万華鏡の不思議

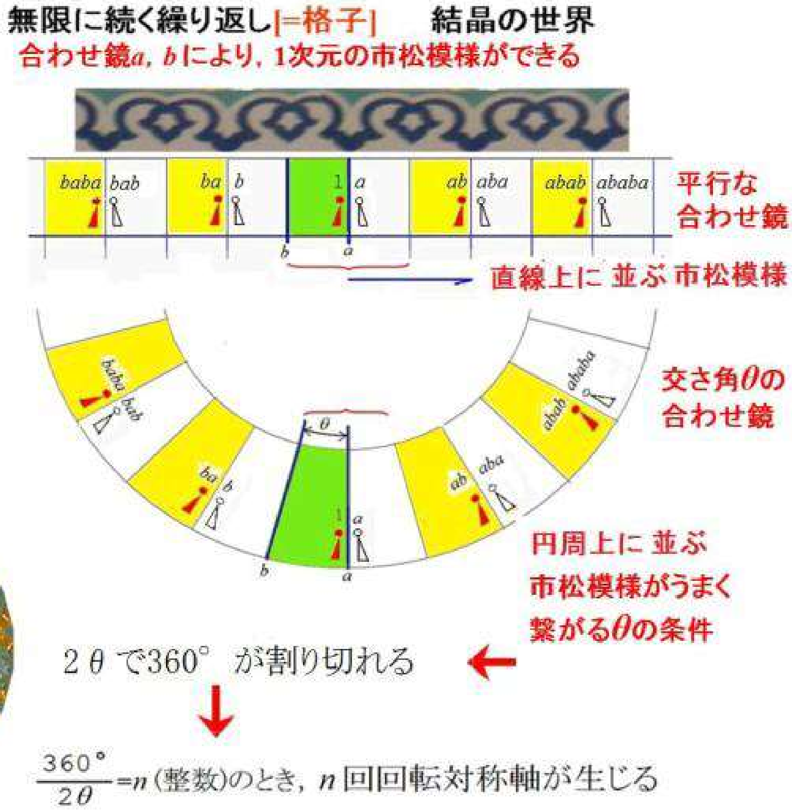
ー中野区数学まつりー

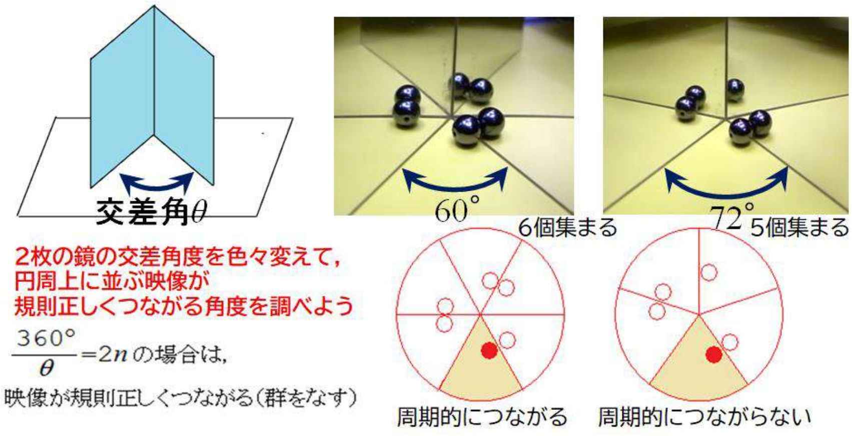
谷 克彦 sgktani@gmail.com

NPO 数学月間の会 https://sgk2005.saloon.jp

万華鏡は合わせ鏡でできています．自分の前に鏡，自分の後ろにも鏡，つまり，合わせ鏡の間に自分がいるとします．前の鏡に写るのは，自分の前から見た姿：自分が北向（N）なら，鏡像は南向（S）．後ろの鏡には，自分の後ろ姿の鏡像があり，これも南向（S）です．これらの像の配列を横から見るとSNSの配列です．しかし，これだけで終わらないのが合わせ鏡の醍醐味です．自分の前の鏡で出来た鏡像（S）は，自分の後ろの鏡で反射し，後ろの鏡の中に鏡像（N)を作ります．反射するたびに像の向きは逆転しますが，生ずる像がこれで終わりということはありません．その像は，合わせ鏡のどちらかの前にありますから，次の像が必ず生じます．こうして，1 列に無限に配列する鏡像の列‥‥SNSNSNSN‥‥ができます．これは，SN のペアが周期的に並んでいる状態です．もし，合わせ鏡が平行ではなく，交差角θ°であったとすると，鏡像は直線上に並ぶのではなく，円周上に並びます．そして，SN のペアの中心角は 2θ°ですから，円周上に並んだ鏡像が周期的にきれいにつながるためには，$\frac{360°}{2\theta°} = n$，$n$は整数でなければなりません．

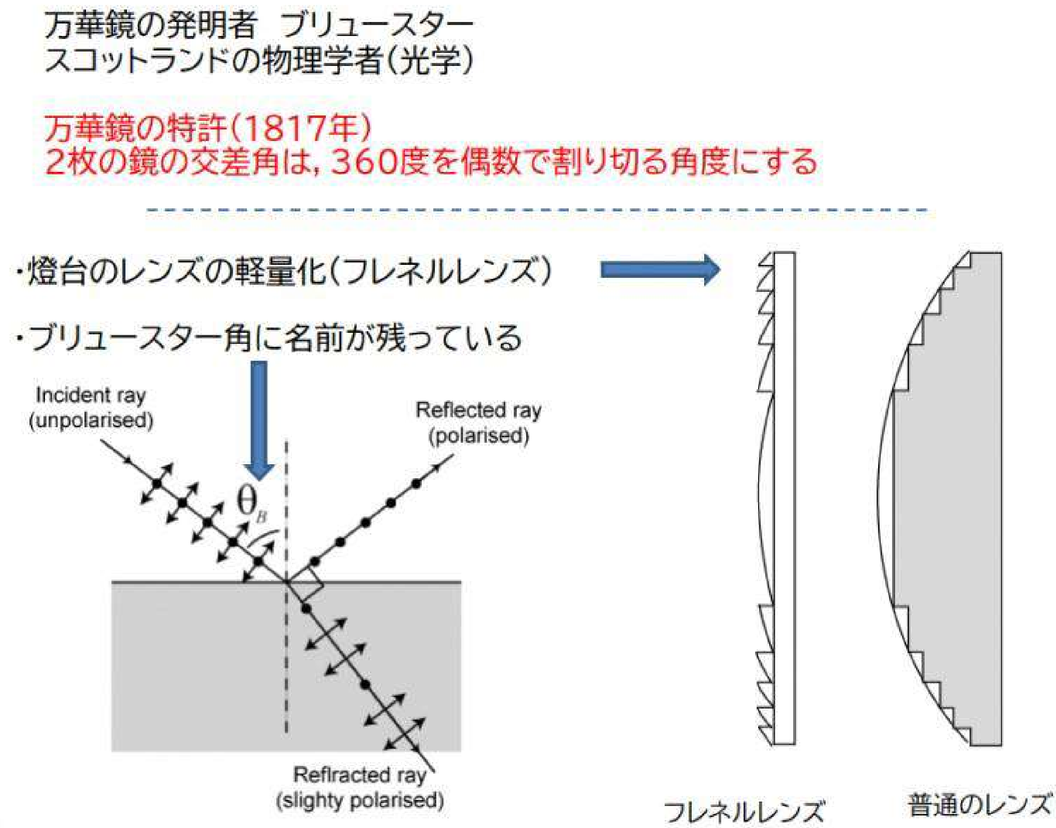
合わせ鏡の不思議！





”Kaleidoscope”の命名と発明は，ブリュースターの特許（1817年）が起源です．特許には，2 枚の鏡の交差角θ°を，360°を偶数で割り切る角にすることが記されています．

ブリュースターはエディンバラの物理学者（光学）で，燈台のレンズの軽量化を実現しました．凸レンズが大きくなると重くなる問題を解決しました．これは，その後に現れるフレネルレンズやゾーンプレートの先駆です．光の反射で，また，反射光が完全な S 偏光（反射面に平行な電場成分の偏光）になる入射角に名前を残しました（ブリュースター角と呼ばれる）．



今，あなたは鏡の前にいます．あなたとあなたの周囲が鏡像の世界として見えます．あなたが実在する世界と鏡像の世界は，何から何まで同じようです．しかし，あなたが鏡像の世界に入れたとしても，鏡像に重ね合わさることはできません．右手と左手は鏡映で重ね合わさりますが，3 次元空間内でどのように動かしても重ね合わせることはできませんね．つまり，鏡映操作というのは，3 次元空間内の物体の運動ではないのです．もし，4 次元空間内を運動できるなら，3 次元の鏡映像を運動で重ね合わせることは可能です．

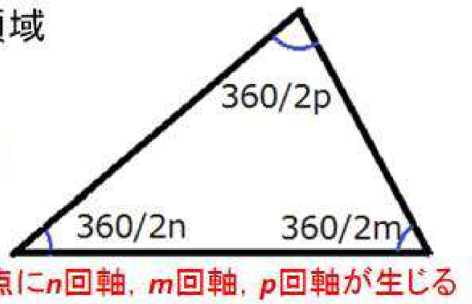
私たちは，鏡映像に何か不思議な感じを抱くのですが，鏡映像の世界には我々の 3 次元空間内の運動では到達できないということに関係があるのではないでしょうか．

万華鏡は，3 枚鏡の壁で囲まれた 3角柱で，3角形の内部にガラス屑の分布した絵柄があります．私は，この 3角形のことを”鏡室”と呼ぶことにしています．3角形の辺を鏡として，鏡映で鏡室の絵柄を張り詰めていき，秩序のある張り詰めができるためには，鏡室の 3角形の形にどのような条件が課されるでしょうか．3角形の各頂点は合わせ鏡になっていますから，それぞれの頂点には偶数個の 3 角形が集まる必要があります．この方程式を解くと，周期的に平面を埋める万華鏡パターンが得られる 3角形は次の 3 種類に限られることがわかります．

3枚鏡

平面をきれいに埋める万華鏡の基本領域

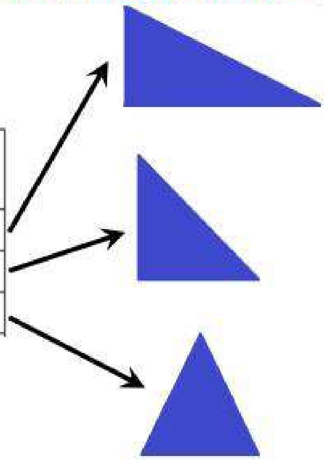
$$\frac{360}{2n}+\frac{360}{2m}+\frac{360}{2p}=180$$



$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=1\,,\qquad 2\leq n,m,p$$

整数解を求める

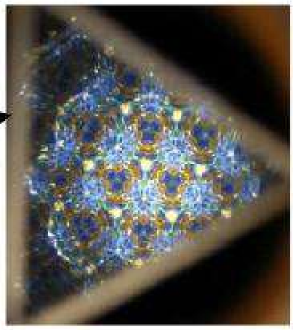
	n	m	p	$\frac{360}{2n}$	$\frac{360}{2m}$	$\frac{360}{2p}$	
整数解	2	3	6	90	60	30	E
	2	4	4	90	45	45	D
	3	3	3	60	60	60	A



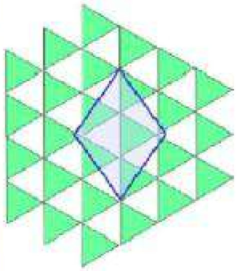
市松模様になれば格子ができ，平面群を生成している

A

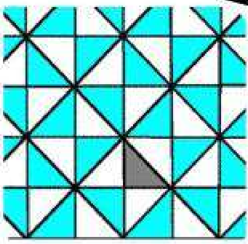
D　　E

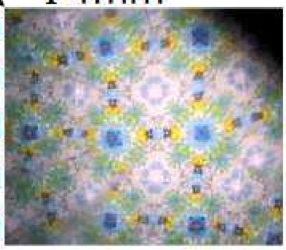


P3m1

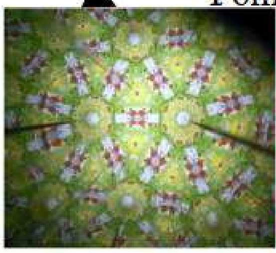


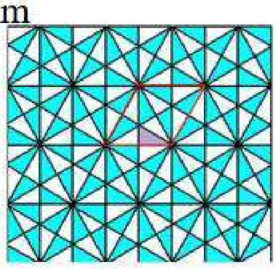
P4mm





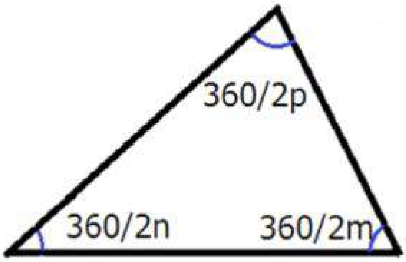
P6mm





分数解を許す基本領域の万華鏡 **3枚鏡**

$$\frac{360}{2n}+\frac{360}{2m}+\frac{360}{2p}=180$$



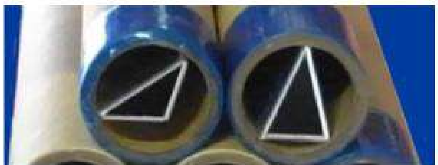
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=1,\qquad 2\leqq n,m,p$$

分数解を許す場合

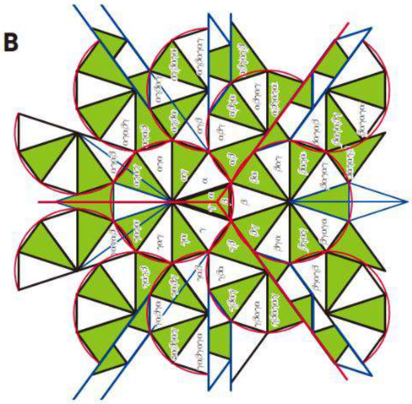
	n	m	p	$\frac{360}{2n}$	$\frac{360}{2m}$	$\frac{360}{2p}$	
分数解 無数存在	5/2	5/2	5	72	72	36	*B*
	5/3	5	5	108	36	36	*C*
	10/3	2	5	54	90	36	*F*
	12/5	3	4	75	60	45	*G*
	9/2	9/4	3	40	80	60	*H*
	3/2	12	4	120	15	45	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

無数にある

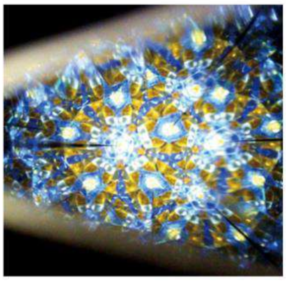
C　　B

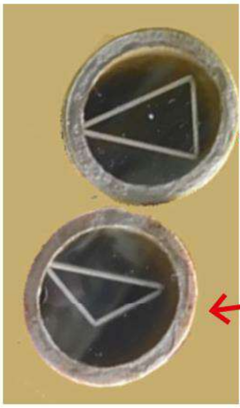


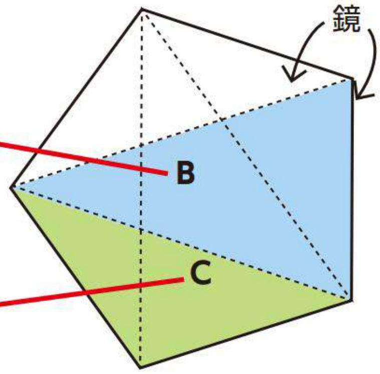
F　　G　　H



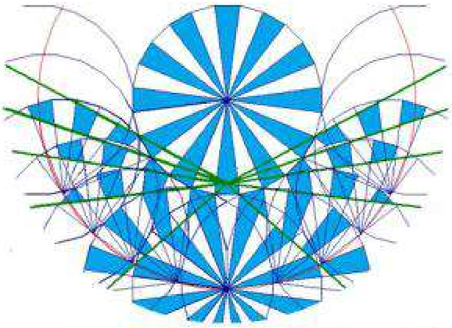
実は， n, m, pが整数解のときだけでなく，分数解の場合もきれいな万華鏡映像が得られ，分数解の万華鏡は無限にあります．ただし，分数解の場合は，周期的な平面充填ではなく，複雑な秩序（数学でいうと平面群に収まらない）の平面模様になります．

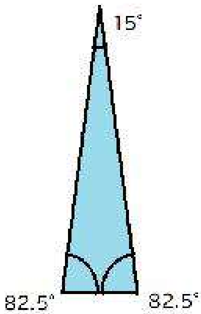






今回作る万華鏡は分数解（$n = m = \frac{24}{11}, p = 12$）82.5°・82.5°・15°の 3 角形です．

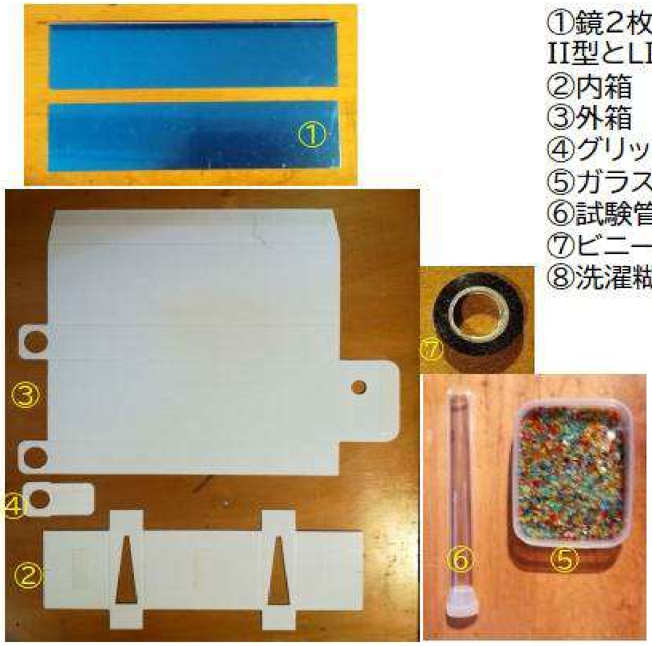




◆図の多くは，**「美しい幾何学」**,谷克彦,技術評論社(2019),第 5 章より引用した.

●**万華鏡を作ろう**

1　部品一覧

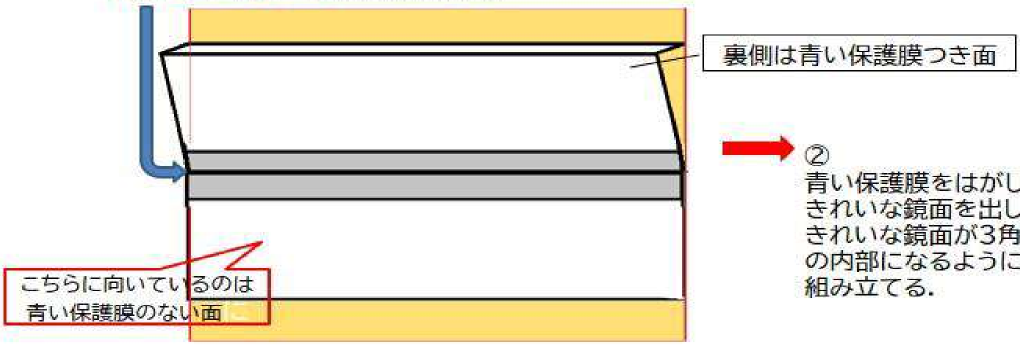


①鏡2枚(光輝アルミ1mm厚)
II型とLI型があります
②内箱
③外箱
④グリップ穴部品
⑤ガラス屑
⑥試験管
⑦ビニール・テープ黒
⑧洗濯糊(PVA)あるいはグリセリン

ブリュースター型万華鏡キットLI型

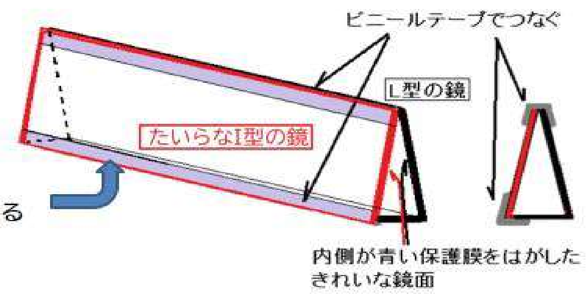
2 鏡筒を組み立てる

鏡　①　2枚のアルミニウム鏡(平板I型とL型)を，青い保護膜面を机に向けてピッタリ並べ，黒いビニールテープで2枚をつなぐ.



②
青い保護膜をはがし，
きれいな鏡面を出し，
きれいな鏡面が3角柱
の内部になるように，
組み立てる.

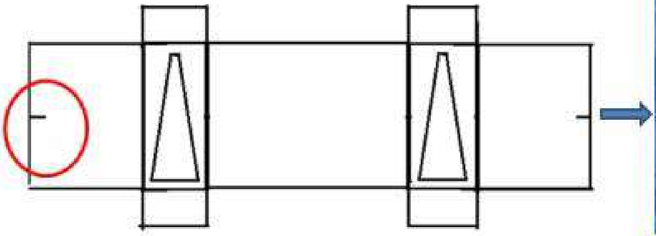
③
黒いビニールテープで
鏡をつないで3角柱にする

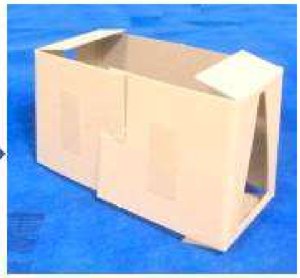


3 鏡筒を内箱にセットする

内箱

切れ込みを
利用して組
み立てる

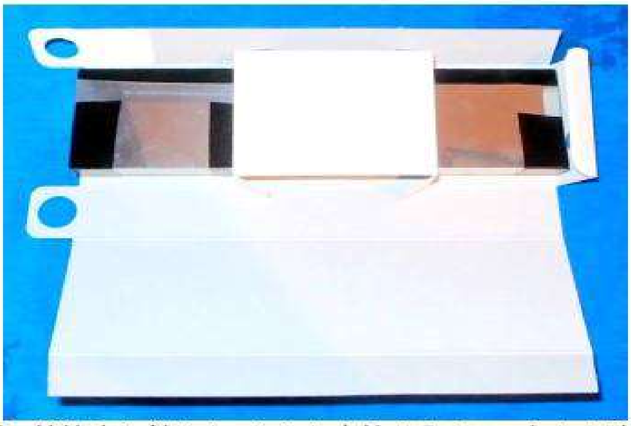


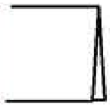


内箱に2等辺3角形の鏡を差し込む.
内箱の3角形穴を破らぬよう注意

4 内箱を外箱にセットし組み立てる

外箱に鏡付内箱を入れる

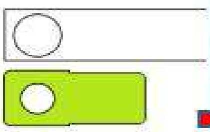




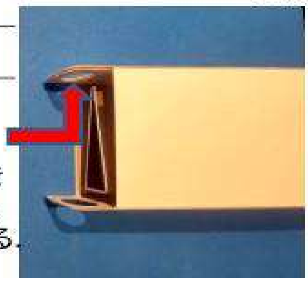
覗き穴

外箱の覗き穴の位置が
鏡3角形の底辺の近く
(内心)になるように
内箱の向きに注意！

① 外箱内に鏡をセットした内箱を入れる. 向きを確認し,
すべての両面テープのシールをはがし接着組み立てる.



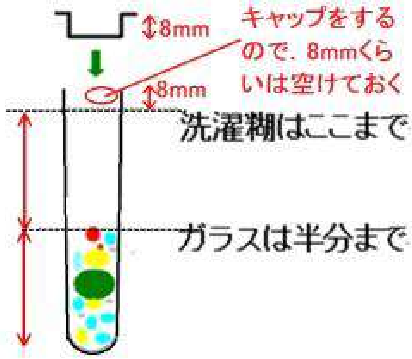
② グリップ穴部品を
内側から貼り付けて,
穴を一回り小さくする.



5 ワンドを作る

ガラス屑が，ネバネバした液体の中でゆっくり落下するようにする

ワンド



壁に沿って洗濯糊を流す

●試験管に半分だけガラス屑を入れる！
(半分空きがないと移動できないから)

●色々な形や色のガラス屑が混ざると面白い．
(あまり大きいものが入ると，
試験管の中で動けないので注意)

●色の濃いものばかり入れると暗くなります．
自分の好みのもの(ビーズなど)を加えても面白い．
例えば，鏡の屑など少し混ぜると，
花火のようにピカッと光りきれいです．

●百均の洗濯糊PVAを，水で薄め
(糊の濃度～85%)たものを，試験管に入れる．
試験管を斜めにしてガラス屑をばらけさせ，
試験管をゆっくりまわしながら，洗濯糊が
ガラス屑の間を通り，試験管壁に沿って
試験管の底まで行き渡るようにするのがコツ．
(ガラス屑層の中に空気を閉じ込めないようにする)

6 ブリュースターLI 型万華鏡の完成