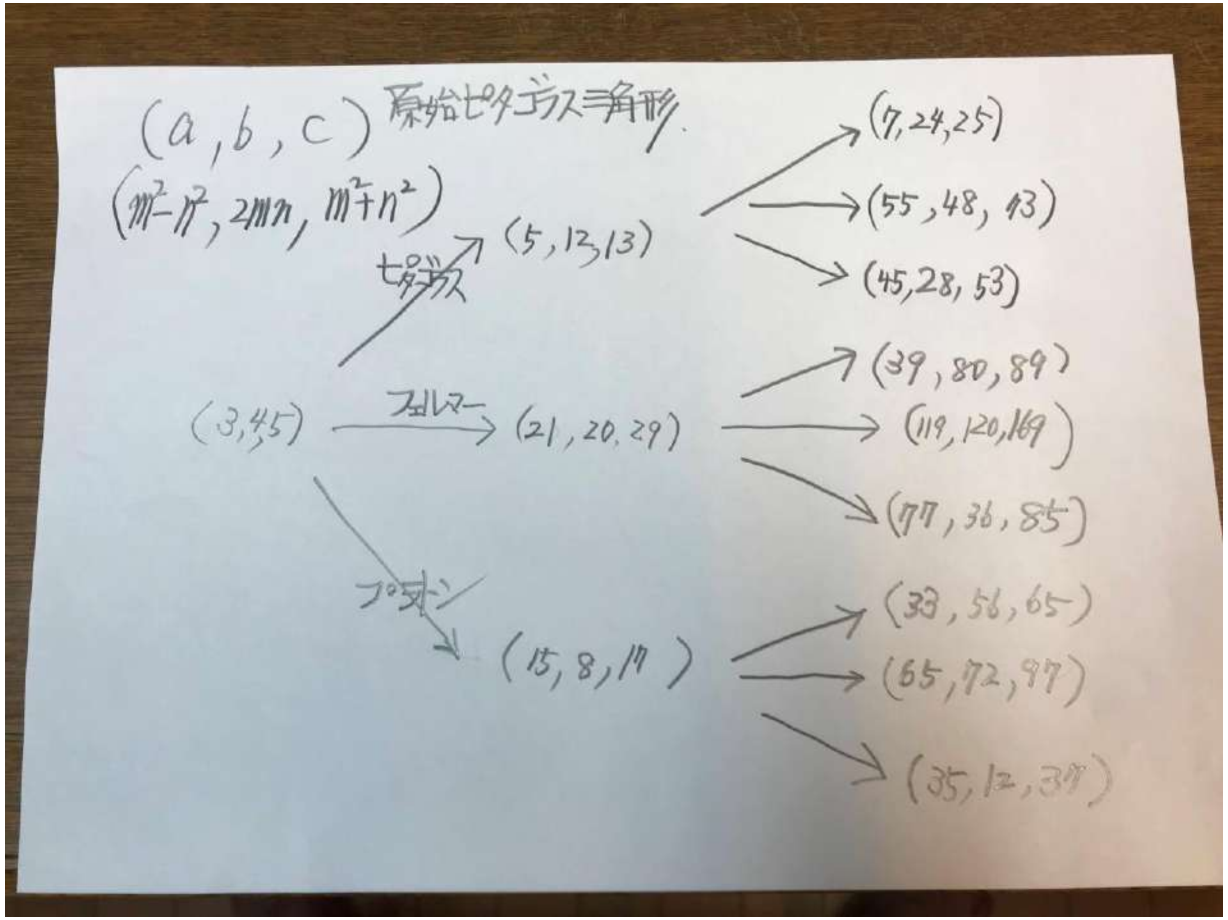
フェルマーの系列

（3，4，5）
（20，21，29）
（119，120，169）
（696，697，985）
直角を
挟む2辺の差が1で
斜辺がなんと整数だ
これフェルマーの原始ピタなり。

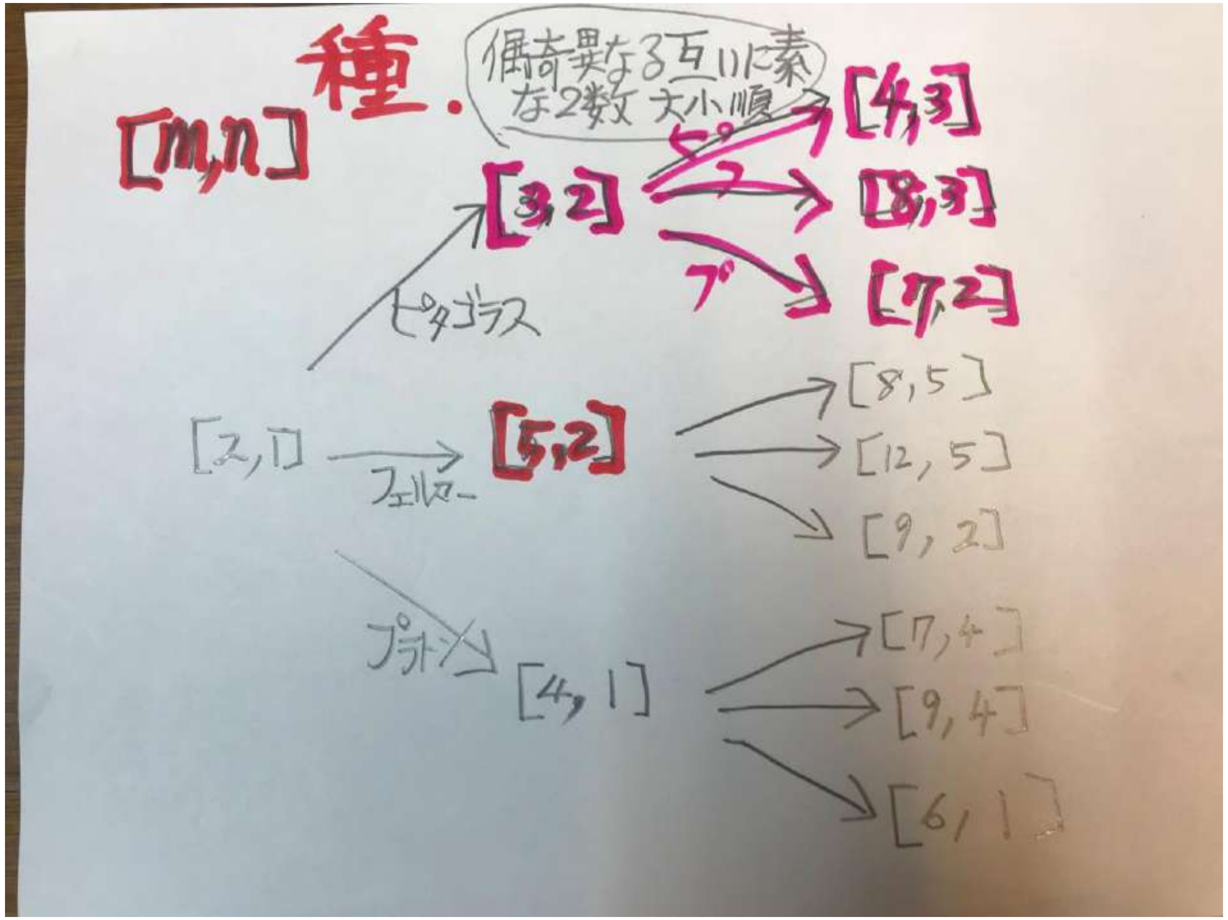
原始ピタゴラス三角形の系統性

- ピタゴラス原始三角形に3分木をなすという系統性が有ります。30年以上前1991年から原始ピタゴラス三角形のうちフェルマー系列（直角を挟む2辺の差が１である。原始ピタゴラス三角形）に関心を持ち漸化式を名古屋で開催の全国私学の数学部会で発表して愛知県の数学の先生方とも一緒に研究を始めました。ついに3つの行列によってすべてを網羅できるところまで発見してはだ野先生に報告アメリカに先行あったと聞いて愕然しかし楽しい研究でした。最近再燃していて喜んでいます。私はなぜ行列の成分が1，2，3だけなのか考え続けてきました。数学愛好家島田正雄さんの説明の仕方に心惹かれました。mnの2数で原始ピタゴラス三角形を作ることができます。そこにも3分木あります。2×２の行列もあります。しかし納得いくまでではなかったのです。島田正雄解説を解説します。縦m横nの長方形を考えます。スタートはm＝2，n=1とします。この長方形に3通りの変換を施します。長辺、短辺という概念に注目ください。長辺は2、短辺は１です。長辺に長辺正方形を2つ張り付けます。すると縦２横5の長方形ができます。縦が長辺になるように転置します。すると縦5横2の長方形になります。まずはこれが1つ目の変換です。フェルマー系列に対応しています。この時の原始ピタゴラス三角形は21，20，29です。次に元の縦2横1の長方形に短辺正方形2枚張り付けることをします。すると縦4横1の長方形になります。これがプラトン系列に対応しています。原始ピタゴラス三角形は15，8，17です。どちらも原始ピタゴラス三角形のもとになるmnの2数です。この変換はどちらも偶奇が異なることを保存します。また互いに素（最大公約数が1）を保存します。この変換手続きがそれを保証しているのです。島田解説により納得が行きました。救われた瞬間でした。ピタゴラス系列に対応するmnの長方形は不思議な作成法です。先に長辺正方形2個並べておきます。そこからもとになる長方形を引き去るのです。縦長になる手続きはします。そのようにしても新しいmn長方形が作成できます。これがピタゴラス系列の3分木に対応していきます。この方式でできるmnはm＝2、n＝1で始めるとM=3,N=2となります。ここは練習してください。この数の時の原始ピタゴラス三角形は5，12，13です。この時の3通りの変換が起こり得るすべての近接の長方形作成だったのです。これで氷解しました。数式的には分かっていました。しかし図形解釈ができなかったのです。自分は図形解釈大好きです。島田さん解説を広めたいと考えて東大数理科学研究科002教室での数学月間の会の懇話会のテーマに推薦しましたら了解いただけた次第です。皆さんにお話しできるのが楽しみです。わくわくします。なおm＝２の時mの二乗を長さで表現することができます。相似拡大を利用するのですがなれないとここで挫折します。私の挿絵で乗り越えてくださるとすべて見渡せます。時間を惜しまないで悩んでください。正方形の面積だけで自乗を考えていては3乗は体積、4乗は4次元で意味不明となって挫折します。相似拡大で累乗を理解できるようになった方が良いと考えています。

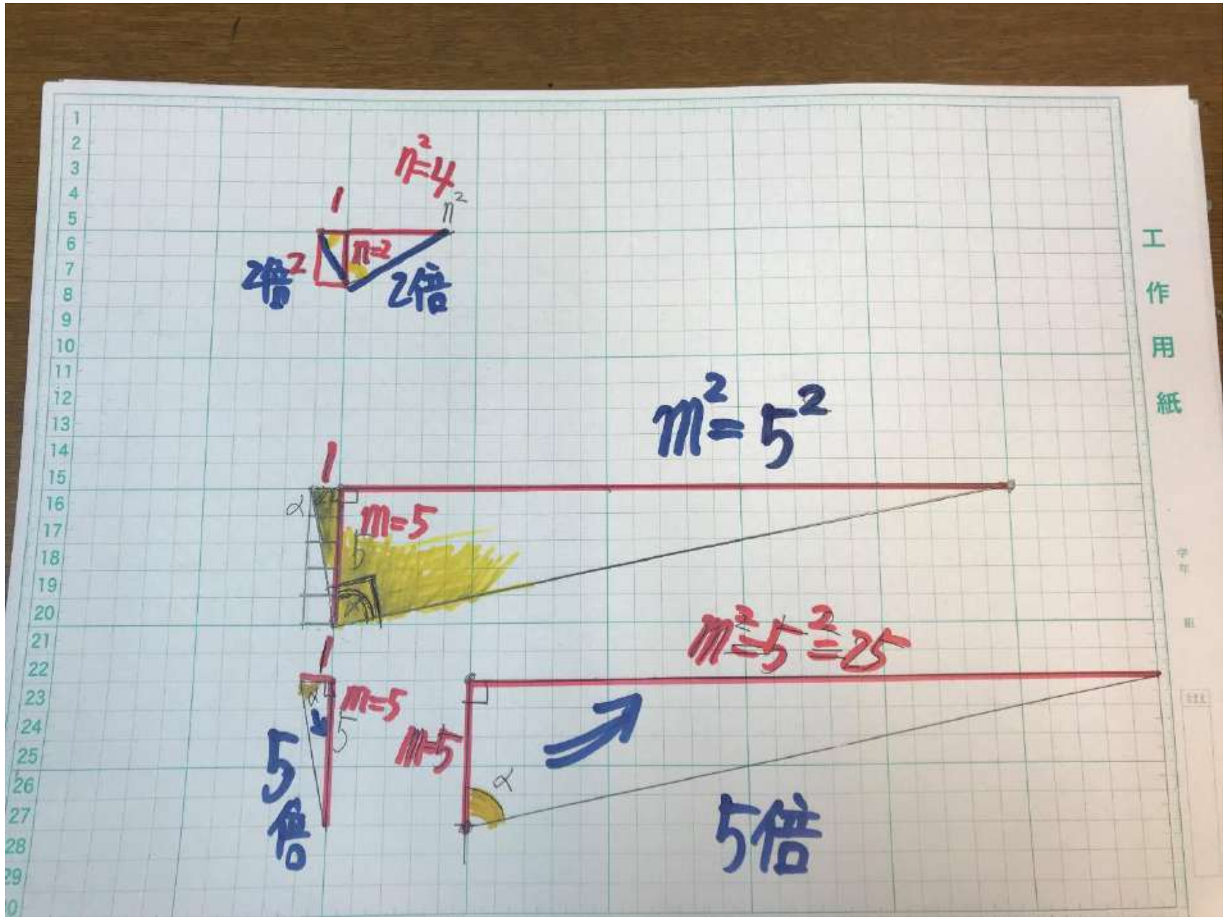
原始ピタゴラス数の3分木



原始ピタゴラス数と種となる2数mnの3分木

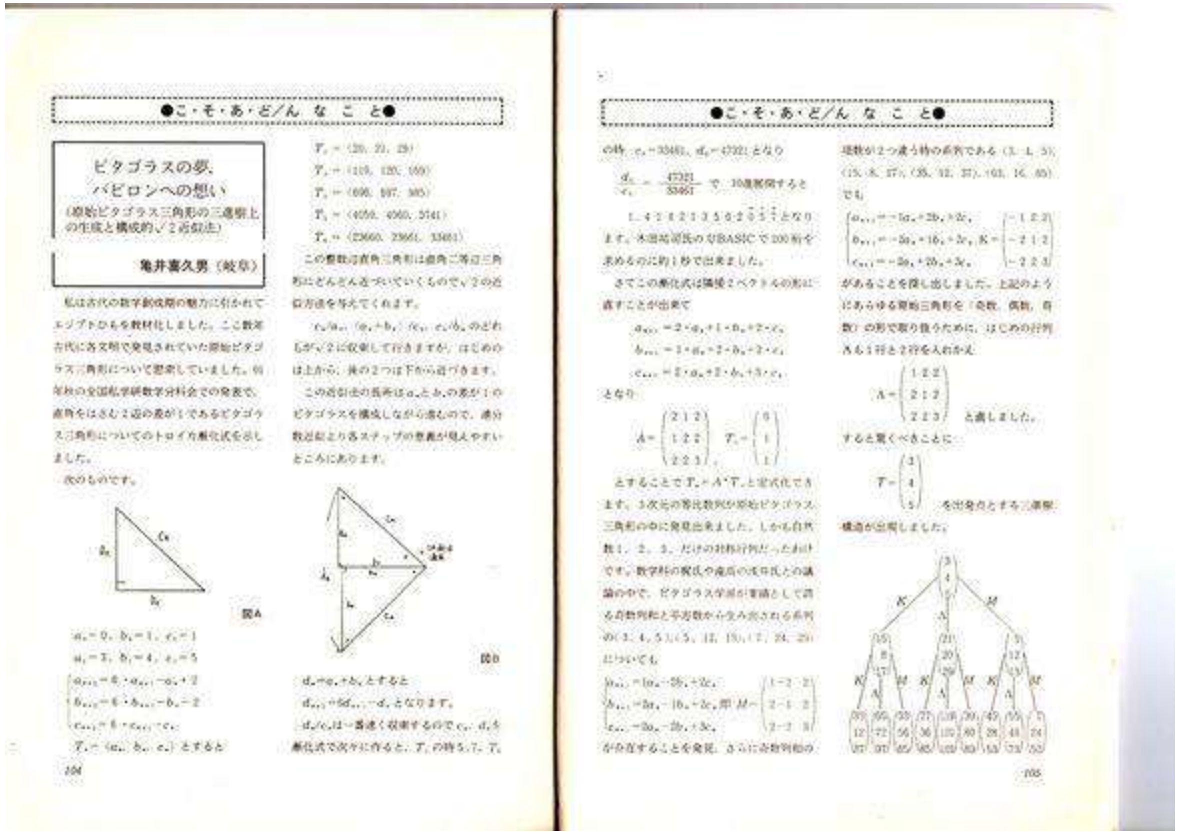


自乗作図の新概念

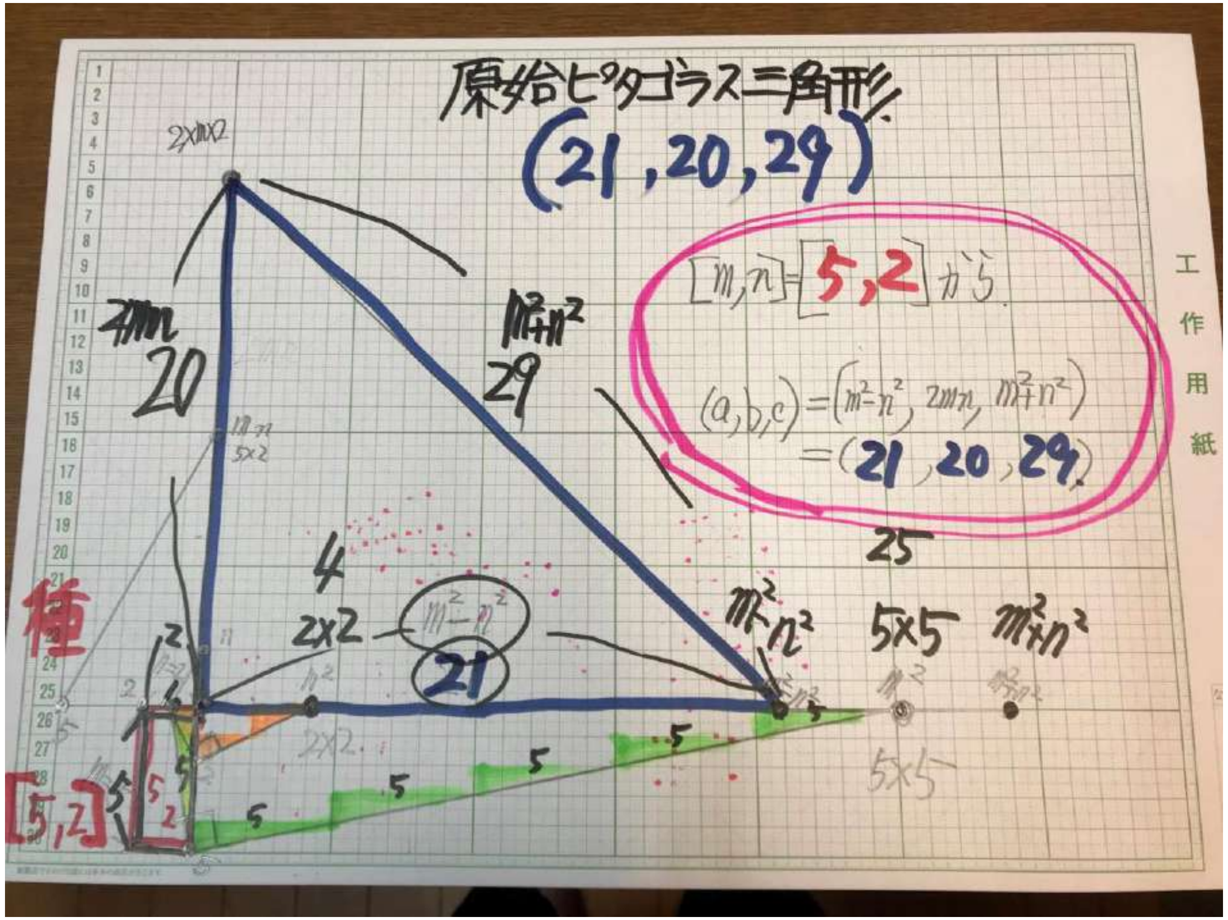


発見当時の報告

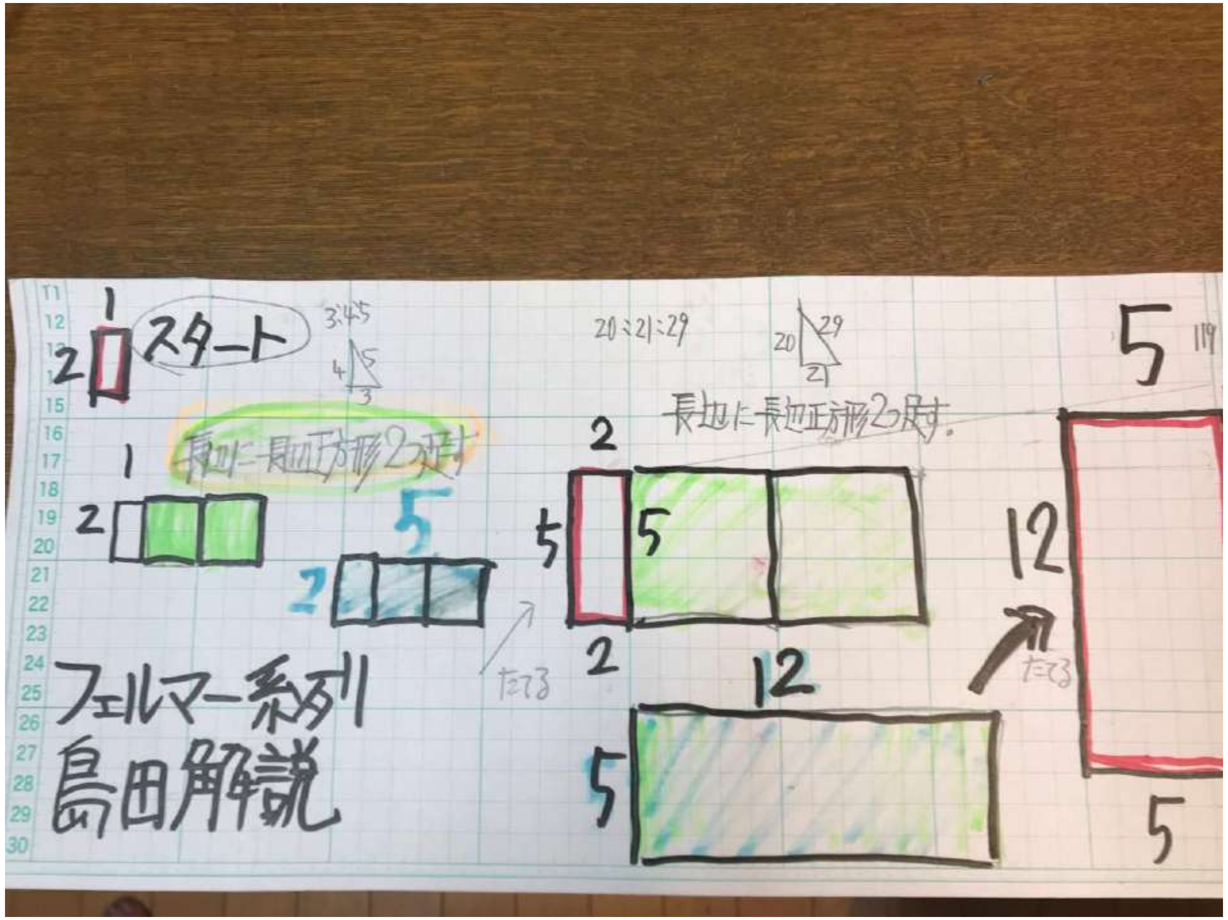

授業が変わる
たのしい授業が見つかるこの1冊
6社の新教科書
すべてに
完全対応
まったく新しい
実践と内容
編集
銀林 浩/相原 昭/鈴木一己/和田常雄
わかる教え方
算 数
学年別
全8巻
定価各2,000円(税込)
国土社
重版出来
教師・父母・学生のための算数・数学教育誌
数学教室
特集 第7回国際数学教育会議から
1
'93
数学教育協議会編集／国土社刊


●こ・そ・あ・ど／ん な こ と●
ピタゴラスの夢、
バビロンへの想い
亀井喜久男（岐阜）
図A
図B
●こ・そ・あ・ど／ん な こ と●

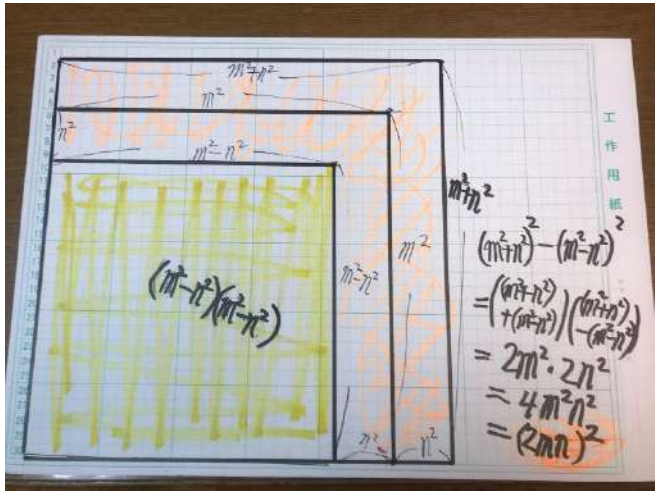
種情報縦m＝5，横n＝2から（21，20，29）

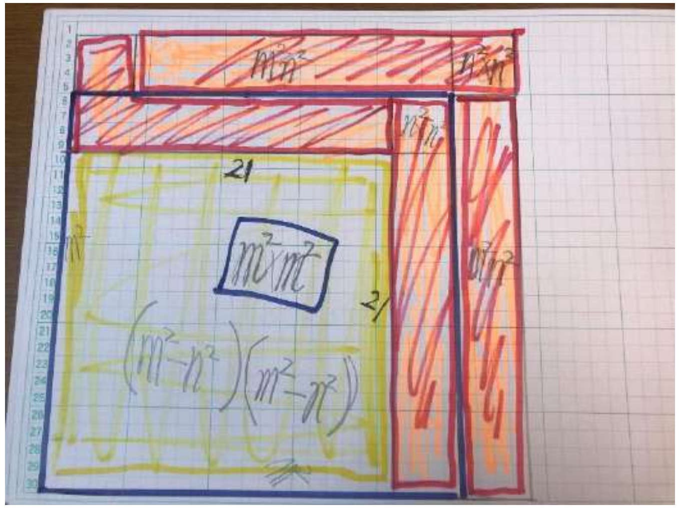


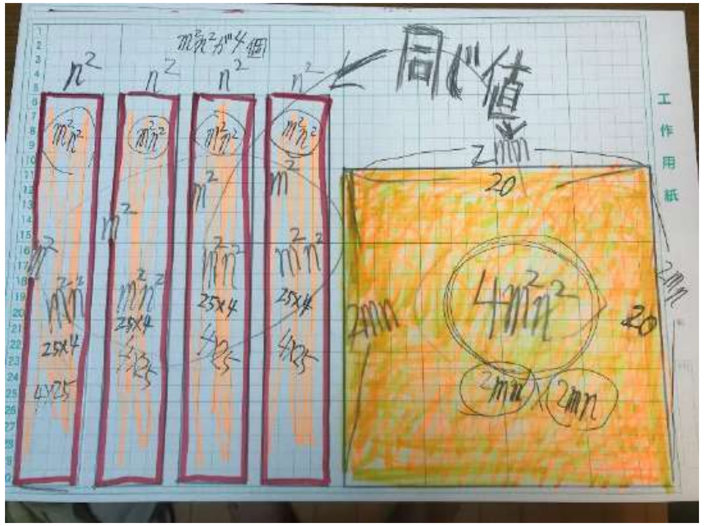
種長方形のフェルマー系列発展
長辺に左から長辺正方形を2つ張り付ける。
m＝2, n＝1からm＝5,n=2さらにm=12,n=5へ



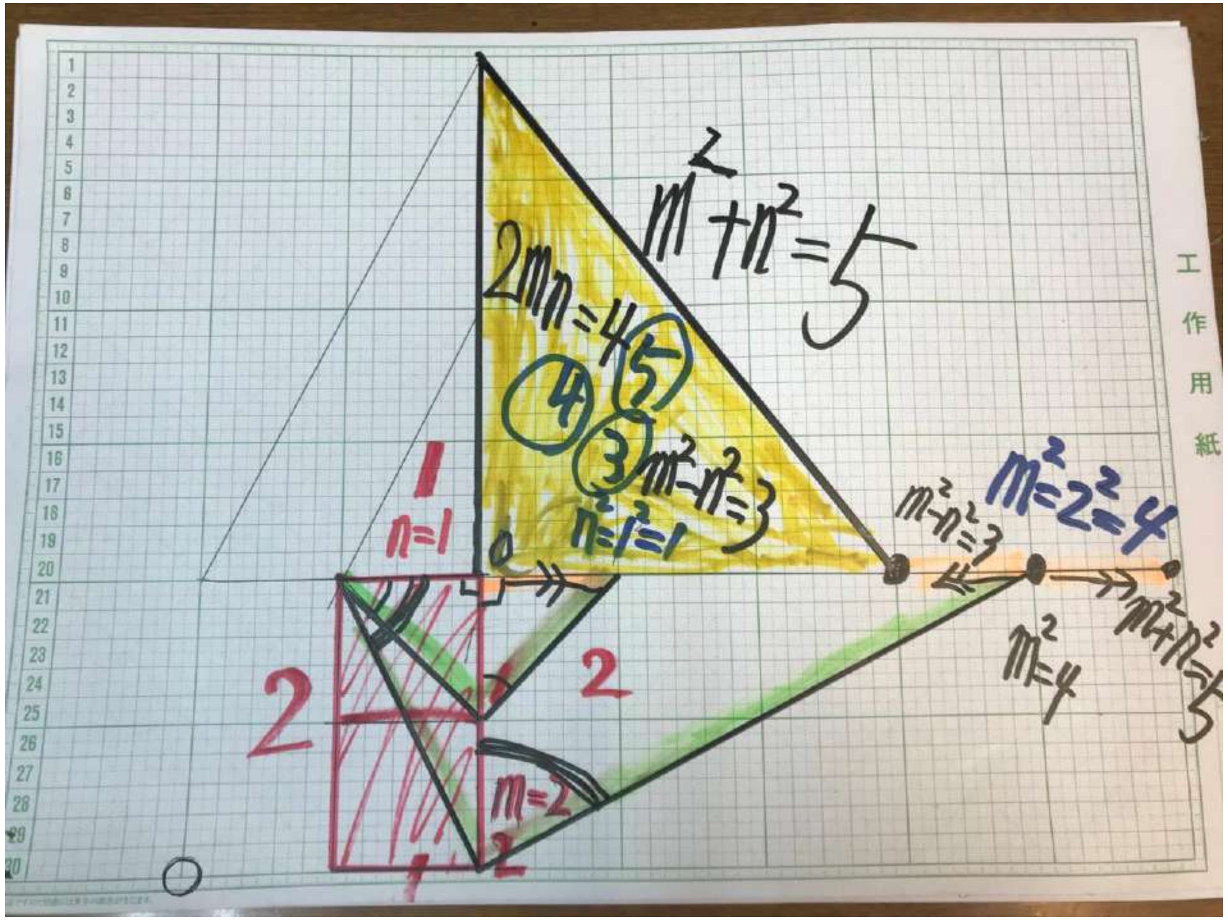
種から形成した三角形がピタゴラスかどうか、これには自乗の図よりも平方の図が適切



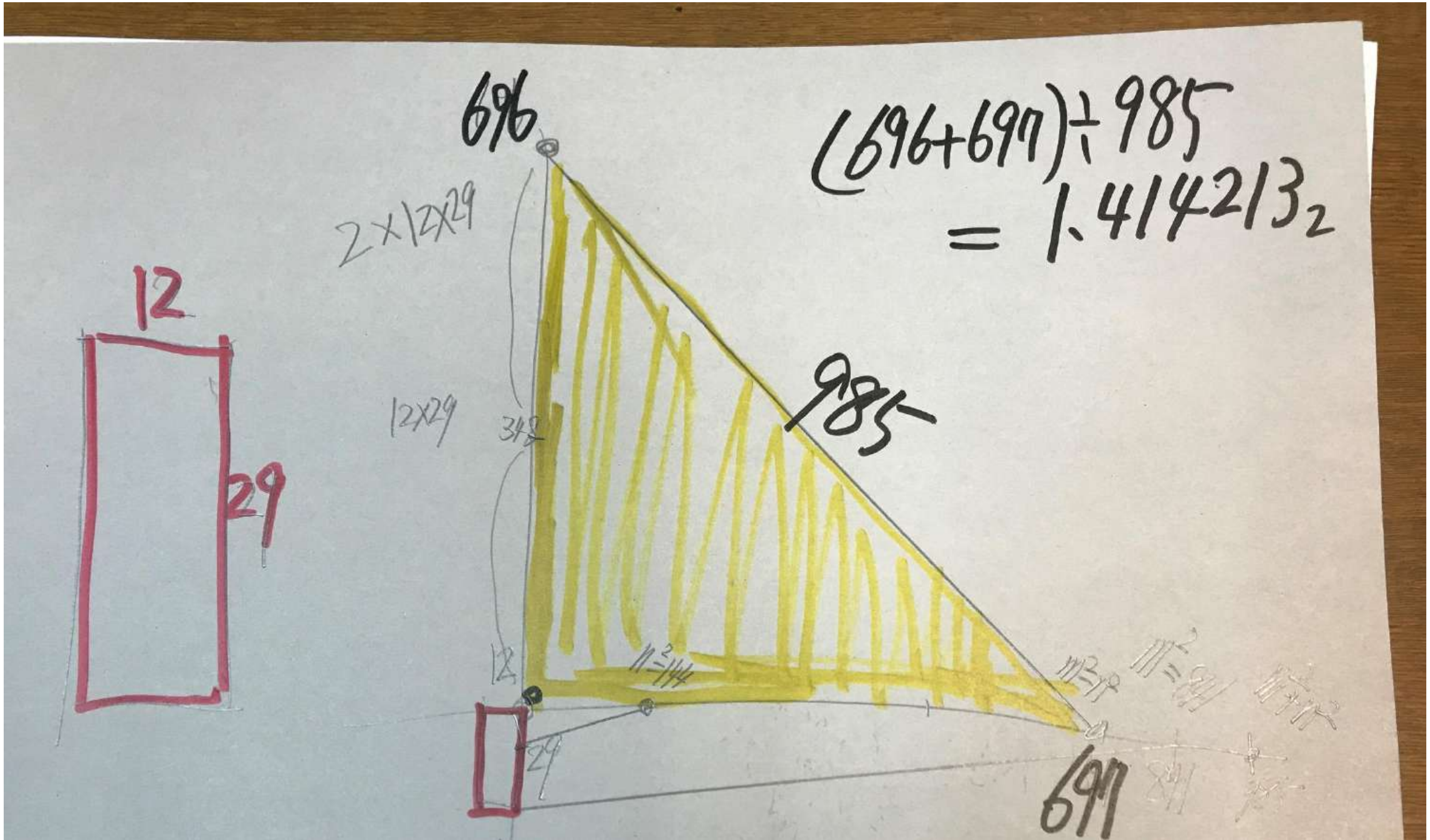




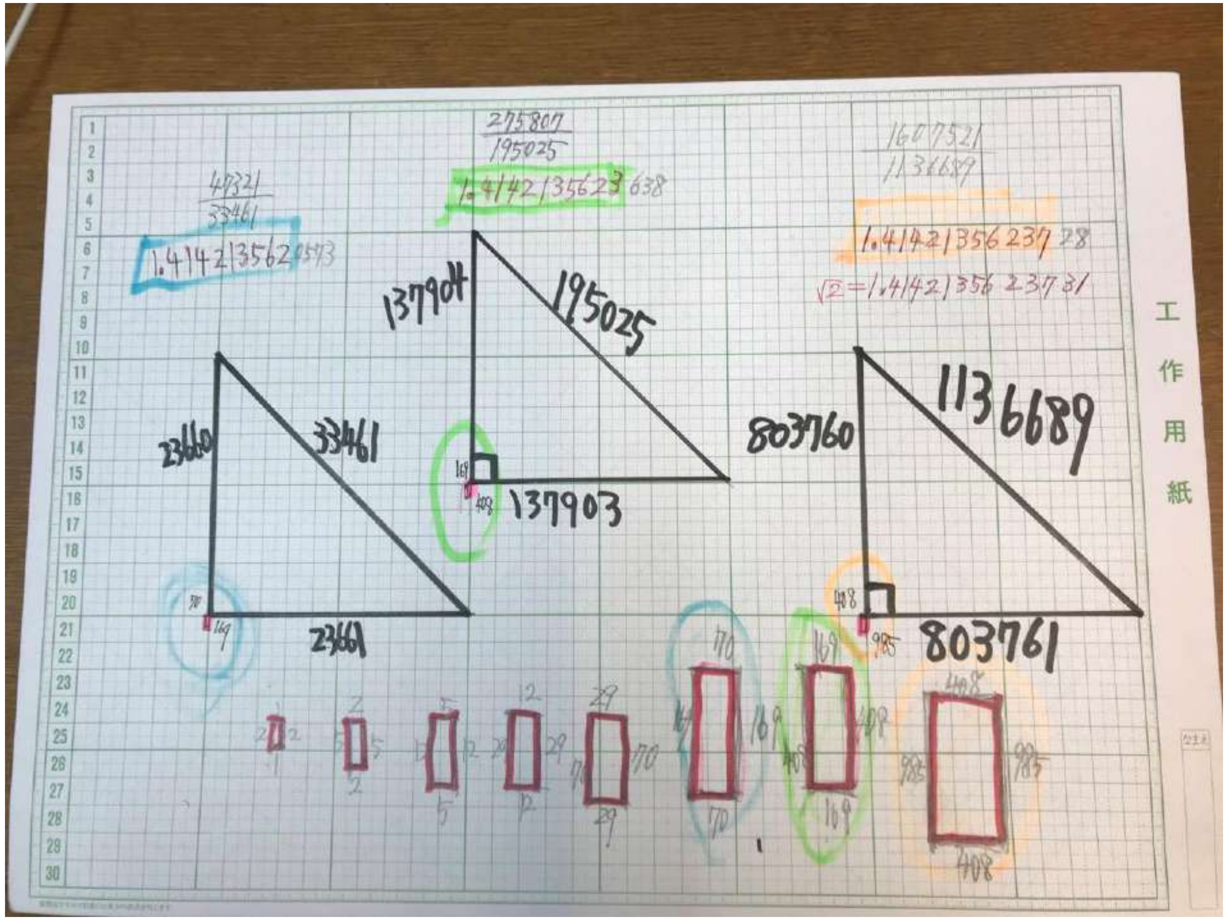
21，20，29のほかにも3，4，5でも確認



√2の精密近似有理数、および近似小数

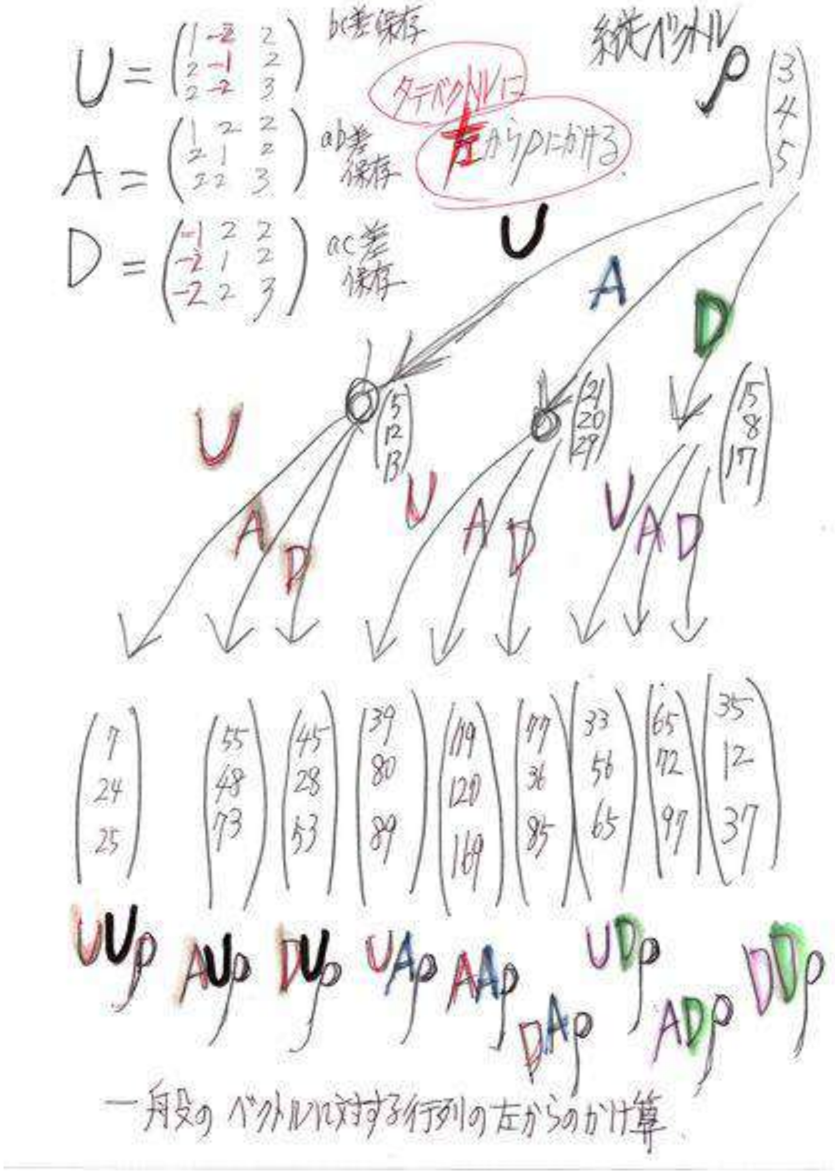


超高精密近似　種m＝985、n=408から

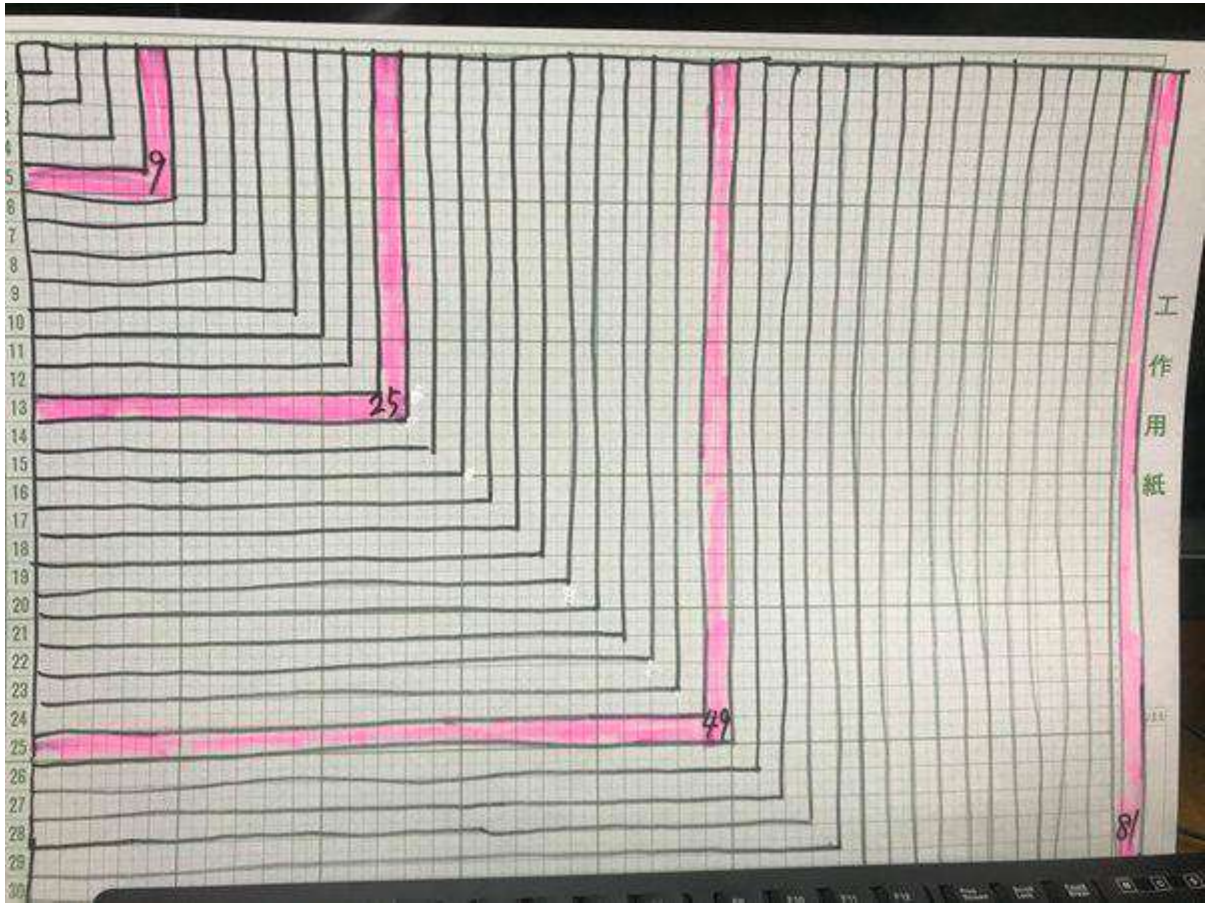


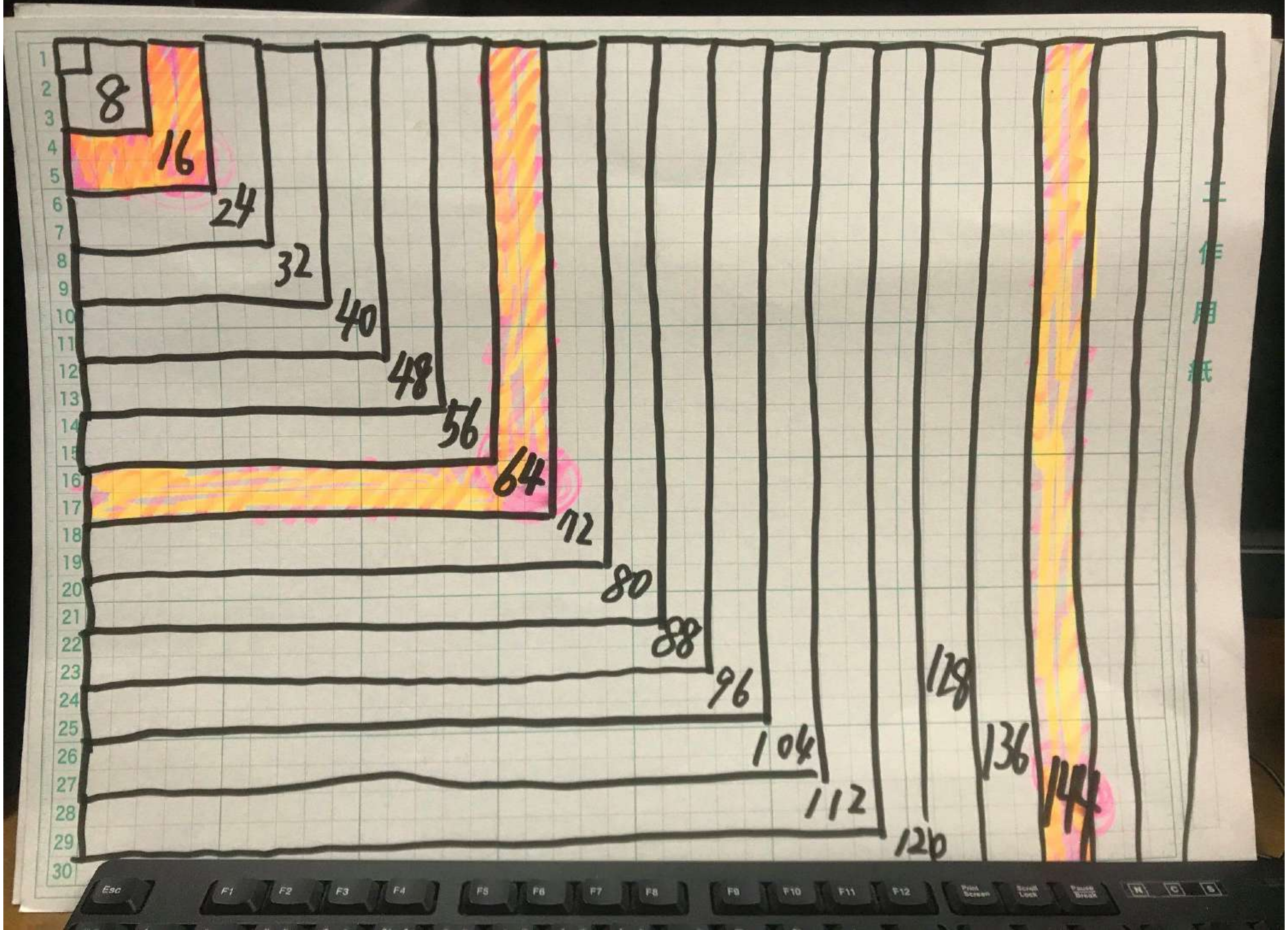
原始ピタゴラス数
種の三分木
それを活用した
√2の超高精密近似
のお話終わりです。
ご清聴ありがとうございました。

おまけ



bc差保存
ab差保存
ac差保存
縦ベクトルp
タテベクトルに
左からpにかける
UUp AUp DUp UAp AAp DAp UDp ADp DDp
一般のベクトルに対する行列の左からのかけ算


9
25
49
81
工作用紙


8
16
24
32
40
48
56
64
72
80
88
96
104
112
120
128
136
144
工作用紙