ミケルの定理を巡って

数学月間企画講演会

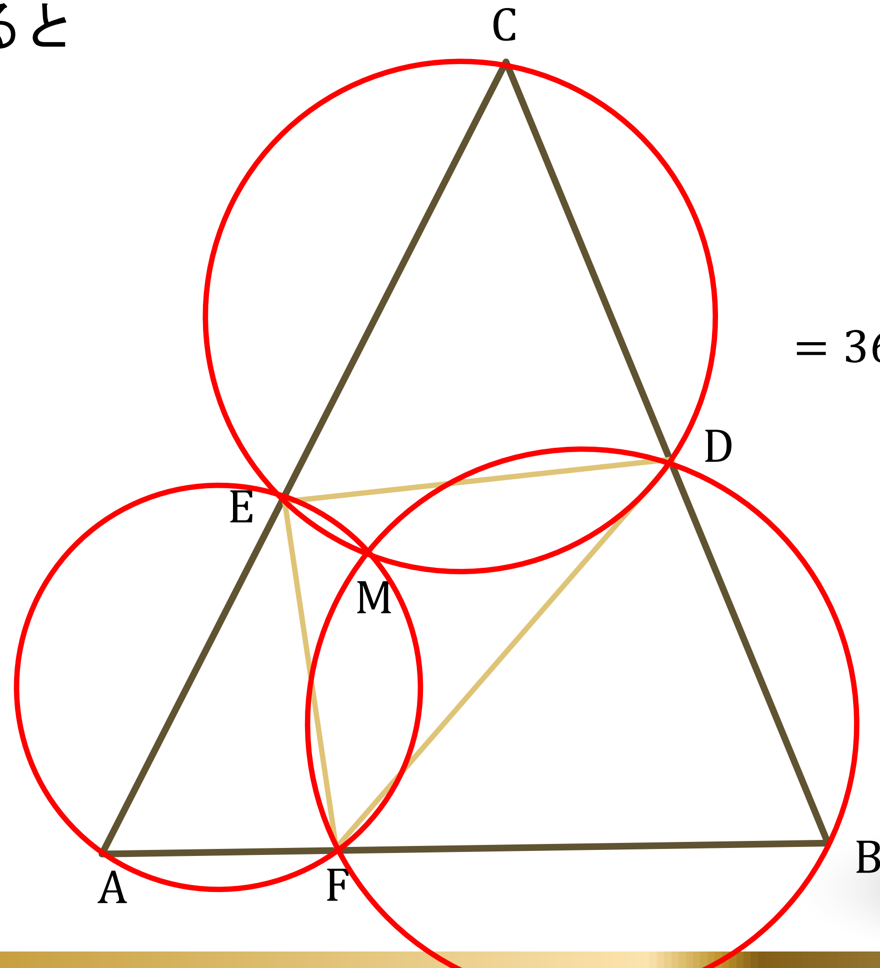
岡本和夫

2025年**10**月**5**日（東京大学数理科学研究科）

そもそもミケルの定理とは

ΔABC の各辺上に３点 D，E，F，を図のようにとると３つの三角形
ΔAFE， ΔBDF， ΔCED， の外接円は１点 M で交わる

ΔAFE， ΔBDF， の外接円
の交点を M とすると



$$\angle EMF = 180° - \angle A$$

$$\angle FMD = 180° - \angle B$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} &\angle DME \\ &= 360° - \angle EMF - \angle FMD \\ &= \angle A + \angle B \\ &= 180° - \angle C \end{aligned}$$

$$\angle DME = 180° - \angle C$$

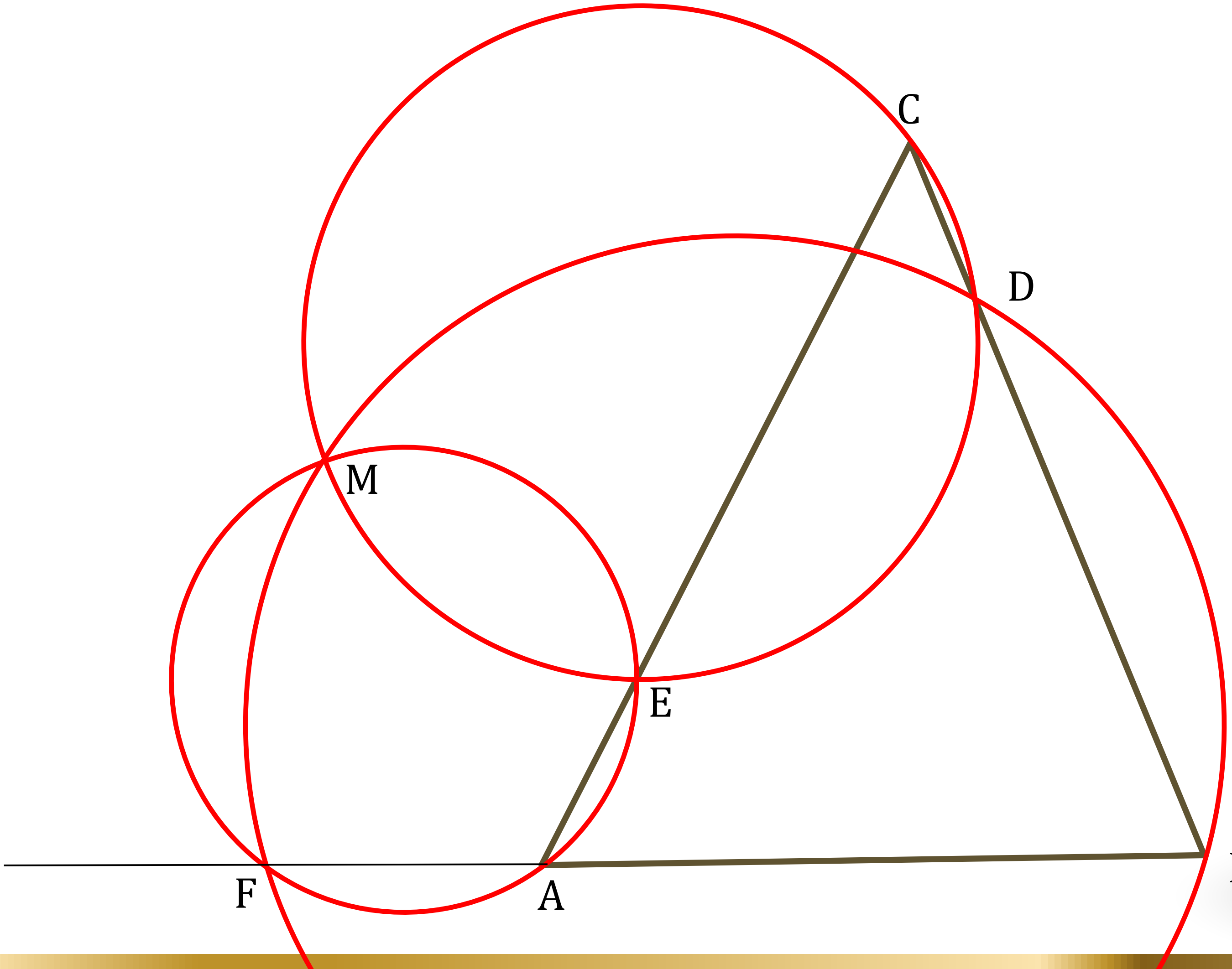
３点 D， E， F， を図のようにとっても…

ΔAFE， ΔBDF， の外接円
の交点を M とすると

$\angle FME = \angle A$
$\angle FMD = \angle B$

$\Downarrow$

$\angle EMD$
$= 180° - \angle B - \angle A$
$= \angle C$



なんで今更初等幾何

- 初等幾何学はユークリッドから数えても二千年以上の歴史があります。新しい発見，と言ってもなかなか難しいことですが，思考の興味対象としての価値は依然として無くなってはいません。
- 日本では教員養成課程の重要なテーマだったのでしょうか，実際に初等幾何の研究者の活躍の場でありました。
- 短い二十世紀では，当然ながら公理論的な興味が重要であり，ユークリッドの公理系は数学に歴史とは別の影響を与えました。
- 非ユークリッド幾何学は十九世紀末に発見されていましたが，その数学的対象が自然の物理学的表現と結びついていることがアインシュタインの仕事の成果でありました。
- 一方では公理系の探究は，ゲーデルの仕事にもつながり，短い二十世紀の大事な成果となりました。
- そして今，コンピュータソフトの充実などにより，若者の発見と探求の場ともなっています。

公益財団法人　理数教育研究所　(Rimse)

算数・数学の自由研究　作品コンクール

2022年度　最優秀賞（Rimse理事長賞）　受賞作品

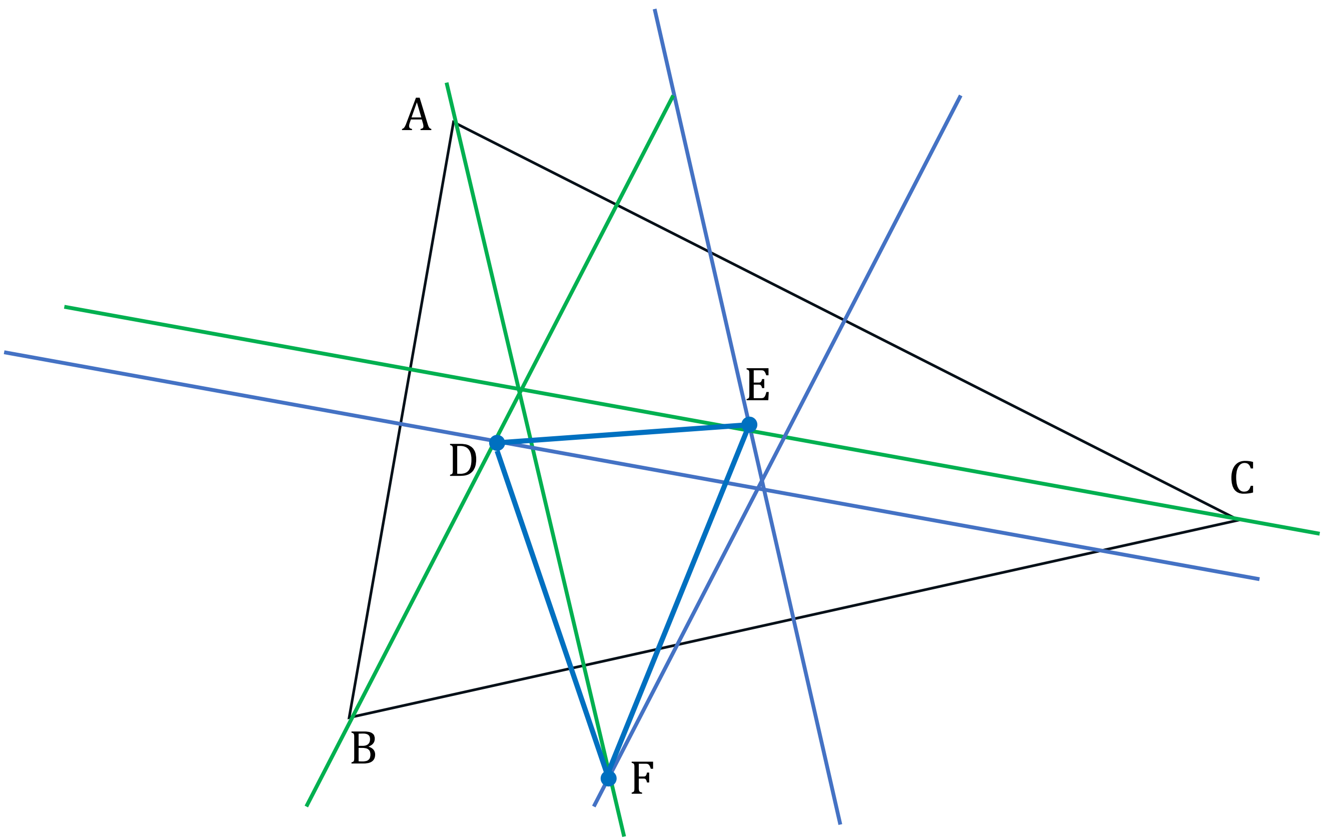
ある平面幾何の定理とMiquel点の関係

兵庫県　灘高等学校 １年　中　洋貴

[受賞作品｜公益財団法人　理数教育研究所　Rimse]

中洋貴さんの定理

ΔABC が正三角形ではないとき，ΔABC の各辺の垂直二等分線と各頂点から対辺に下した垂線について，３点 D，E，F，を図のようにとる。
このとき，ΔABC と ΔDEF は互いに相似である。

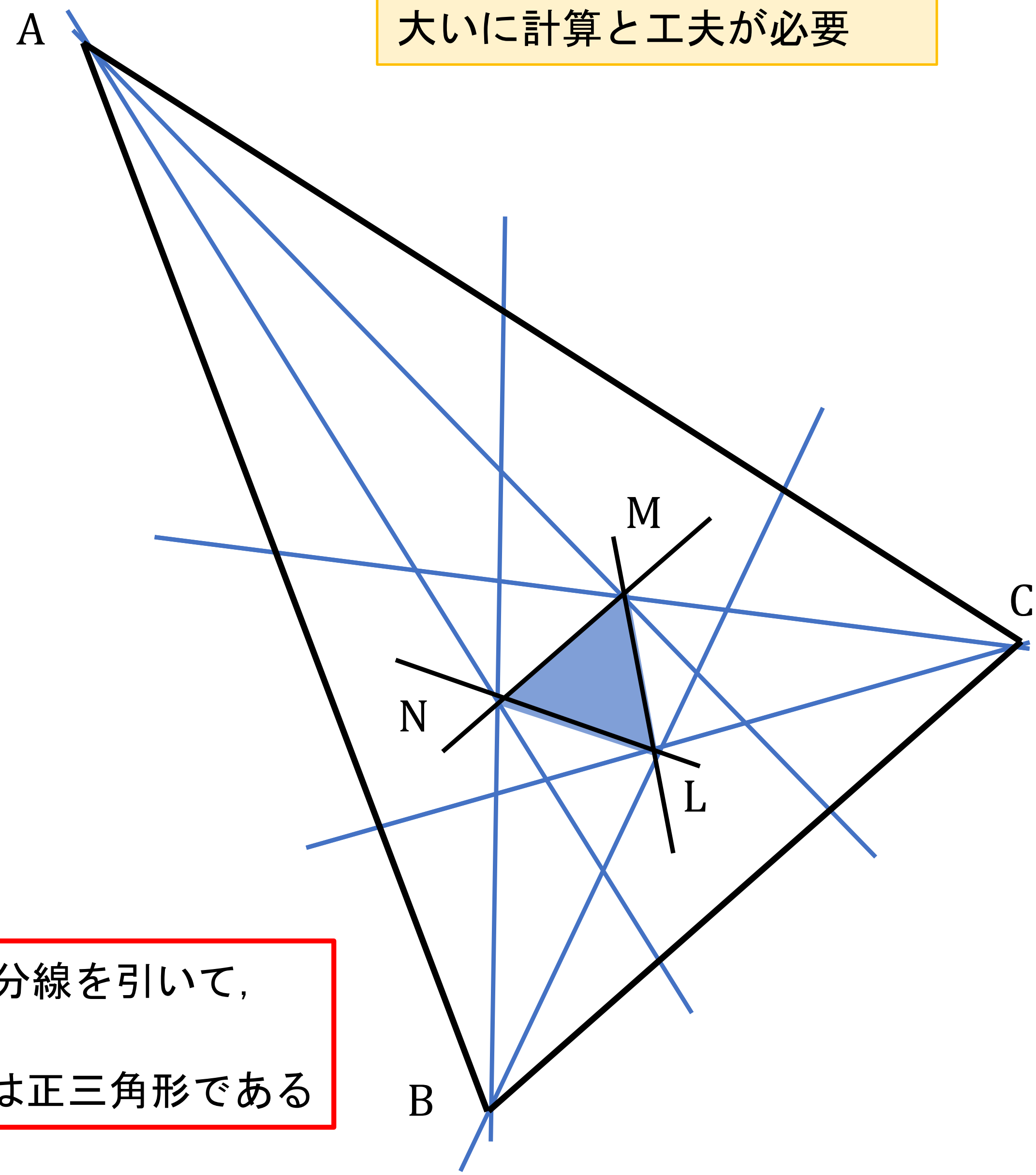


おまけ：初等幾何から二題

初等幾何学的な証明は
補助線で眼が回るし，
正弦定理を利用するのは
大いに計算と工夫が必要

モーレーの定理

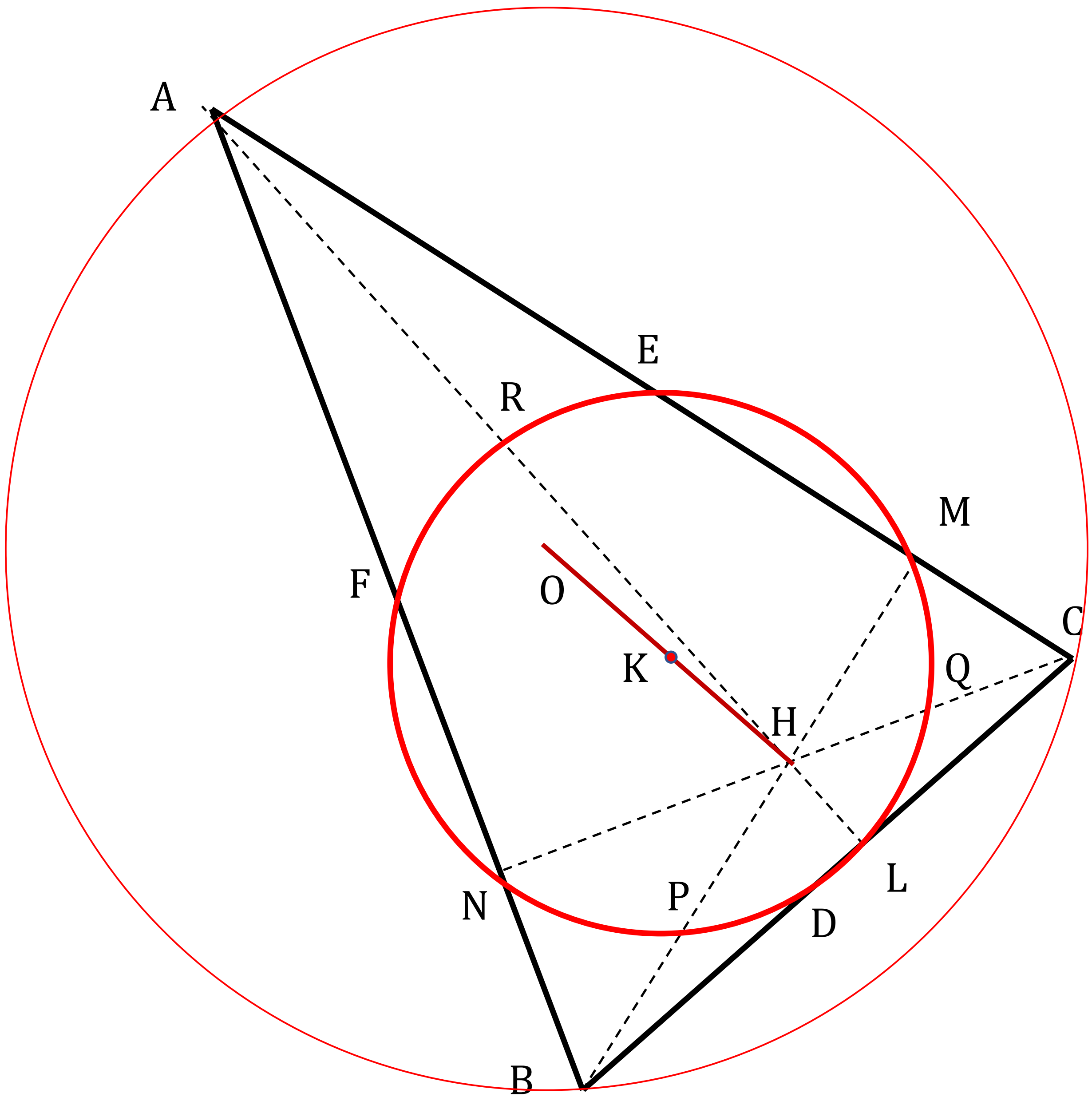
この難しい定理，の証明
はいくつも知られている。



ΔABC において，各頂角の三等分線を引いて，
交点 L，M，N
を図のようにとるとき，ΔLMN は正三角形である

ΔABC の九点円

O: ΔABC の外心
H: ΔABC の垂心
K: ΔABC のオイラー線の中点



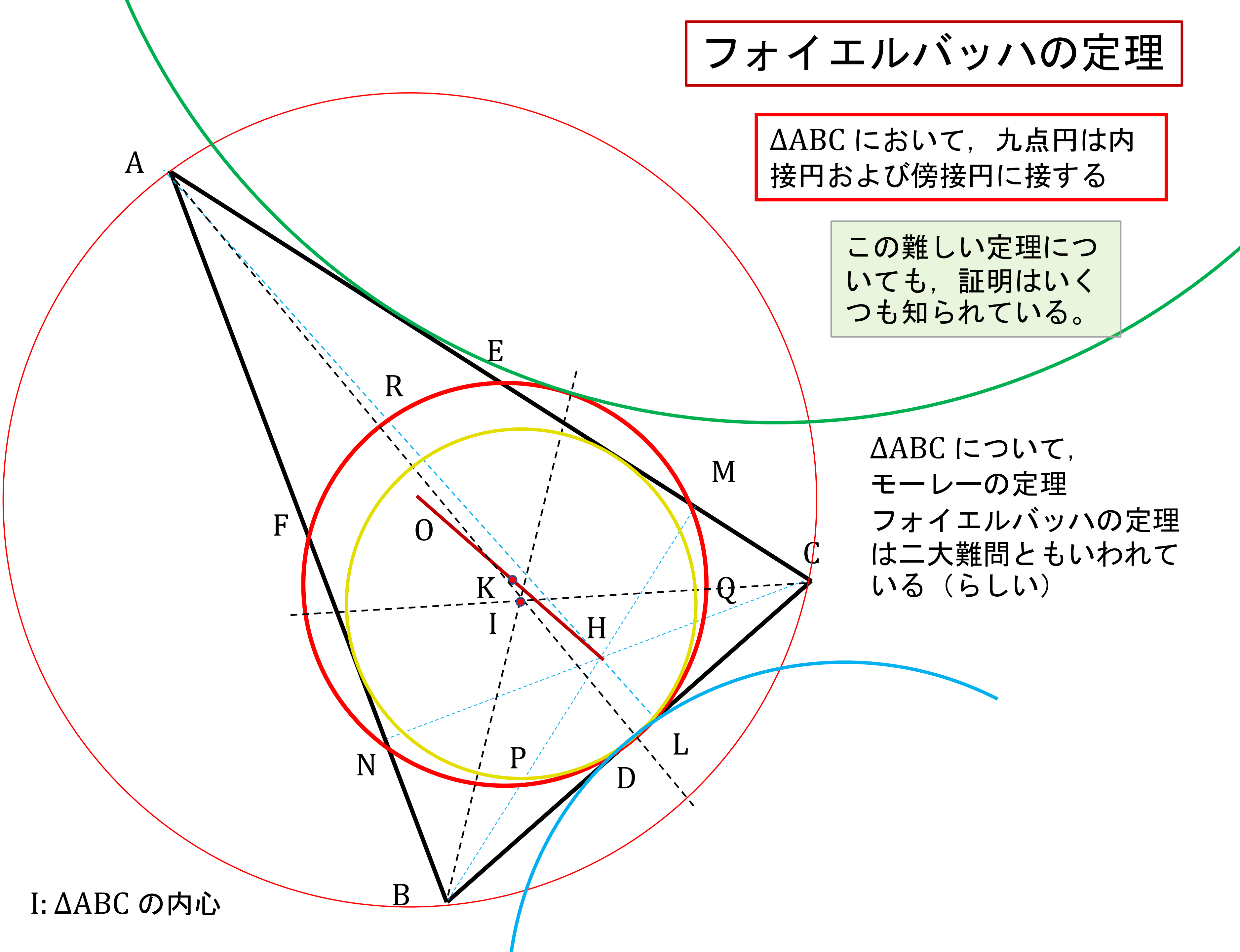
ΔABC において，各辺の中点，D，E，F，各頂点から対辺に下した垂線の足，L，M，N，垂心と各頂点を結ぶ線分の中点，P，Q，R，の9点は同一円周上にある。この円を，ΔABC の九点円という

九点円の中心は，ΔABC の外心と垂心を結ぶ線分，オイラー線，の中点である。九点円の半径は外接円の半径の半分となる

フォイエルバッハの定理

ΔABC において，九点円は内接円および傍接円に接する

この難しい定理についても，証明はいくつも知られている。



ΔABC について，
モーレーの定理
フォイエルバッハの定理
は二大難問ともいわれている（らしい）

I: ΔABC の内心

初等幾何についてもう一言

古屋先生との約束（昔々のお話し）

複素平面で幾何学を代数化

シムソン，フォイエルバッハとモーレー

意味があるのかないのか分らない定理（に惹かれる私）

初等幾何の公理系には興味なし

雑多な結果の面白さと不思議

多分，皆さんも知らないだろうけど，聞けばすぐ理解する（だろう）

こんなことはすでに知られている（という不安）

初等幾何については心配無用

誰かが既に示しているはず

小林幹雄（東京都立大学教授）
「複素数の幾何学」，東海書房（昭和29年5月）

複素平面の初等幾何

平面幾何が代数になる

回転，平行移動はアフィン変換

座標の取り方の自由度をうまく使うとわかりやすくなる

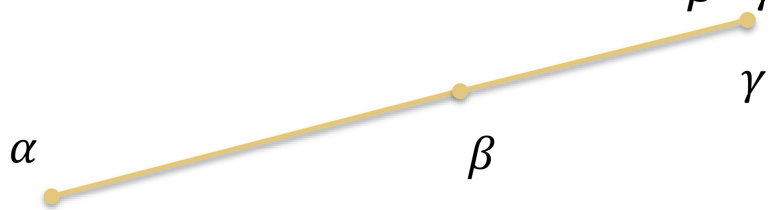
必ずしも見通しが良くなるかどうかはケースバイケース

共線，共点が式であらわされる

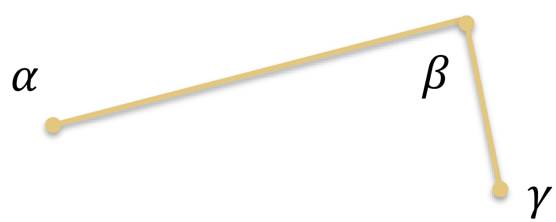
どうしても**3**次の行列式は必要

基本となるのは：

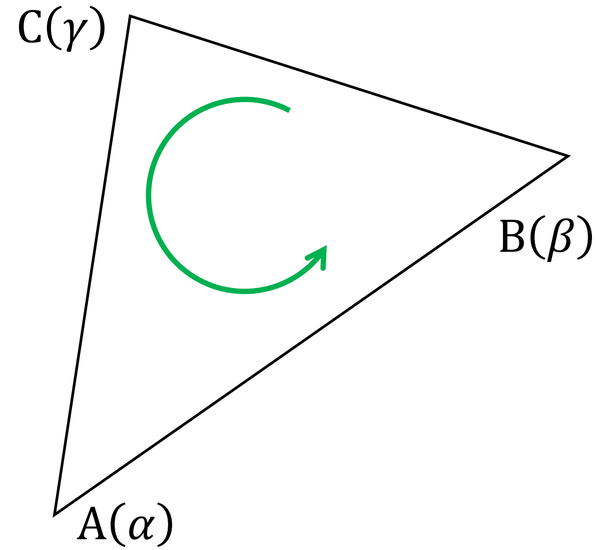
３点 α，β，γ，が１直線上にある　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$ が実数



２線分 $\alpha-\beta$，$\beta-\gamma$，が直交する　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$ が純虚数



複素平面上の相異なる３点，A，B，C，に対応する複素数を，α，β，γ，とする



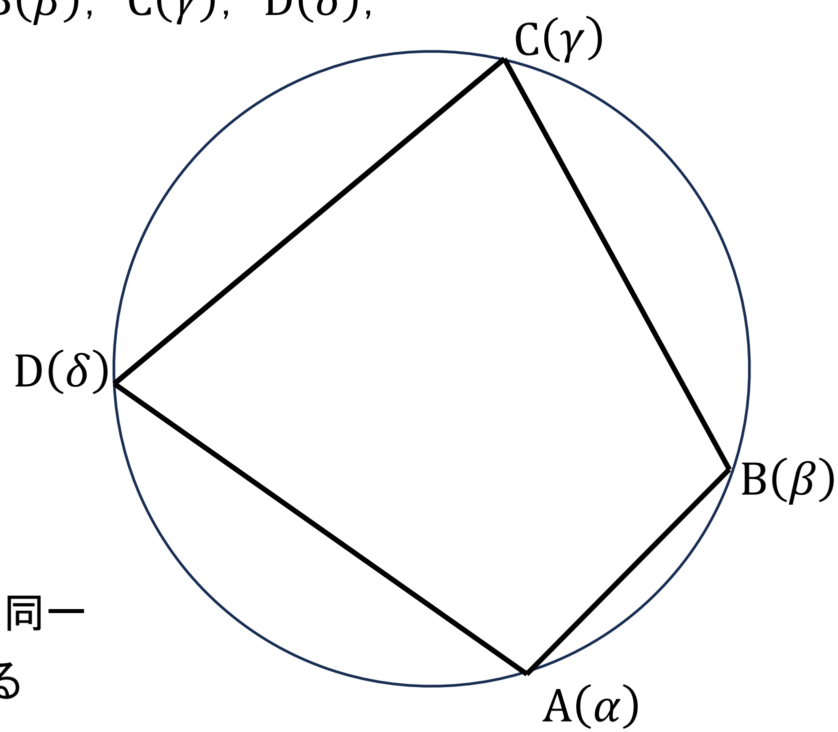
ΔABC の面積を $S(\Delta\mathrm{ABC})$ と書くと

$$S(\Delta\mathrm{ABC})=\frac{\sqrt{-1}}{4}\begin{vmatrix}1 & \alpha & \bar{\alpha}\\ 1 & \beta & \bar{\beta}\\ 1 & \gamma & \bar{\gamma}\end{vmatrix}$$

３点，A，B，C，が１直線上にあれば $\begin{vmatrix}1 & \alpha & \bar{\alpha}\\ 1 & \beta & \bar{\beta}\\ 1 & \gamma & \bar{\gamma}\end{vmatrix}=0$

複素平面上の相異なる４点，A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)，が同一円周上にあるならば

$$\begin{vmatrix}1 & \alpha & \bar{\alpha} & \alpha\bar{\alpha}\\ 1 & \beta & \bar{\beta} & \beta\bar{\beta}\\ 1 & \gamma & \bar{\gamma} & \gamma\bar{\gamma}\\ 1 & \delta & \bar{\delta} & \delta\bar{\delta}\end{vmatrix}=0$$



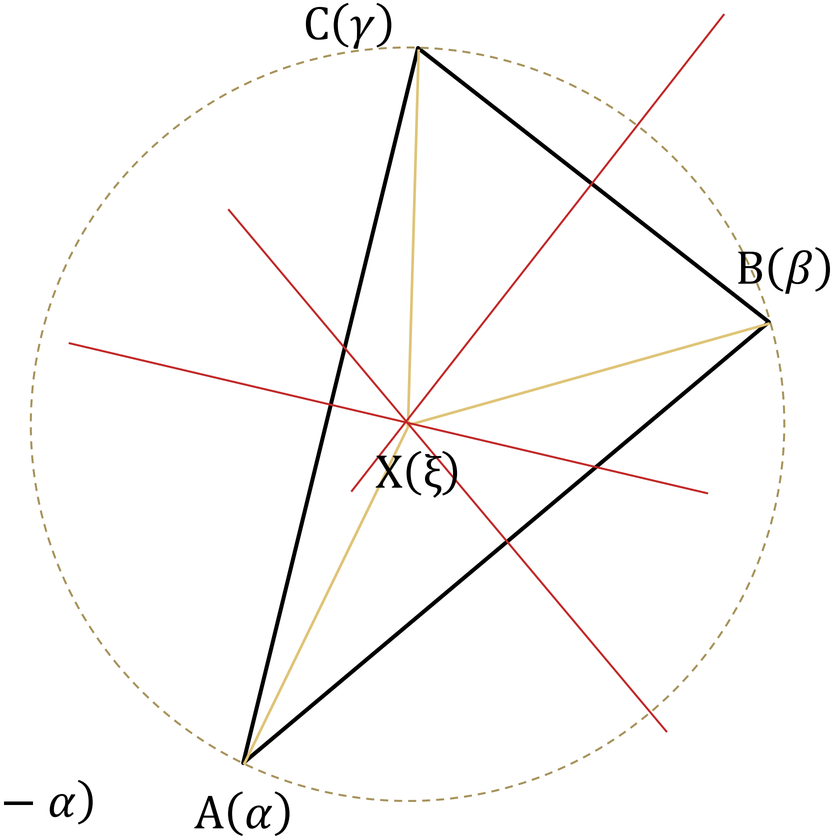
とくに $\mathrm{D}(\delta)=\mathrm{O}(0)$ のときは，

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{\bar{\alpha}} & \frac{1}{\alpha} & 1\\ \frac{1}{\bar{\beta}} & \frac{1}{\beta} & 1\\ \frac{1}{\bar{\gamma}} & \frac{1}{\gamma} & 1\end{vmatrix}=0$$

$\frac{1}{\alpha}$，$\frac{1}{\beta}$，$\frac{1}{\gamma}$，は同一直線上にある

外心の複素平面での確認

ΔABC の外心を X とし，各点を複素数を用いて右図のようにあらわすと，外心の座標は次のように定まる



$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \bar{\alpha} \\ 1 & \beta & \bar{\beta} \\ 1 & \gamma & \bar{\gamma} \end{vmatrix} \cdot \xi = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha\bar{\alpha} \\ 1 & \beta & \beta\bar{\beta} \\ 1 & \gamma & \gamma\bar{\gamma} \end{vmatrix}$$

この式から

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \bar{\alpha} \\ 1 & \beta & \bar{\beta} \\ 1 & \gamma & \bar{\gamma} \end{vmatrix} \cdot (\xi - \alpha) = (\alpha - \beta)\left(\bar{\beta} - \bar{\gamma}\right)(\gamma - \alpha)$$

外接円の半径 $k = |\xi - \alpha| = |\xi - \beta| = |\xi - \gamma|$ について次のことが分かる

$$k = \frac{abc}{4S(\Delta\mathrm{ABC})}$$

ここで，$a = |\beta - \gamma|$， $b = |\gamma - \alpha|$， $a = |\alpha - \beta|$， である

外心 X(ξ) は各辺の垂直二等分線の交点
であることから

$$\left(\frac{\bar{\beta}+\bar{\gamma}}{2}-\bar{\xi}\right)(\beta-\gamma)+\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\xi\right)(\bar{\beta}-\bar{\gamma})=0$$
$$\left(\frac{\bar{\gamma}+\bar{\alpha}}{2}-\bar{\xi}\right)(\gamma-\alpha)+\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\xi\right)(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})=0$$

すなわち

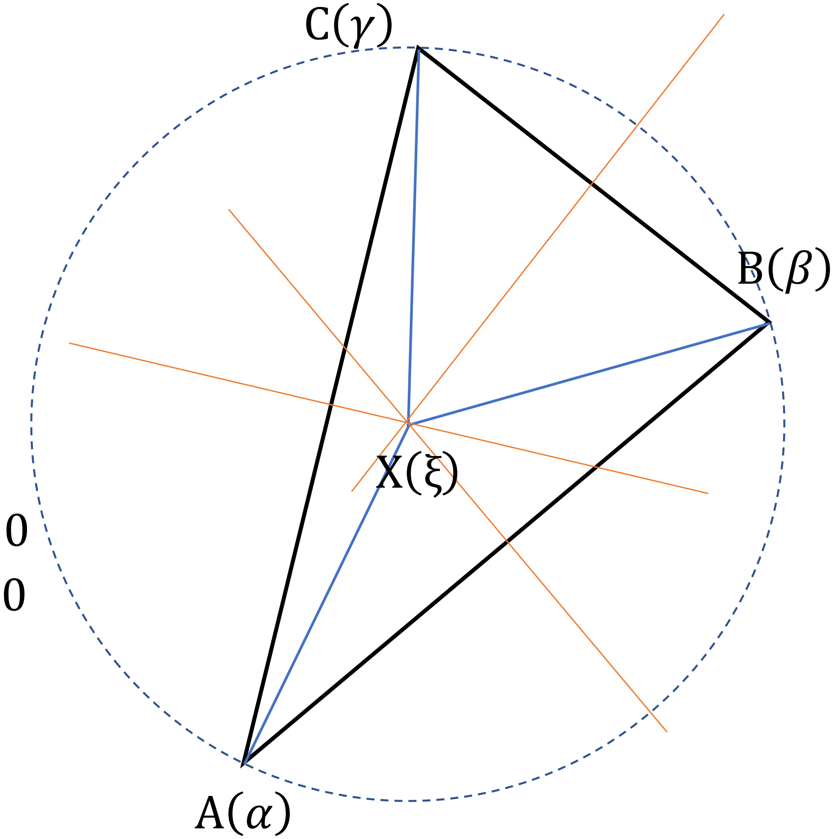
$$(\bar{\beta}+\bar{\gamma}-2\bar{\xi})(\beta-\gamma)+(\beta+\gamma-2\xi)(\bar{\beta}-\bar{\gamma})=0$$
$$(\bar{\gamma}+\bar{\alpha}-2\bar{\xi})(\gamma-\alpha)+(\gamma+\alpha-2\xi)(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})=0$$

展開して整理すると

$$\bar{\xi}(\beta-\gamma)+\xi(\bar{\beta}-\bar{\gamma})=\beta\bar{\beta}-\gamma\bar{\gamma}$$
$$\bar{\xi}(\gamma-\alpha)+\xi(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})=\gamma\bar{\gamma}-\alpha\bar{\alpha}$$

なお，両辺を加えれば

$$\bar{\xi}(\beta-\alpha)+\xi(\bar{\beta}-\bar{\alpha})=\beta\bar{\beta}-\alpha\bar{\alpha}$$



上２つの方程式からξを求めると

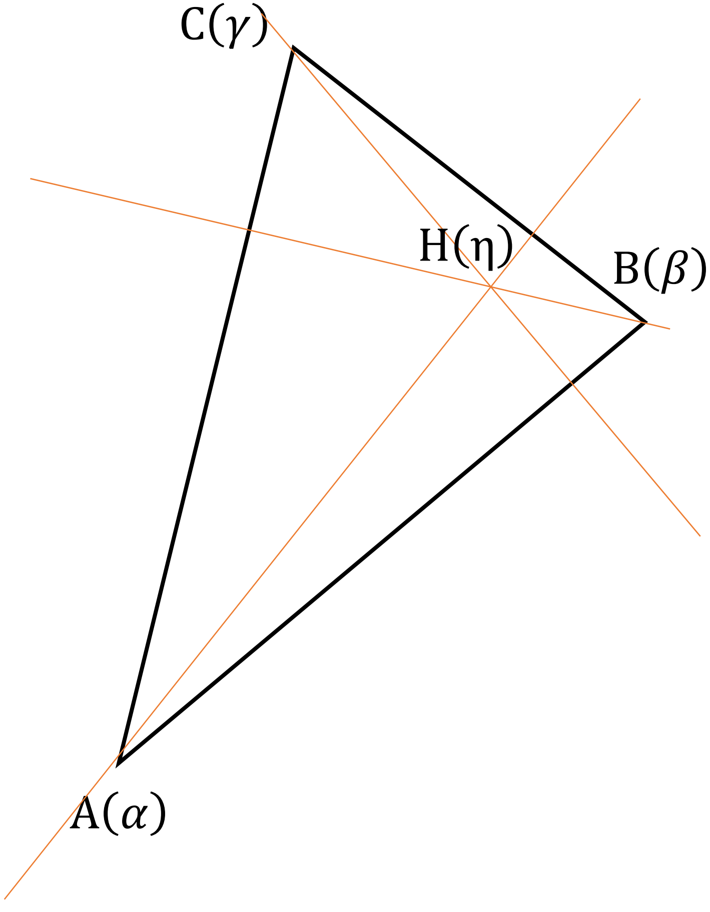
$$-\xi[(\alpha-\gamma)(\bar{\beta}-\bar{\gamma})-(\bar{\alpha}-\bar{\gamma})(\beta-\gamma)]$$
$$=\alpha\bar{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\bar{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\bar{\gamma}(\alpha-\beta)$$

この式を行列式を用いて表すと

$$\begin{vmatrix}1&\alpha&\bar{\alpha}\\1&\beta&\bar{\beta}\\1&\gamma&\bar{\gamma}\end{vmatrix}\cdot\xi=\begin{vmatrix}1&\alpha&\alpha\bar{\alpha}\\1&\beta&\beta\bar{\beta}\\1&\gamma&\gamma\bar{\gamma}\end{vmatrix}$$

垂心の複素平面での確認

ΔABC の垂心を H とし，各点を複素数を用いて右図のようにあらわす。



２頂点，A，B，から対辺に下ろした垂線の交点を H(η) とすると

$$(\bar{\alpha}-\bar{\eta})(\beta-\gamma)+(\alpha-\eta)(\bar{\beta}-\bar{\gamma})=0$$
$$(\bar{\beta}-\bar{\eta})(\gamma-\alpha)+(\beta-\eta)(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})=0$$

なお，両辺を整理して加えれば

$$(\bar{\gamma}-\bar{\eta})(\alpha-\beta)+(\gamma-\eta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})=0$$

ΔABC の３頂点から対辺に下ろした垂線は１点 H(η) で交わる

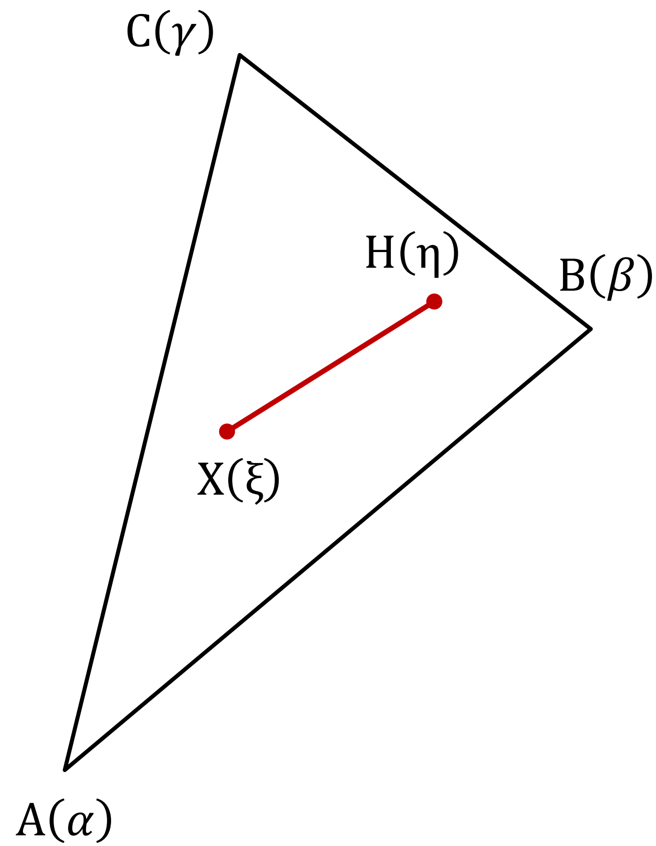
また，ΔABC の外心を X(ξ) とすると，上で示したように

$$(\bar{\beta}+\bar{\gamma}-2\bar{\xi})(\beta-\gamma)+(\beta+\gamma-2\xi)(\bar{\beta}-\bar{\gamma})=0$$
$$(\bar{\gamma}+\bar{\alpha}-2\bar{\xi})(\gamma-\alpha)+(\gamma+\alpha-2\xi)(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})=0$$

すなわち

$$(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}-\bar{\eta}-2\bar{\xi})(\beta-\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma-\eta-2\xi)(\bar{\beta}-\bar{\gamma})=0$$
$$(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}-\bar{\eta}-2\bar{\xi})(\gamma-\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma-\eta-2\xi)(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})=0$$

外心，垂心とオイラー線



ΔABC の外心を X，垂心を H とし，各点を複素数を用いて右図のようにあらわす。

このとき下段の式が成り立つ

$$\begin{vmatrix} \beta-\gamma & \bar{\beta}-\bar{\gamma} \\ \gamma-\alpha & \bar{\gamma}-\bar{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \bar{\alpha} \\ 1 & \beta & \bar{\beta} \\ 1 & \gamma & \bar{\gamma} \end{vmatrix} \neq 0$$

であるから　$\alpha+\beta+\gamma-\eta-2\xi=0$

$$\eta=\alpha+\beta+\gamma-2\xi$$

すなわち，ΔABC の重心を Z(ζ) とすると

$$\eta+2\xi=3\zeta \qquad \zeta=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

ΔABC の重心は外心と垂心を結ぶ線分，オイラー線，を 1: 2 に内分する

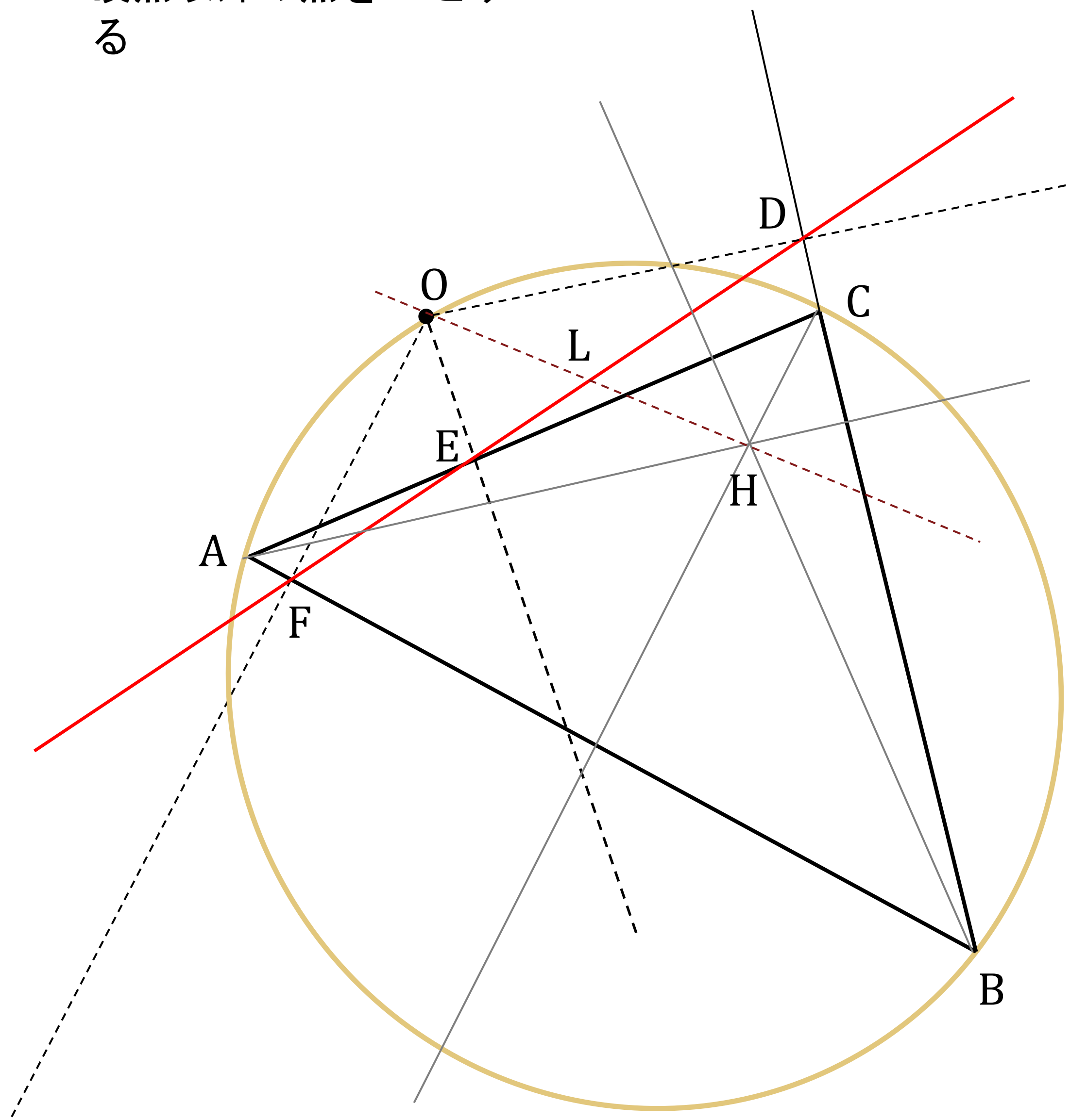
$$\left(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}-\bar{\eta}-2\bar{\xi}\right)(\beta-\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma-\eta-2\xi)\left(\bar{\beta}-\bar{\gamma}\right)=0$$
$$\left(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}-\bar{\eta}-2\bar{\xi}\right)(\gamma-\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma-\eta-2\xi)(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})=0$$

複素平面の三角形

- シムソンの定理
- フェルマー点とナポレオン点

シムソンの定理とその逆

ΔABC の外接円周上の，頂点以外の点を O とする



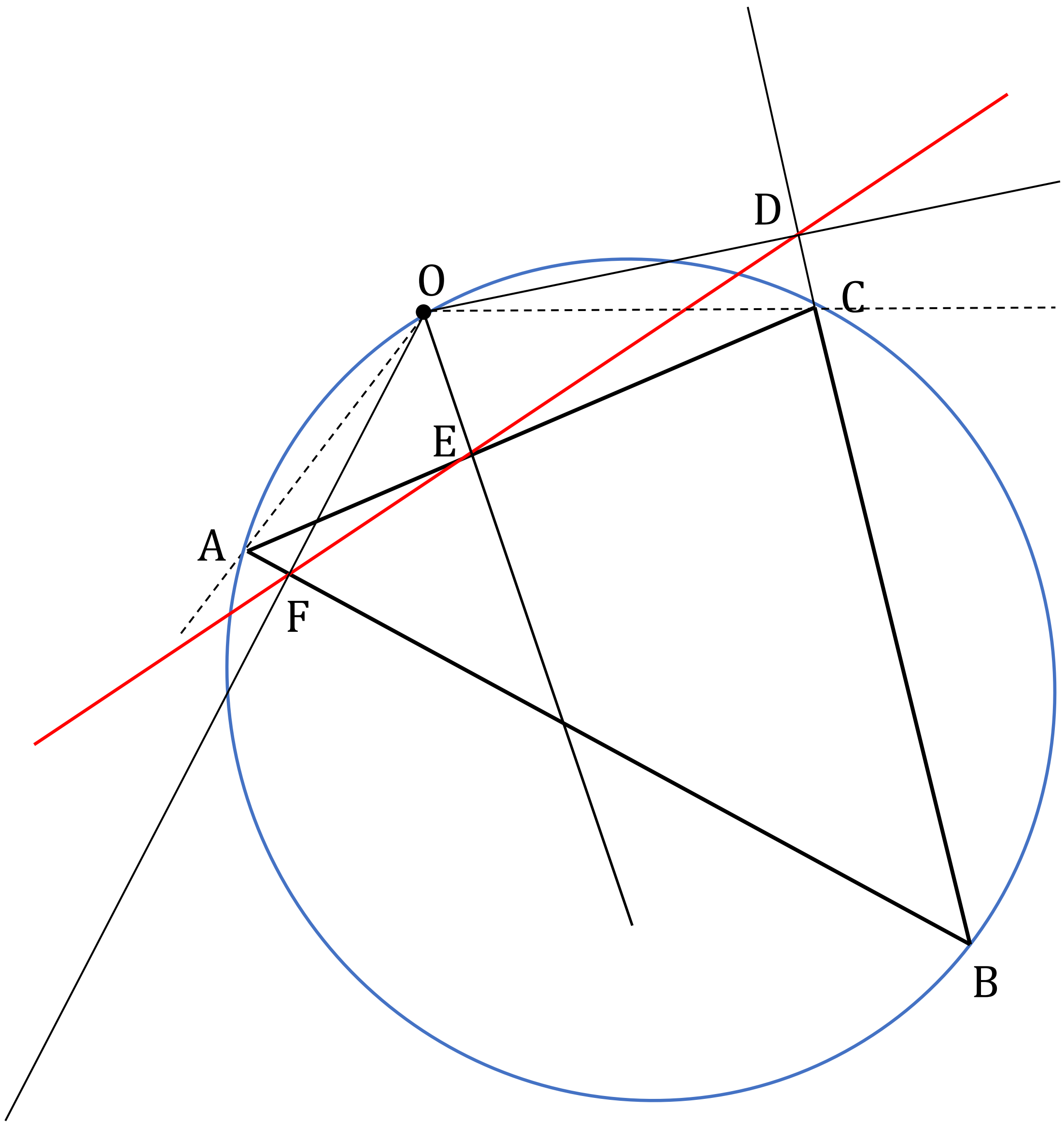
このとき，ΔABC の各辺あるいはその延長線上に O から下した垂線の足 D，E，F，は同一直線上にある。
（また，逆も成り立つ）

この定理の証明は角度の関係を考慮すれば難しくない

この直線を ΔABC の O に関するシムソン線という

さらに ΔABC の垂心を H とするとき，O と H の中点 L は ΔABC の O に関するシムソン線上にある

$\angle FOE = \angle A$



$\angle DCO = \angle DEO$

$\angle DCO = \angle FAO$

$\angle OEF + \angle FAO = 180°$

$\Downarrow$

$\angle OEF + \angle DEO = 180°$

$\angle OEF + \angle DEO = 180°$

$\angle DCO = \angle DEO$

$\angle OEF + \angle FAO = 180°$

$\Downarrow$

$\angle FAO = \angle DCO$

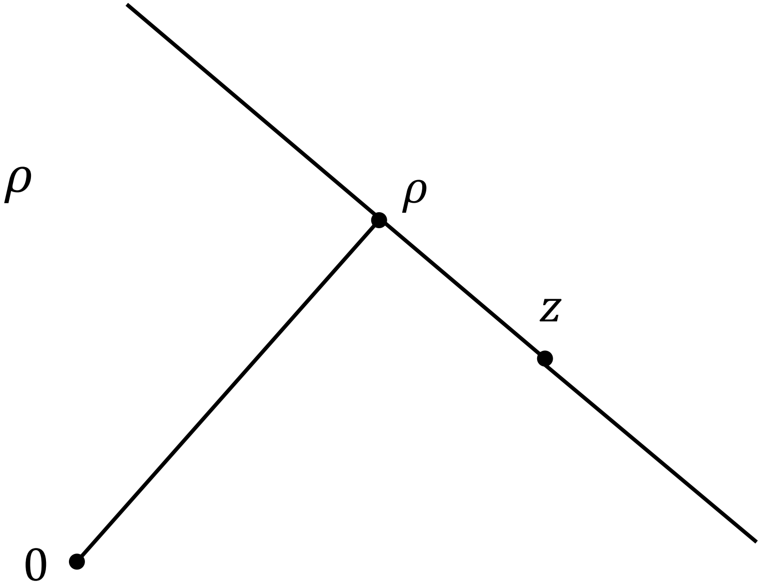
$\Downarrow$

$\angle OCB + \angle BAO = 180°$

基本的な方程式

直線に，原点からおろした垂線の足を ρ とすると，この直線の方程式は

$$\frac{z-\rho}{\rho}+\frac{\bar{z}-\bar{\rho}}{\bar{\rho}}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{\rho}+\frac{\bar{z}}{\bar{\rho}}=2$$

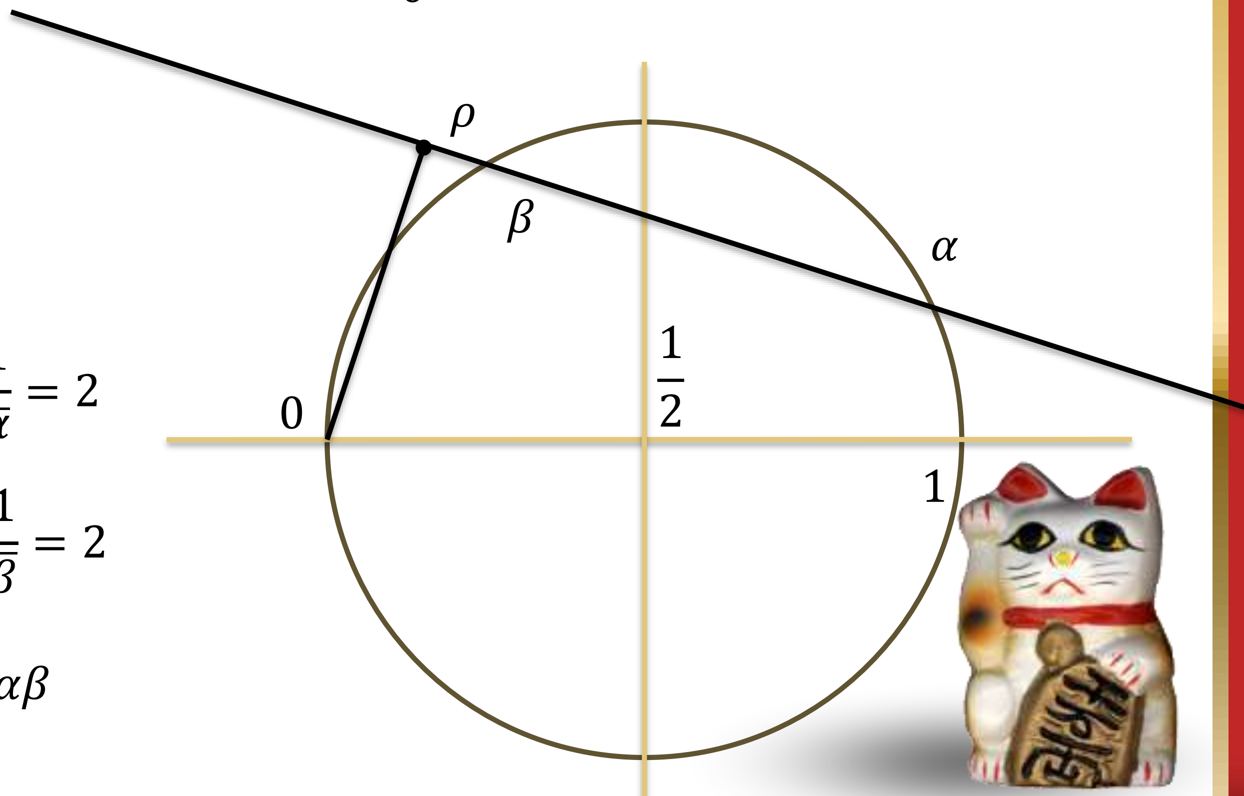


右図の場合を考えると

$$\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\bar{\alpha}}=2$$

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\bar{\beta}}=2$$

$$\frac{z}{\rho}+\frac{\bar{z}}{\bar{\rho}}=2 \quad \Rightarrow \quad \rho=\alpha\beta$$



シムソンの定理

円 $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ を外接円とする三角形の頂点を α，β，γ，とすると原点から３辺におろした垂線の足は $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$，であり，この３点は同一直線上にある。
この直線をシムソン線という。

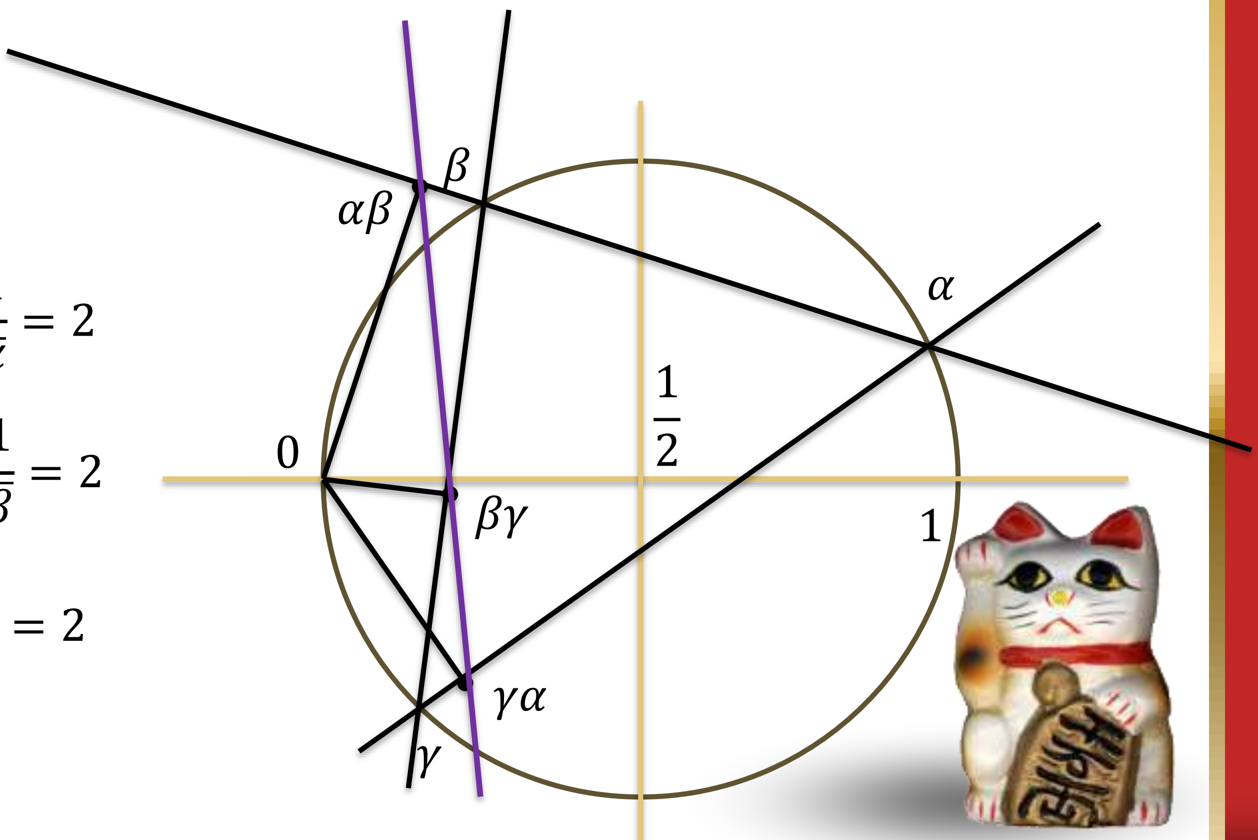
原点からシムソン線におろした垂線の足は $\alpha\beta\gamma$ である。

$$\frac{z}{\rho}+\frac{\bar{z}}{\bar{\rho}}=2 \quad , \quad \rho=\alpha\beta\gamma$$

$$z=\beta\gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\bar{\alpha}}=2$$

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\bar{\beta}}=2$$

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\bar{\gamma}}=2$$



シムソンの定理の拡張

円 $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ に４点 α，β，γ，δ，をとる。
このとき，三角形が４つあり、シムソン線も４本ある。これらに原点から下した垂線の足は $\alpha\beta\gamma$，$\alpha\beta\delta$，$\alpha\gamma\delta$，$\beta\gamma\delta$，であり，この４点は同一直線上にある。

原点からこの直線におろした垂線の足は $\alpha\beta\gamma\delta$ である。

以下同様…

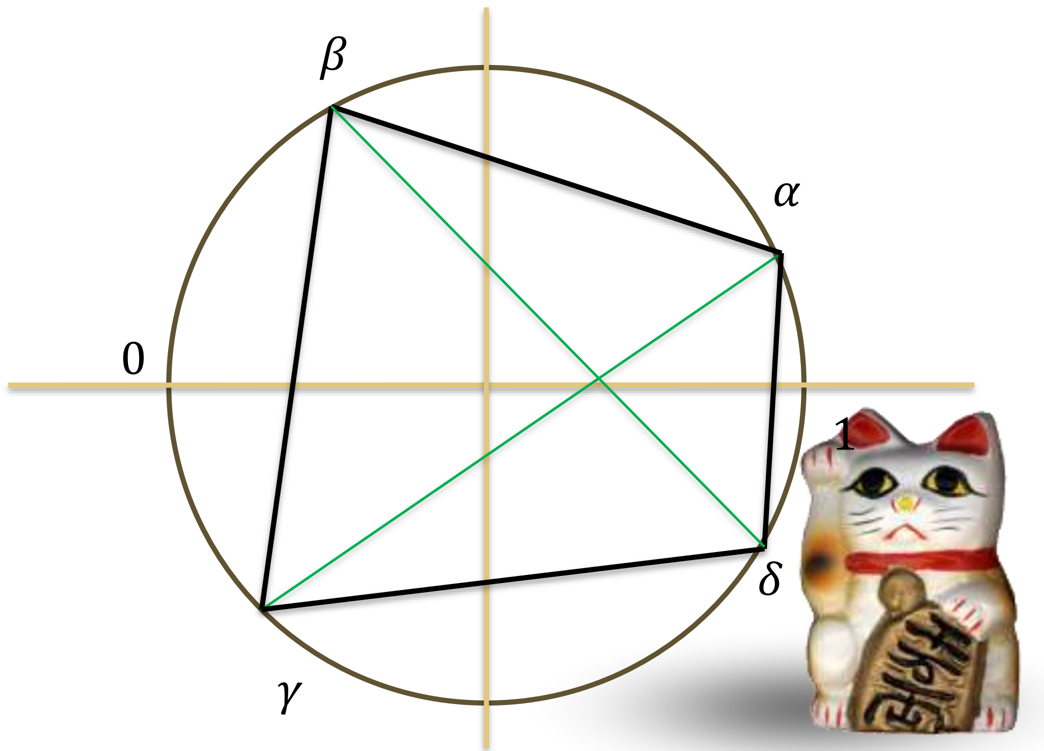
$$\frac{z}{\rho}+\frac{\bar{z}}{\bar{\rho}}=2 \quad , \quad \rho=\alpha\beta\gamma\delta$$

$$z=\beta\gamma\delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\bar{\alpha}}=2$$

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\bar{\beta}}=2$$

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\bar{\gamma}}=2$$

$$\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\bar{\delta}}=2$$



垂心の確認

$A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $O(0)$, $H(\eta)$,

ΔABC の外心：$\xi = \frac{1}{2}$

ΔABC の垂心：$\eta = \alpha + \beta + \gamma - 1$

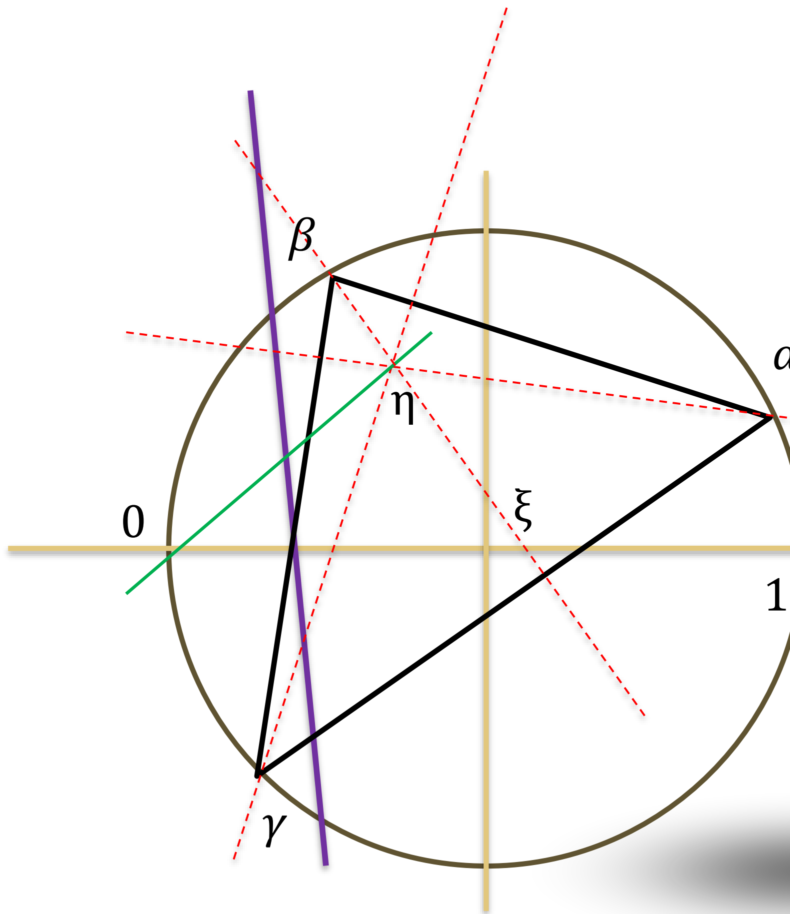
ΔABC の重心：$\zeta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

シムソン線の方程式

$$\frac{z}{\rho} + \frac{\bar{z}}{\bar{\rho}} = 2 \quad , \quad \rho = \alpha\beta\gamma$$

さらに ΔABC の垂心を H とするとき，O と H の中点 L は ΔABC の O に関するシムソン線上にある

このことを簡単な代数計算で確認することができる



$$
\begin{aligned}
&2\bar{\rho}(\alpha+\beta+\gamma-1)+2\rho(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}-1)\\
&=2\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}(\alpha+\beta+\gamma-1)+2\alpha\beta\gamma(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}-1)\\
&=(\alpha+\bar{\alpha})(\bar{\beta}\bar{\gamma}+\beta\gamma)+\bar{\alpha}\left((\beta+\bar{\beta})\bar{\gamma}+\bar{\beta}(\gamma+\bar{\gamma})-2\bar{\beta}\bar{\gamma}\right)+\alpha\left((\beta+\bar{\beta})\gamma+\beta(\gamma+\bar{\gamma})-2\beta\gamma\right)\\
&=(\alpha+\bar{\alpha})(\bar{\beta}\bar{\gamma}+\beta\gamma)+\bar{\alpha}(\beta\bar{\gamma}+\bar{\beta}\gamma)+\alpha(\bar{\beta}\gamma+\beta\bar{\gamma})\\
&=(\alpha+\bar{\alpha})(\bar{\beta}\bar{\gamma}+\beta\gamma)+(\alpha+\bar{\alpha})(\beta\bar{\gamma}+\bar{\beta}\gamma)\\
&=(\alpha+\bar{\alpha})(\beta+\bar{\beta})(\gamma+\bar{\gamma})\\
&=8\alpha\beta\gamma\cdot\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\\
&=8\rho\bar{\rho}
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma-1}{2}+\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}-1}{2}=2$$

すなわち，OHの中点Lはシムソン線上にある。

$$\frac{z}{\rho}+\frac{\bar{z}}{\bar{\rho}}=2 \quad , \quad \rho=\alpha\beta\gamma$$

$\mathrm{H}(\alpha+\beta+\gamma-1)$

$\mathrm{L}\left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-1}{2}\right)$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\bar{\alpha}}=2$$

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\bar{\beta}}=2$$

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\bar{\gamma}}=2$$

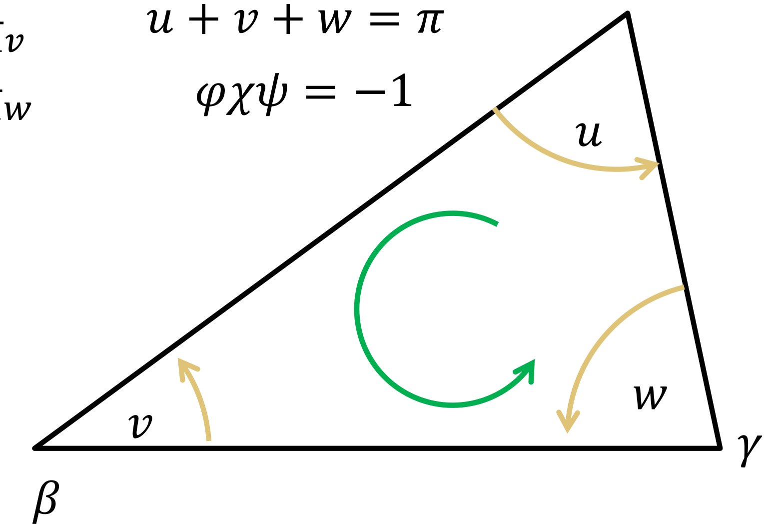
複素平面の三角形とその内角

三角形の内角の向きに注意

３点 α,β,γ の定める三角形について内角 u,v,w を図のようにとる

$$\varphi = e^{\sqrt{-1}u}$$
$$\chi = e^{\sqrt{-1}v}$$
$$\psi = e^{\sqrt{-1}w}$$

$$u,v,w > 0$$
$$u+v+w=\pi$$
$$\varphi\chi\psi = -1$$

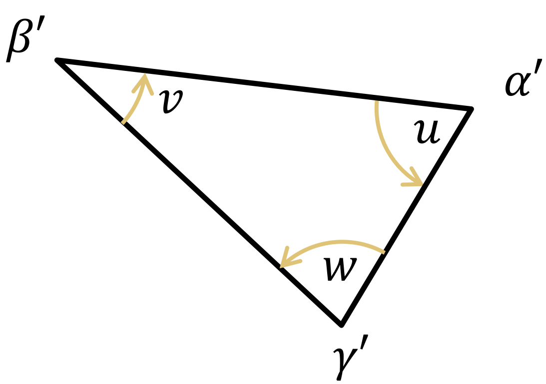


このとき

$$\boxed{(\varphi^2-1)\alpha + \left(\frac{1}{\psi^2}-\varphi^2\right)\beta + \left(1-\frac{1}{\psi^2}\right)\gamma = 0}$$

$$(\varphi^2-1)\cdot 1 + \left(\frac{1}{\psi^2}-\varphi^2\right)\cdot 1 + \left(1-\frac{1}{\psi^2}\right)\gamma\cdot 1 = 0$$

であることから



３点 α,β,γ の定める三角形と３点 α',β',γ' の定める三角形が同じ向きに互いに相似であれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

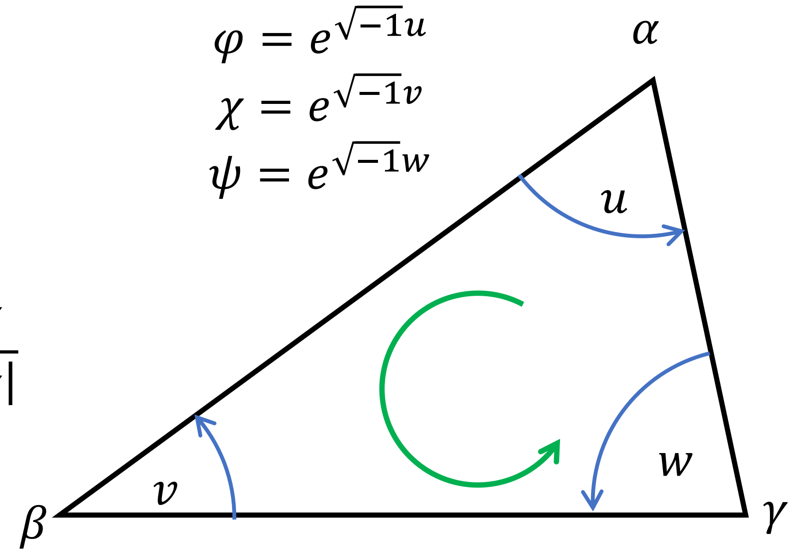
三角形の内角の向きに注意

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\varphi} \qquad \bar{\chi} = \frac{1}{\chi} \qquad \bar{\psi} = \frac{1}{\psi}$$

$$\frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|} \cdot \varphi = \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|} \qquad \frac{\gamma - \beta}{|\gamma - \beta|} \cdot \chi = \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}$$

$$\frac{\alpha - \gamma}{|\alpha - \gamma|} \cdot \psi = \frac{\beta - \gamma}{|\beta - \gamma|}$$

$$\varphi = e^{\sqrt{-1}u}$$
$$\chi = e^{\sqrt{-1}v}$$
$$\psi = e^{\sqrt{-1}w}$$



$$\varphi\chi\psi = -1$$

$$\varphi^2\chi^2\psi^2 = 1$$

$$\frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|} \cdot \varphi = \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|}$$ を整理して

$$\varphi^2(\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) - \left(\bar{\beta} - \bar{\alpha}\right)(\gamma - \alpha) = 0$$

同様に

$$\chi^2(\gamma - \beta)\left(\bar{\alpha} - \bar{\beta}\right) - \left(\bar{\gamma} - \bar{\beta}\right)(\alpha - \beta) = 0$$

$$\psi^2(\alpha - \gamma)\left(\bar{\beta} - \bar{\gamma}\right) - (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})(\beta - \gamma) = 0$$

$$\varphi^2(\beta-\alpha)(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})-\left(\bar{\beta}-\bar{\alpha}\right)(\gamma-\alpha)=0$$

$$\psi^2(\alpha-\gamma)\left(\bar{\beta}-\bar{\gamma}\right)-(\bar{\alpha}-\bar{\gamma})(\beta-\gamma)=0$$

$$\varphi\chi\psi=-1$$

$$\varphi^2\chi^2\psi^2=1$$

から $\bar{\gamma}-\bar{\alpha}$ を消去すると

$$\boxed{\varphi^2(\beta-\alpha)-\frac{1}{\psi^2}(\beta-\gamma)=\gamma-\alpha}$$

あるいは

$$\boxed{(\varphi^2-1)\alpha+\left(\frac{1}{\psi^2}-\varphi^2\right)\beta+\left(1-\frac{1}{\psi^2}\right)\gamma=0}$$

同様に

$$\left(\frac{1}{\chi^2}-\psi^2\right)\alpha+\left(1-\frac{1}{\chi^2}\right)\beta+(\psi^2-1)\gamma=0$$

$$\left(1-\frac{1}{\varphi^2}\right)\alpha+(\chi^2-1)\beta+\left(\frac{1}{\varphi^2}-\chi^2\right)\gamma=0$$

$\varphi^2\chi^2\psi^2=1$ により，これら３式は同値である

$\varphi^2=\chi^2=\psi^2=\omega$ とすれば

$$(\omega-1)\alpha+\omega(\omega-1)\beta+(1-\omega)(1+\omega)\gamma=0$$

$$\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma=0$$

$$\omega^2+\omega+1=0$$

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\varphi = e^{\sqrt{-1}u}$$
$$\chi = e^{\sqrt{-1}v}$$
$$\psi = e^{\sqrt{-1}w}$$

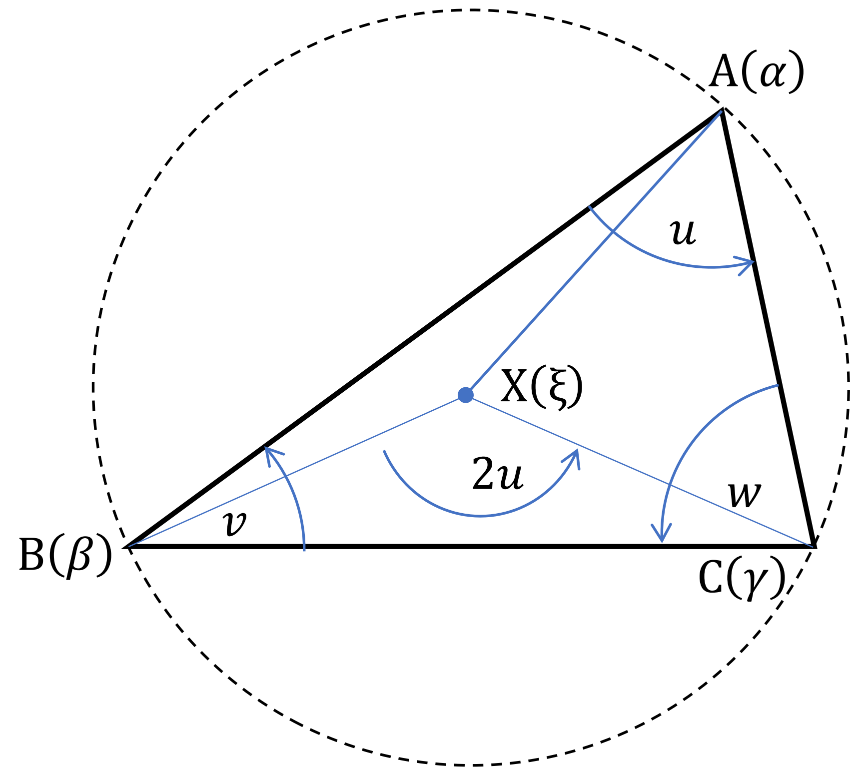
ΔABC の外心を X とし，内角を図のように定めると

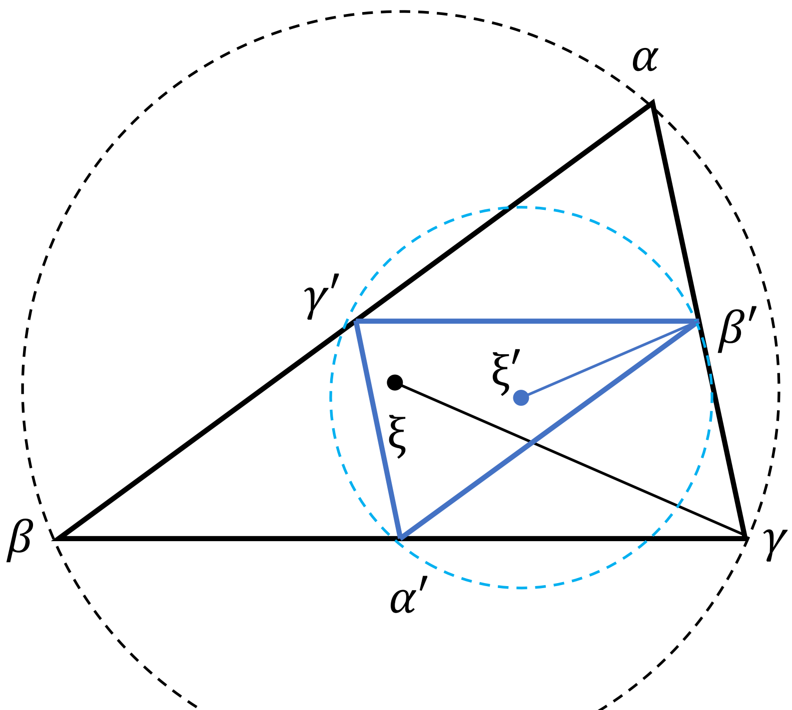
$$\varphi^2 = \frac{\gamma - \xi}{\beta - \xi} \qquad \varphi^2 - 1 = -\frac{\beta - \gamma}{\beta - \xi}$$

同様に

$$\chi^2 - 1 = -\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \xi}$$

$$\psi^2 - 1 = -\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \xi}$$





ΔABC の各辺の中点を右図のように，A′(α′)，B′(β′)，C′(γ′)，とし，ΔA′B′C′ の外心を X′(ξ′) と書く

$$\varphi^2 - 1 = -\frac{\beta - \gamma}{\beta - \xi} \quad \chi^2 - 1 = -\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \xi} \quad \psi^2 - 1 = -\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \xi}$$

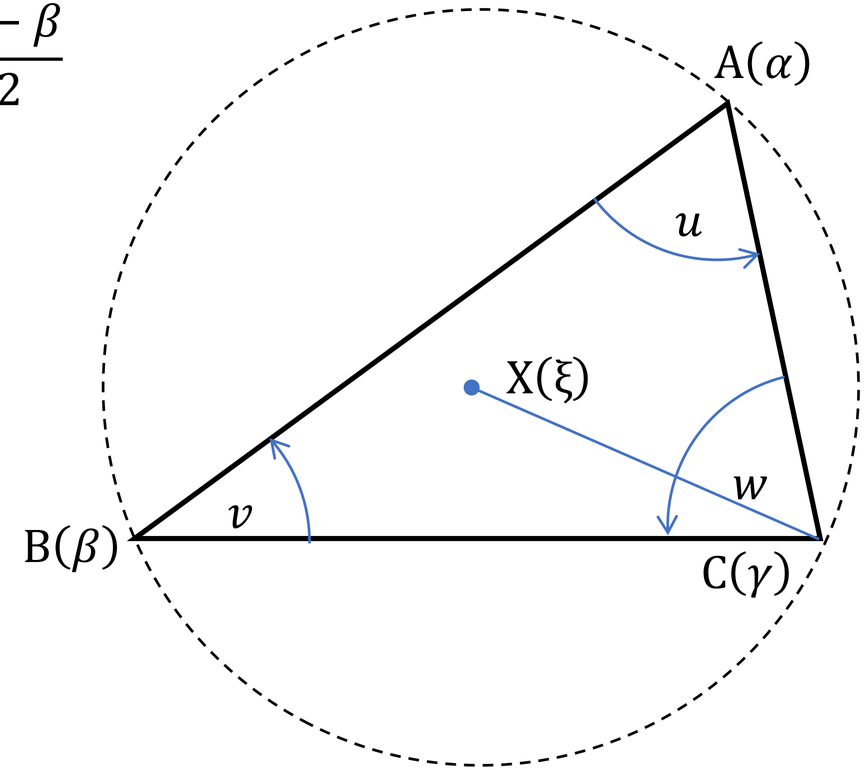
$$\varphi^2 - 1 = -\frac{\beta' - \gamma'}{\beta' - \xi'} \qquad \beta' = \frac{\gamma + \alpha}{2} \quad \gamma' = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad \beta' - \gamma' = -\frac{\beta - \gamma}{2}$$

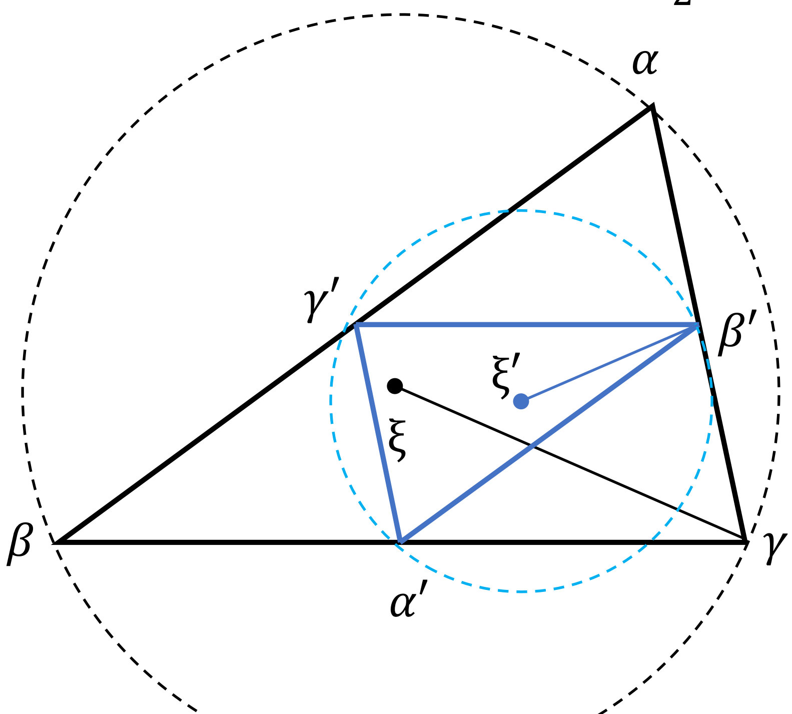
$$\frac{\beta - \gamma}{\beta - \xi} = -\frac{\beta - \gamma}{2\beta' - 2\xi'} \qquad \xi' - \beta' = -\frac{\xi - \beta}{2}$$

$$\xi' = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \xi}{2} = \frac{\eta + \xi}{2}$$

$\Delta A'B'C'$ の外接円は ΔABC の九点円であり，

中心はオイラー線の中点，半径は $\frac{k}{2}$ である





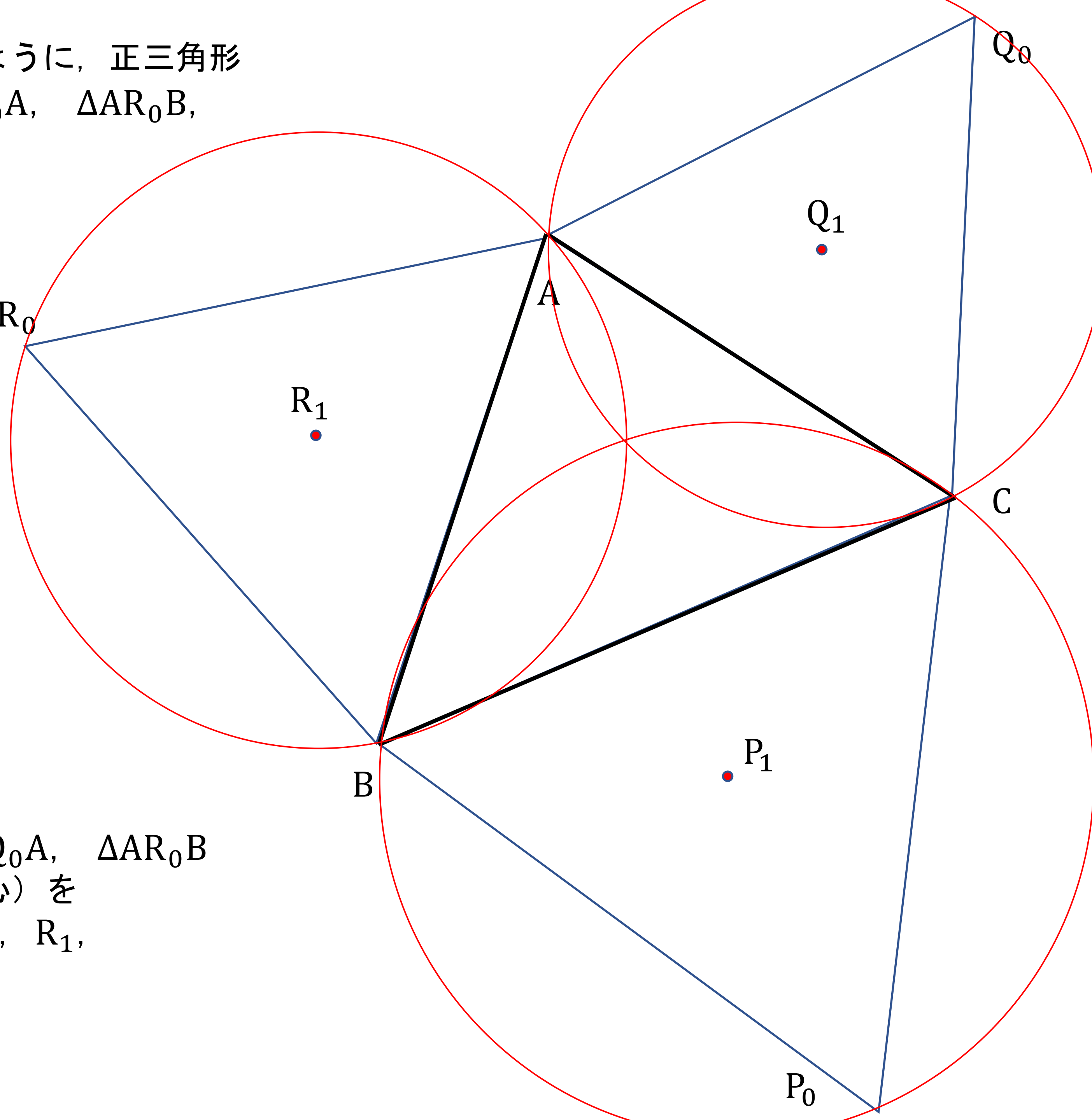
ΔABC の垂心を $H(\eta)$，外接円の半径を k とする

$$\eta = \alpha + \beta + \gamma - 2\xi$$

ΔABC の外側に図のように，正三角形

ΔBP_0C，　ΔCQ_0A，　ΔAR_0B，

を描く



正三角形

ΔBP_0C，　ΔCQ_0A，　ΔAR_0B

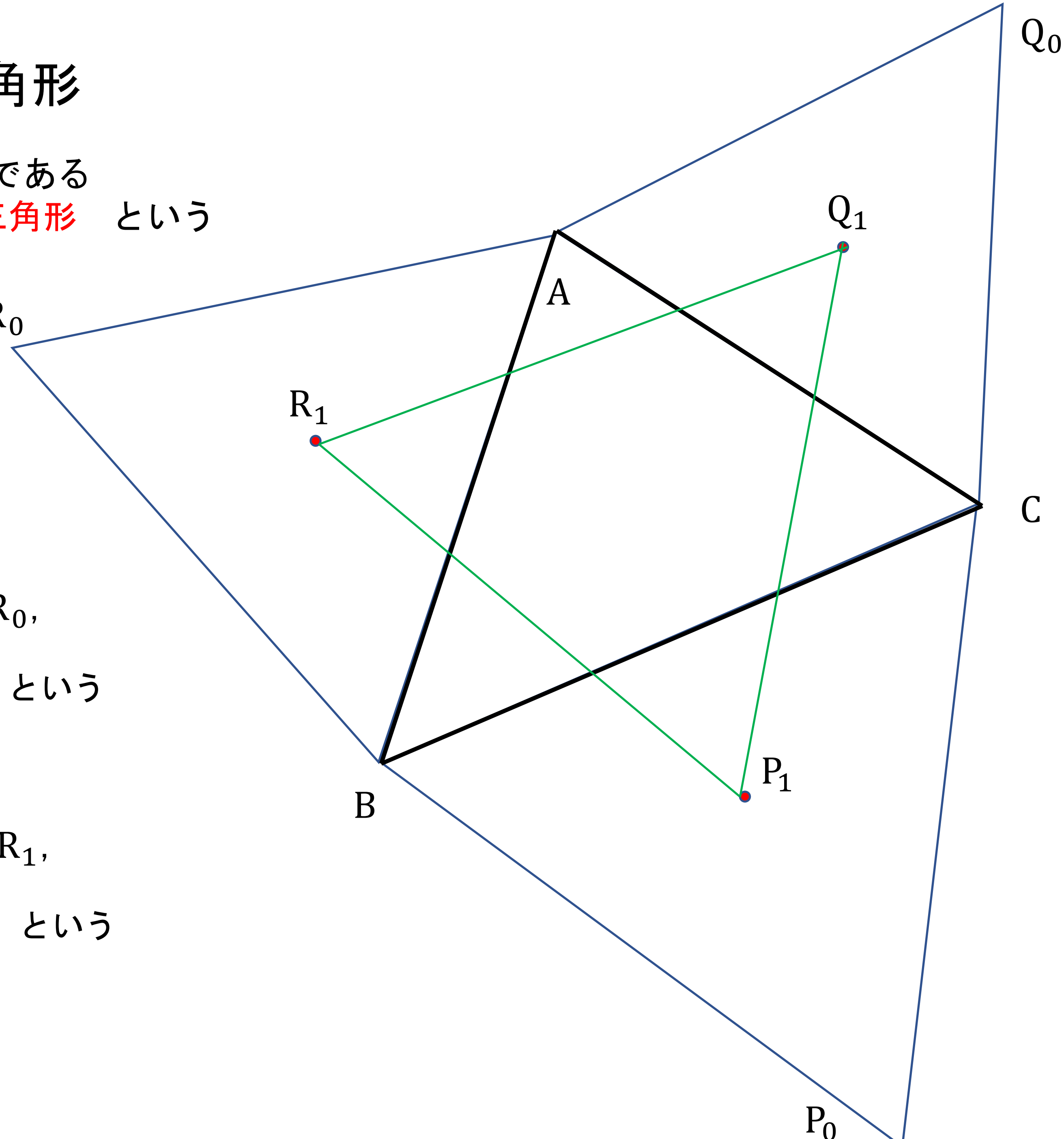
の中心（外接円の中心）を

P_1，　Q_1，　R_1，

とする

ナポレオン三角形

$\Delta P_1Q_1R_1$ は正三角形である
これを　ナポレオン三角形　という



三直線
AP_0,　BQ_0,　CR_0,
は一点で交わる
これを　フェルマー点　という

三直線
AP_1,　BQ_1,　CR_1,
は一点で交わる
これを　ナポレオン点　という

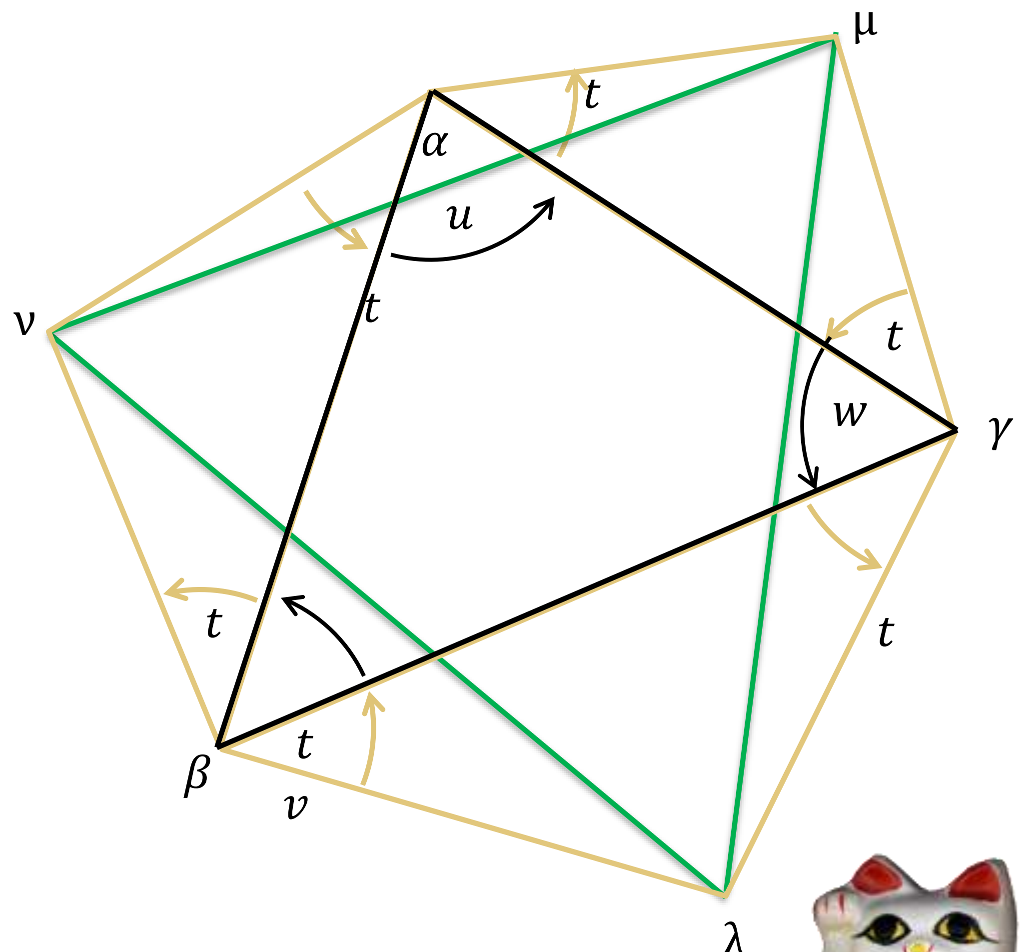
ΔABC の外側に互いに相似な二等辺三角形
ΔBPC,　ΔCQA,　ΔARB,
を描く。

A(α), B(β), C(γ),
P(λ), Q(μ), R(ν),

$$\varphi = e^{\sqrt{-1}u}$$
$$\chi = e^{\sqrt{-1}v}$$
$$\psi = e^{\sqrt{-1}w}$$

$$\varphi\chi\psi = -1$$

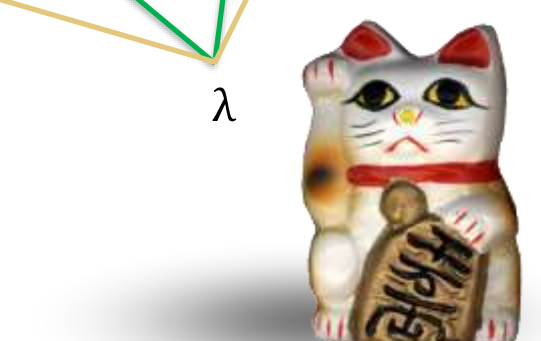
$$\theta = e^{\sqrt{-1}t}$$



$$\theta^2\beta - (\theta^2 + 1)\lambda + \gamma = 0$$
$$\theta^2\gamma - (\theta^2 + 1)\mu + \alpha = 0$$
$$\theta^2\alpha - (\theta^2 + 1)\nu + \beta = 0$$

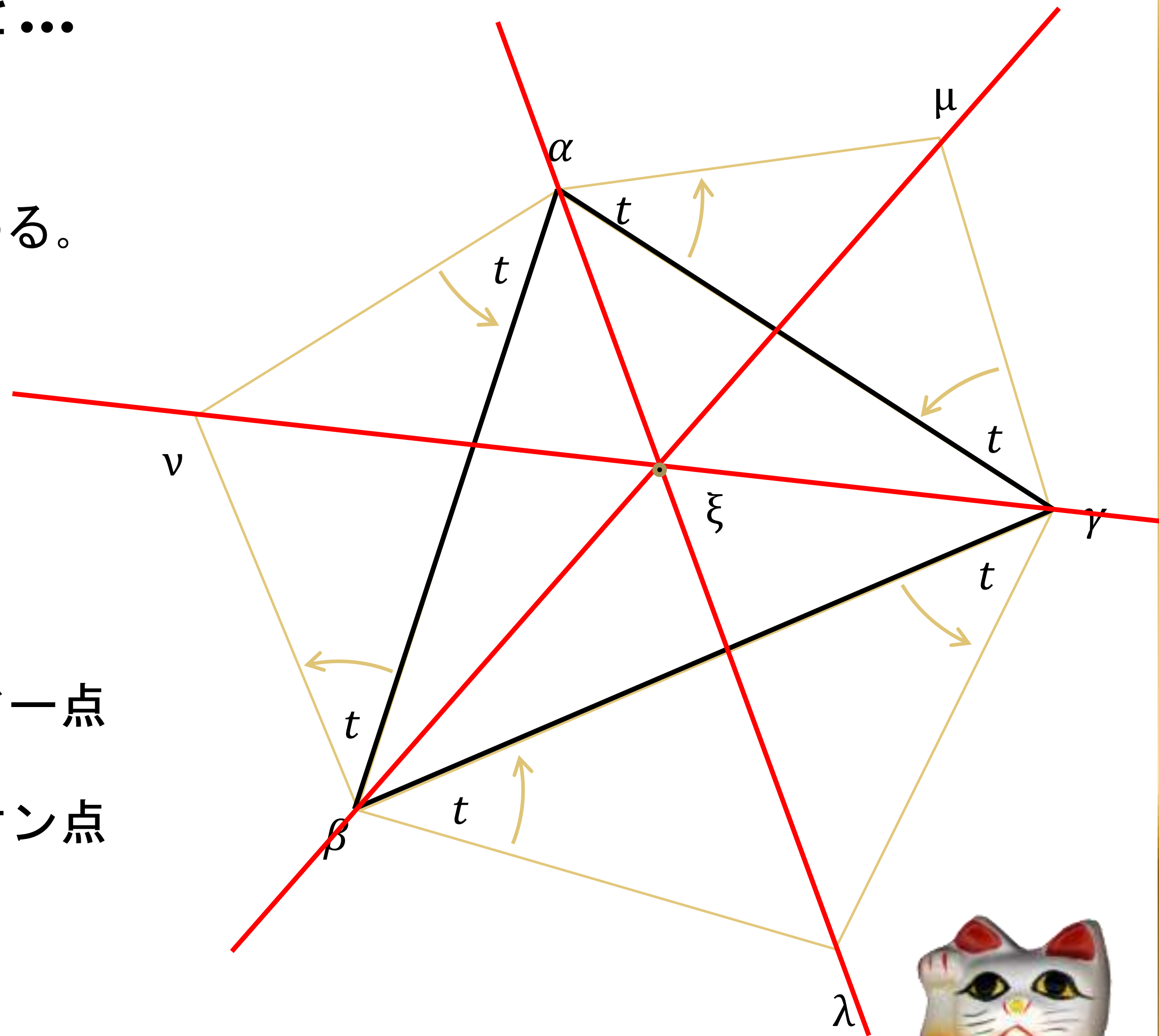
$$\alpha + \beta + \gamma = \lambda + \mu + \nu$$

$$(\theta^2 - 1)\beta + \left(\frac{1}{\theta^2} - \theta^2\right)\lambda + \left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right)\gamma = 0$$



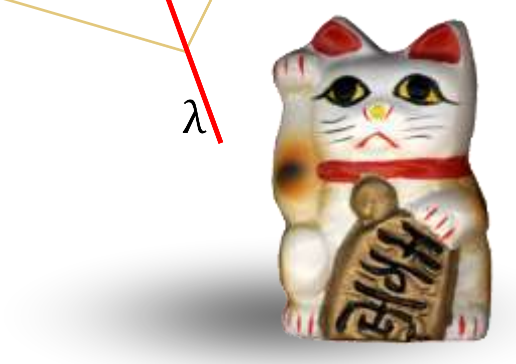
少し試してみると…

三直線は一点で交わる。



$t = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad$ フェルマー点

$t = 30^\circ \quad \Rightarrow \quad$ ナポレオン点



ナポレオンは皇帝ですが，周りにはたくさん数学者がおりまして...

ナポレオンを甘く見てはいけません...？

Joseph-Louis Lagrange
1746-1818

Le Sacre de Napoléon — Wikipédia

Gaspard Monge
1746-1818

Pirre-Simon Laplace
1749-1827

Jean Baptist Joseph Fourier
1749-1827

Jean Victore Poncelet
1788-1867

Biography - MacTutor History of Mathematics (st-andrews.ac.uk)

いろいろなことを見つける方もおられて…

極限を考えれば

$G = X(0^\circ)$ ：ΔABC の重心

$H = X(90^\circ)$ ：ΔABC の垂心

となっています

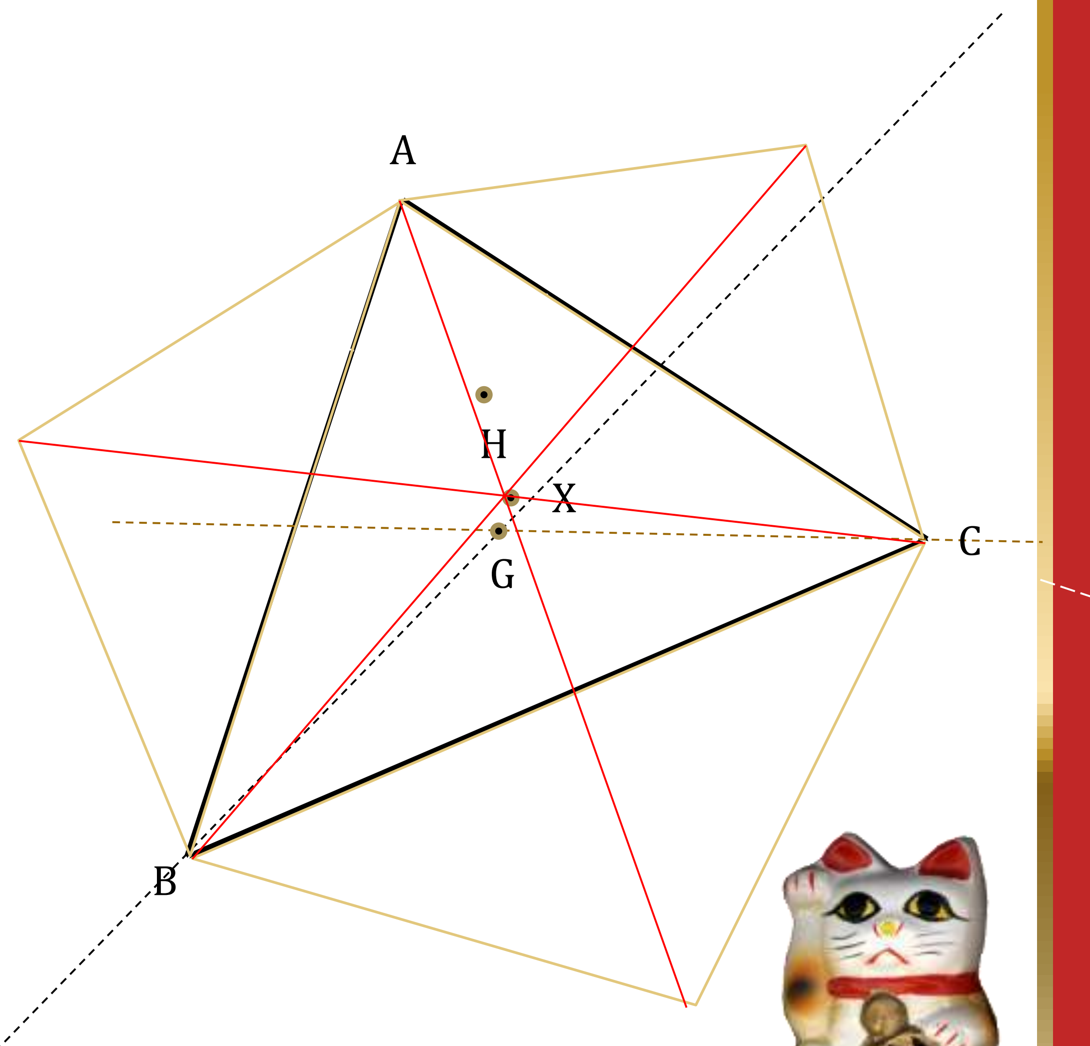
点 $X = X(\theta)$ は，五点

$A,\ B,\ C,\ G,\ H$

を通る双曲線上にあります。

これは　キーペルト双曲線

と呼ばれています。



Friedrich Wilhelm August Ludwig Kiepert
1846-1934

ルードヴィヒ・キーペルト - Wikipedia

完全四辺形

ミケル点

シュタイナー円

おまけ：ナポレオン三角形再び

今度は ΔABC の内側に図のように，正三角形

ΔBP_2C，　ΔCQ_2A，　ΔAR_2B，

を描き，それぞれの中心を

P_3，Q_3，R_3，

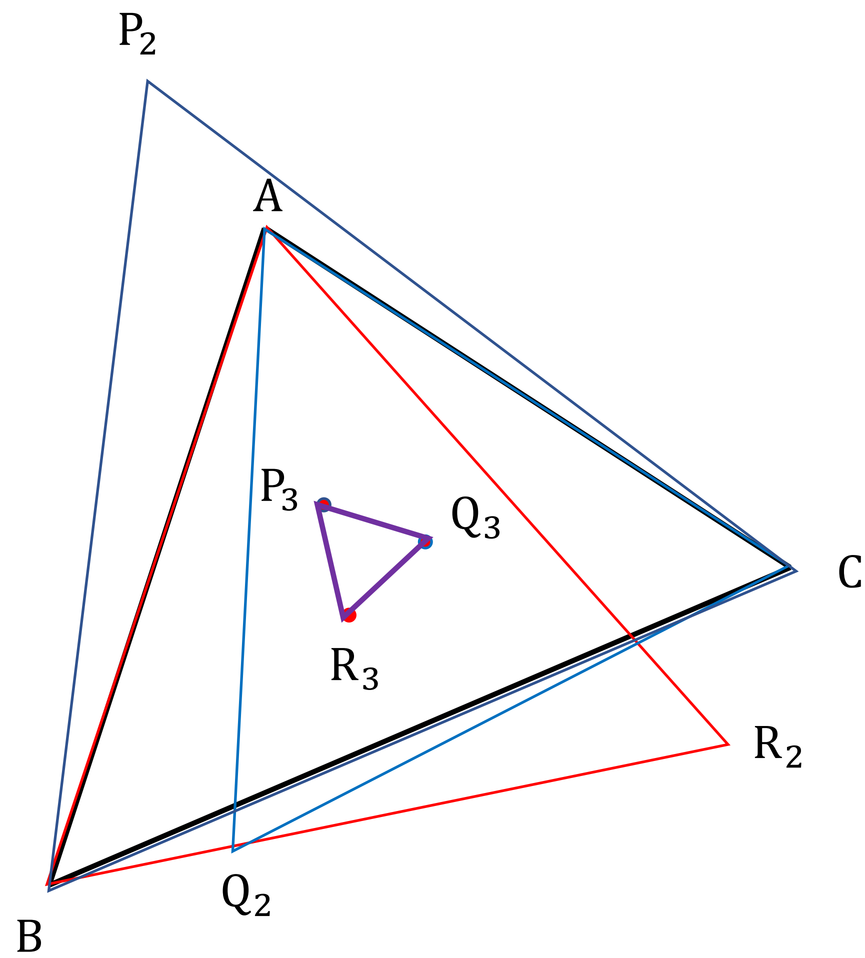
とする

この場合にも

$\Delta P_3Q_3R_3$

は正三角形となる

これも　ナポレオン三角形　と言う



ΔABC には二つのナポレオン三角形があるので，これらを仮に，

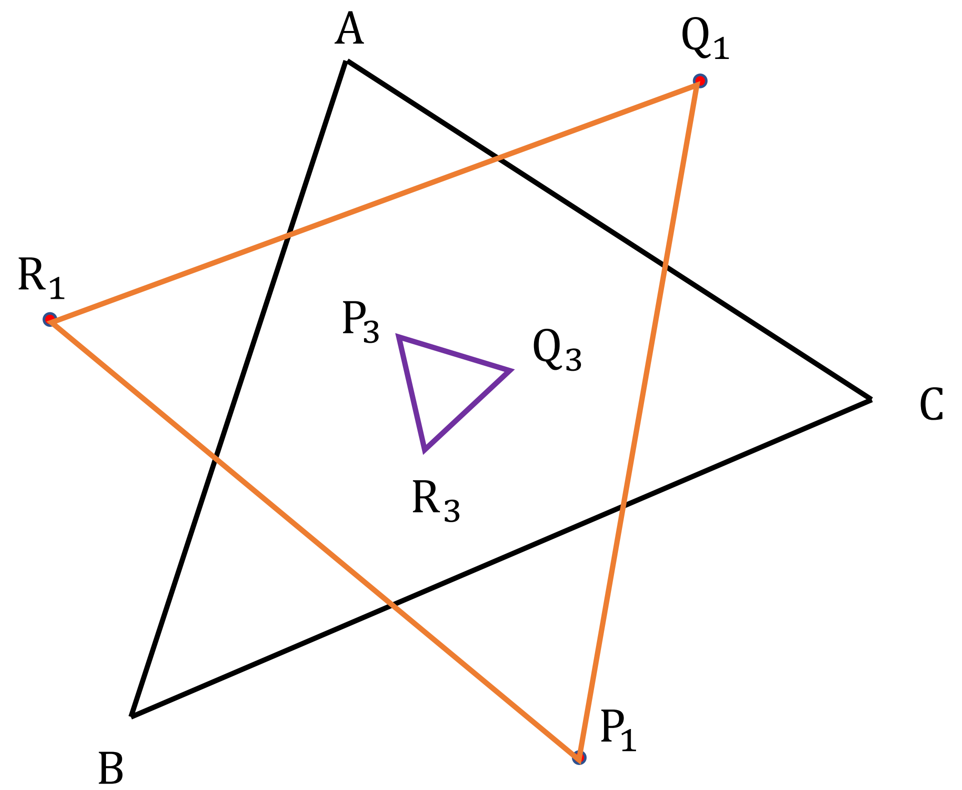
外ナポレオン三角形，内ナポレオン三角形，

と呼ぶことにしよう

ΔABC の二つのナポレオン三角形

$\Delta P_1Q_1R_1$，　$\Delta P_3Q_3R_3$，

について，次の式が成り立つ



$$S(\Delta P_1Q_1R_1) - \frac{1}{2}S(\Delta ABC)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{24}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

$$= S(\Delta P_3Q_3R_3) + \frac{1}{2}S(\Delta ABC)$$

すなわち

$$\boxed{S(\Delta P_1Q_1R_1) - S(\Delta P_3Q_3R_3) = S(\Delta ABC)}$$

三つの三角形の面積の関係を示すこの式も，
ナポレオンさん以降に分ったことらしい。

ΔABC の二つのナポレオン三角形

$\Delta P_1Q_1R_1$，　$\Delta P_3Q_3R_3$，

の計量を計算する。

二つのナポレオン三角形の辺の長さを，x_1，　x_3，とする。

ΔABC について

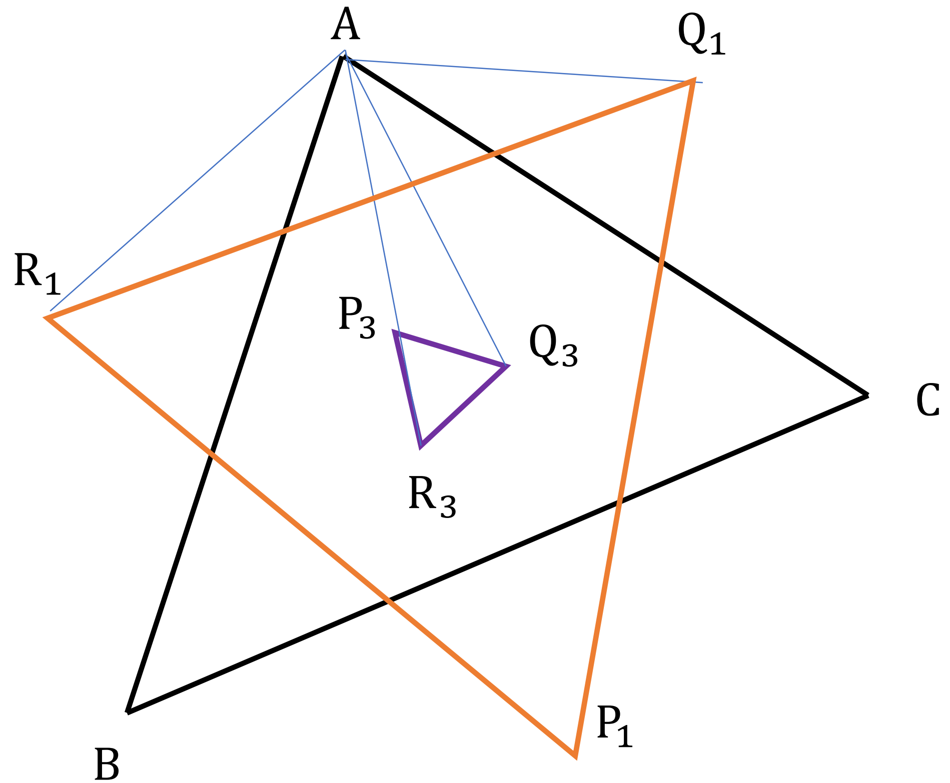
$a = \mathrm{BC}$，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$，

$A = \angle\mathrm{BAC}$

とする。このとき

$$S(\Delta\mathrm{ABC}) = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



$$\mathrm{AQ_1} = \mathrm{AQ_3} = \frac{b}{\sqrt{3}} \qquad \mathrm{AR_1} = \mathrm{AR_3} = \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{3}}$$

$$\angle\mathrm{R_1AQ_1} = A + 60^\circ \qquad \angle\mathrm{R_3AQ_3} = A - 60^\circ$$

$$x_1{}^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}\cos\left(A + 60^\circ\right)$$

$$x_3{}^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}\cos\left(A - 60^\circ\right)$$

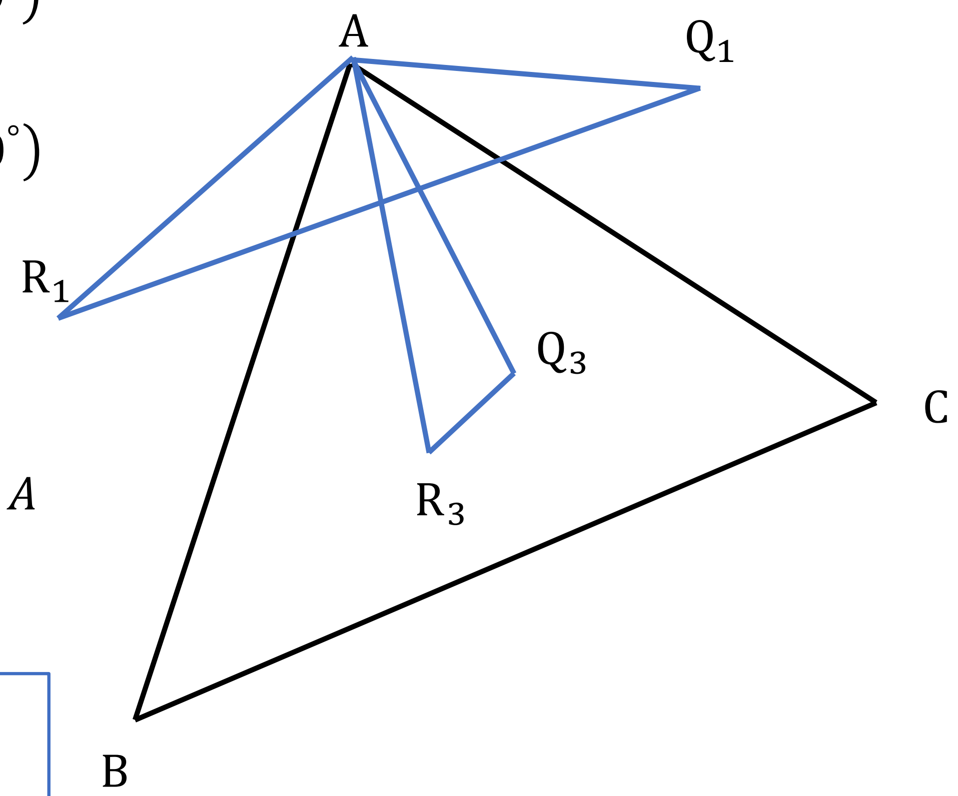
$$S(\Delta \mathrm{P_1Q_1R_1}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot {x_1}^2$$

$$S(\Delta \mathrm{ABC}) = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$${x_1}^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2\frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} \cos\left(A + 60^\circ\right)$$

$${x_3}^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2\frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} \cos\left(A - 60^\circ\right)$$



$$\begin{aligned} &6{x_1}^2 \\ &= 2b^2 + 2c^2 - 2bc \cos A + 2\sqrt{3} bc \sin A \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} \cdot S(\Delta \mathrm{ABC}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &S(\Delta \mathrm{P_1Q_1R_1}) \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{24}(a^2 + b^2 + c^2) + \tfrac{1}{2} S(\Delta \mathrm{ABC}) \end{aligned}}$$

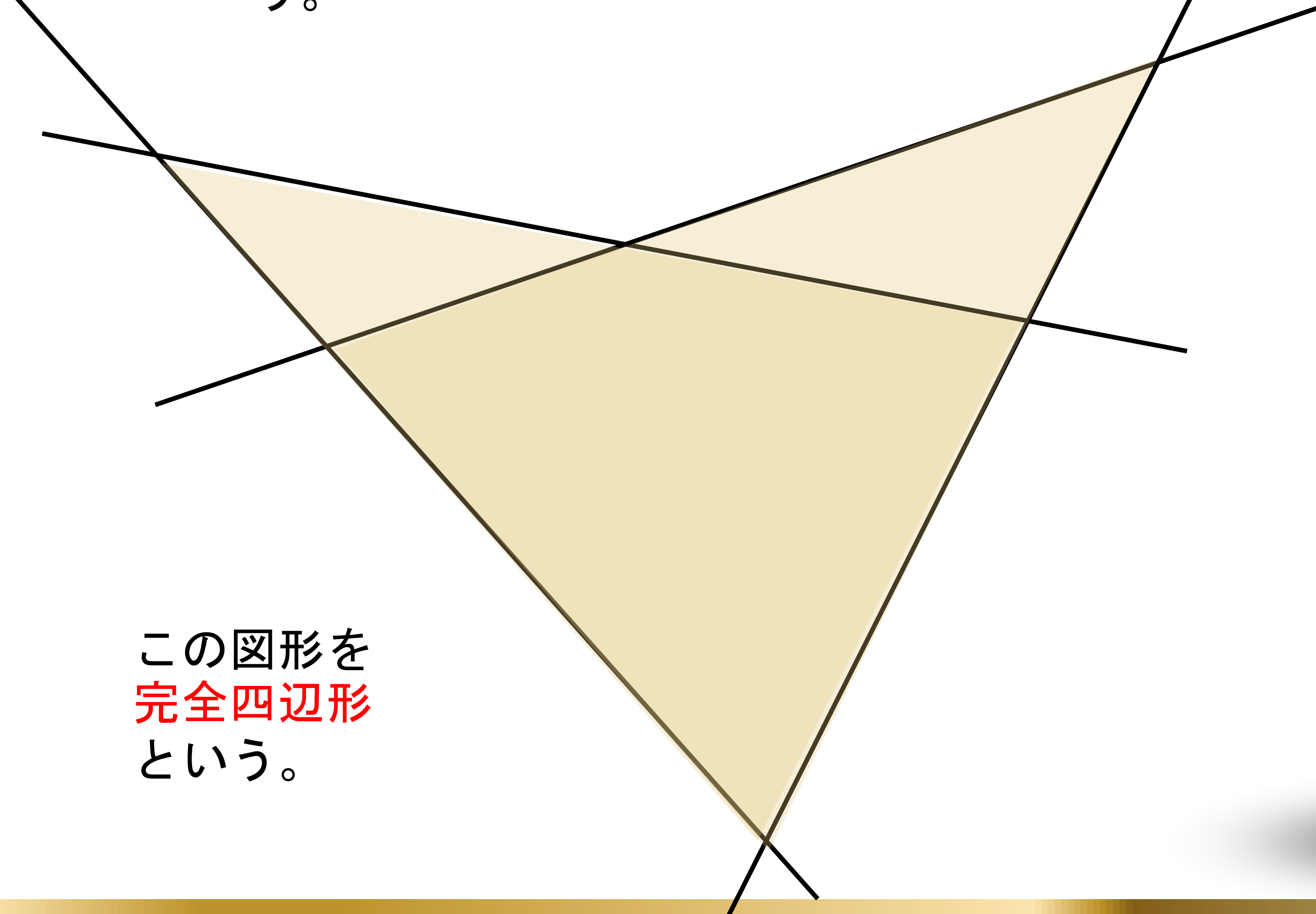
$$6{x_3}^2 = 2b^2 + 2c^2 - 2bc \cos A - 2\sqrt{3} bc \sin A = a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} \cdot S(\Delta \mathrm{ABC})$$

$$\boxed{S(\Delta \mathrm{P_3Q_3R_3}) = \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2} S(\Delta \mathrm{ABC})}$$

一般の位置にある４直線

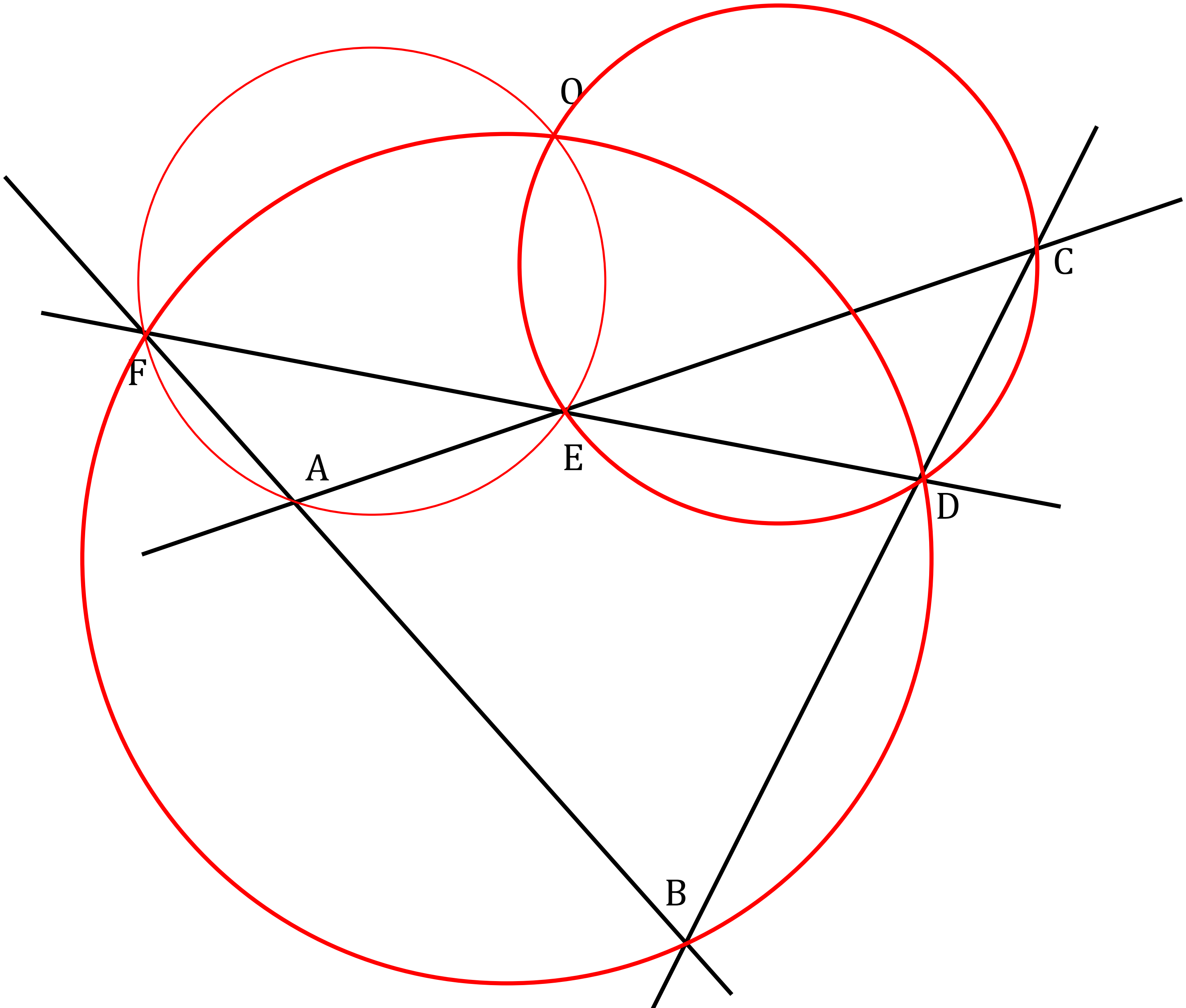
平面上の4直線が，どの2直線も平行ではなく，どの3直線も1点で交わらないとき，４直線は　**一般の位置にある**　という。

三角形が
４つできる



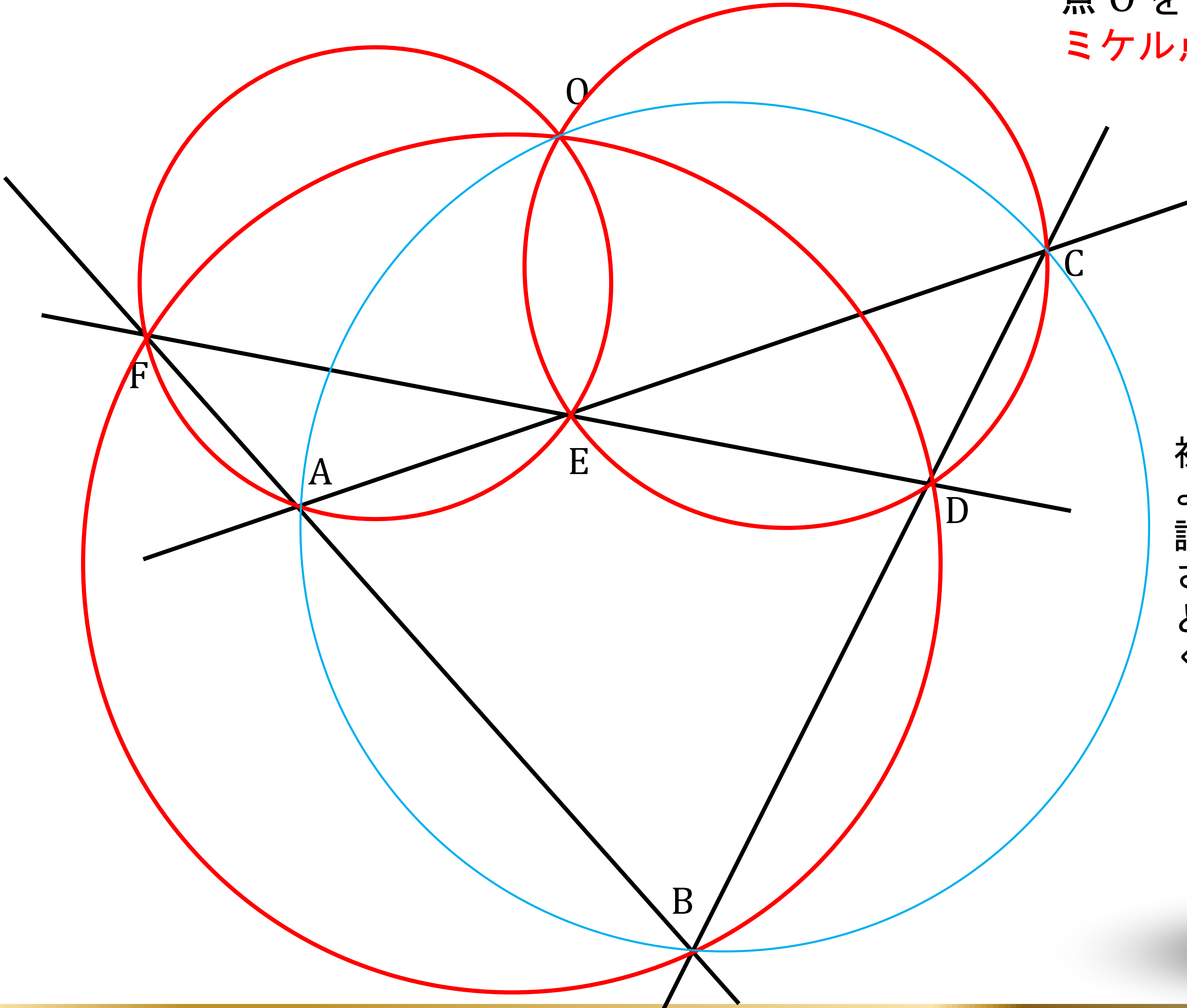
この図形を
完全四辺形
という。

ミケルの定理により３つの三角形 ΔAFE， ΔBDF， ΔCED， の外接円は１点 O で交わる。



加えて，３点 D，E，F，が１直線上にあるという
特殊事情により，ΔABC の外接円も O を通る。

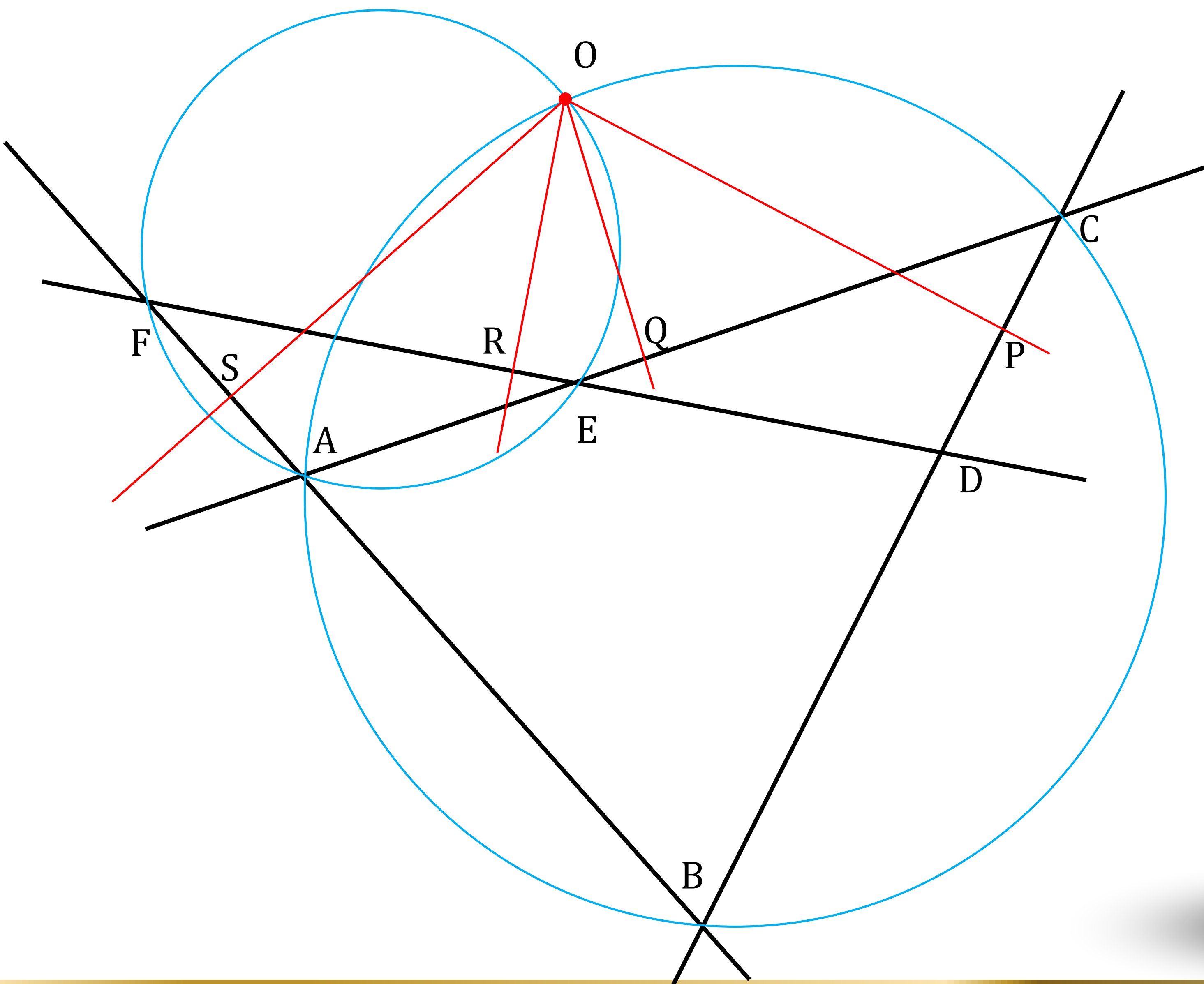
点 O を完全四辺形の
ミケル点　という。



初等幾何の方法による定理の
証明は，角の大きさに注目する
と，そんなに難しくはない

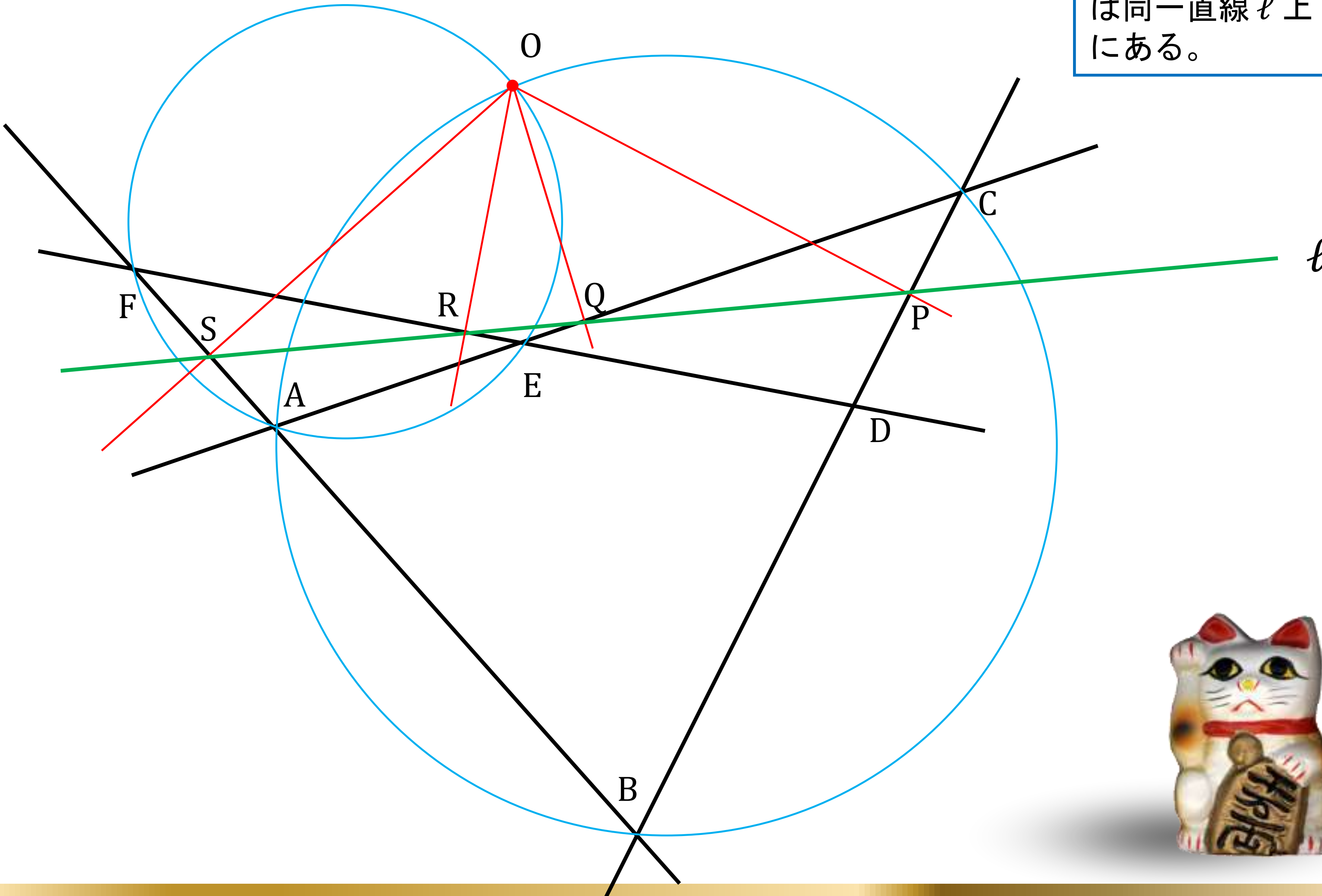
ΔAFE の外接円と ΔABC の外接円の交点を O とする

完全四辺形の４直線に O から下した垂線の足を P，　Q，　R，　S，とする



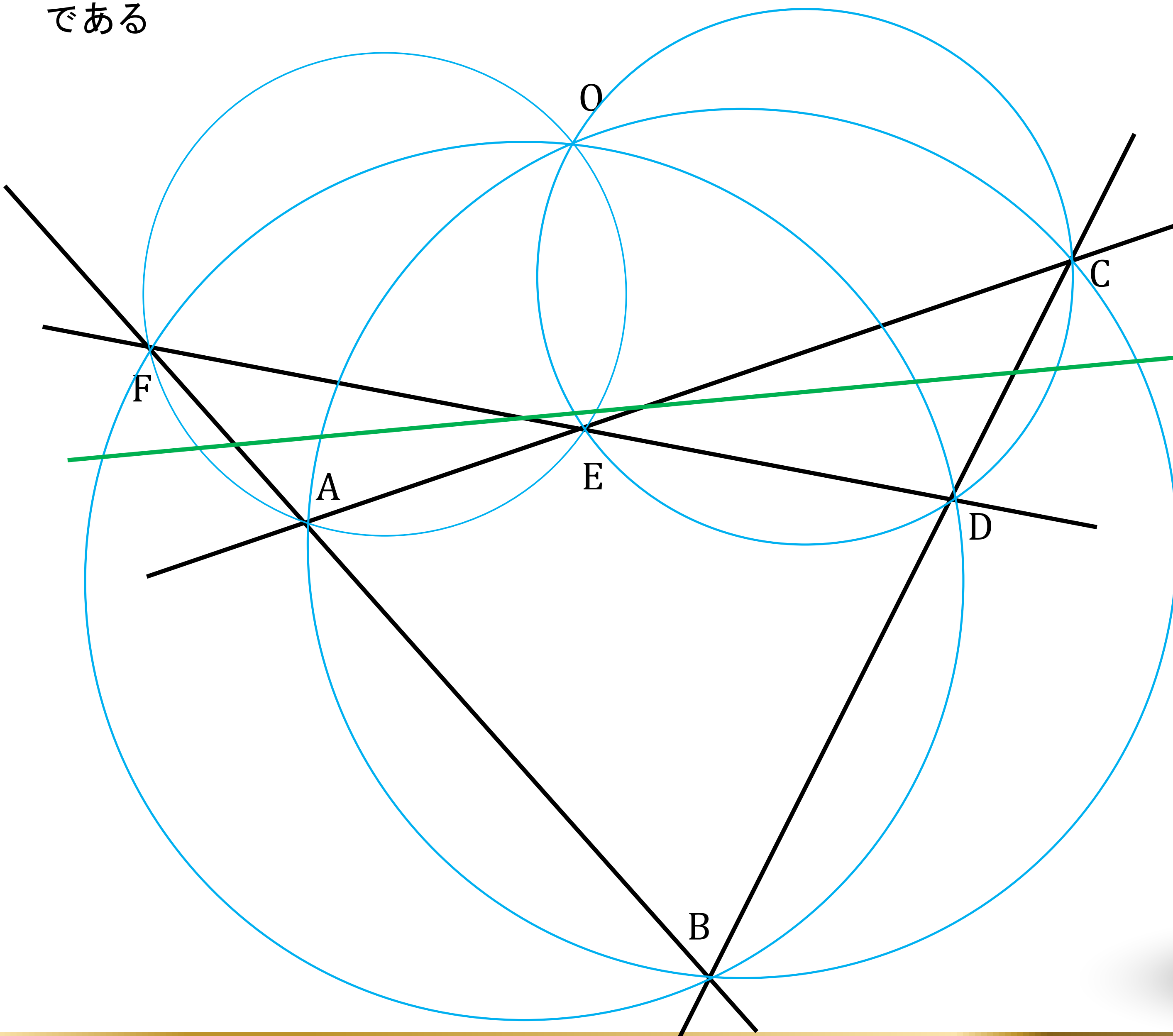
P，　Q，　S，は ΔABC の O に関するシムソン線上にあり，　Q，R，　S，は ΔAFE の O に関するシムソン線上にある。

すなわち，４点 P，　Q，　R，　S，は同一直線 ℓ 上にある。



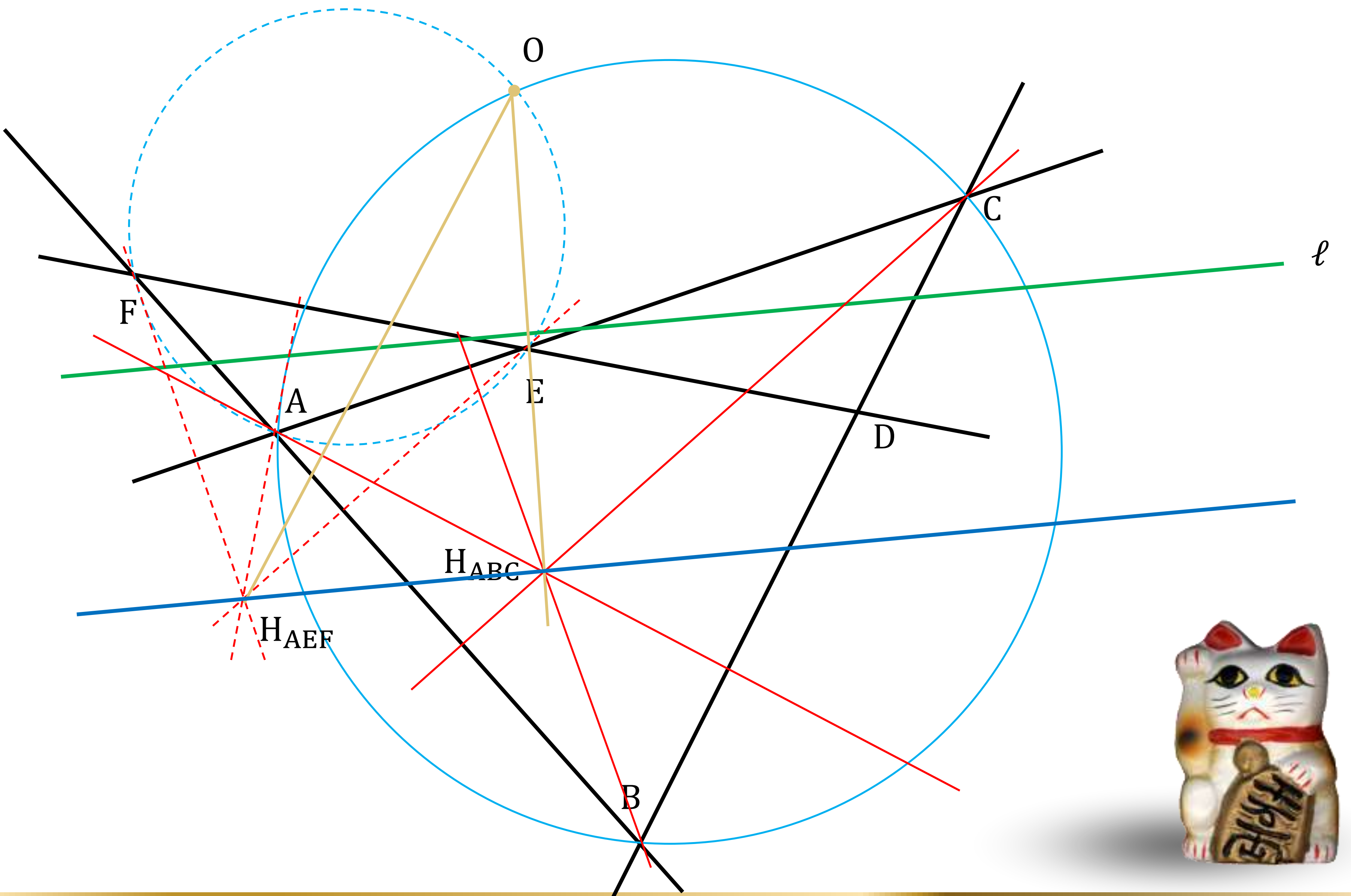
ミケルの定理の逆により残り２つの三角形 ΔBDF， ΔCED， の外接円も点 O を通る。

ミケル点 O に関するシムソン線は三角形 ΔAFE， ΔBDF， ΔCED， ΔABC，について共通である

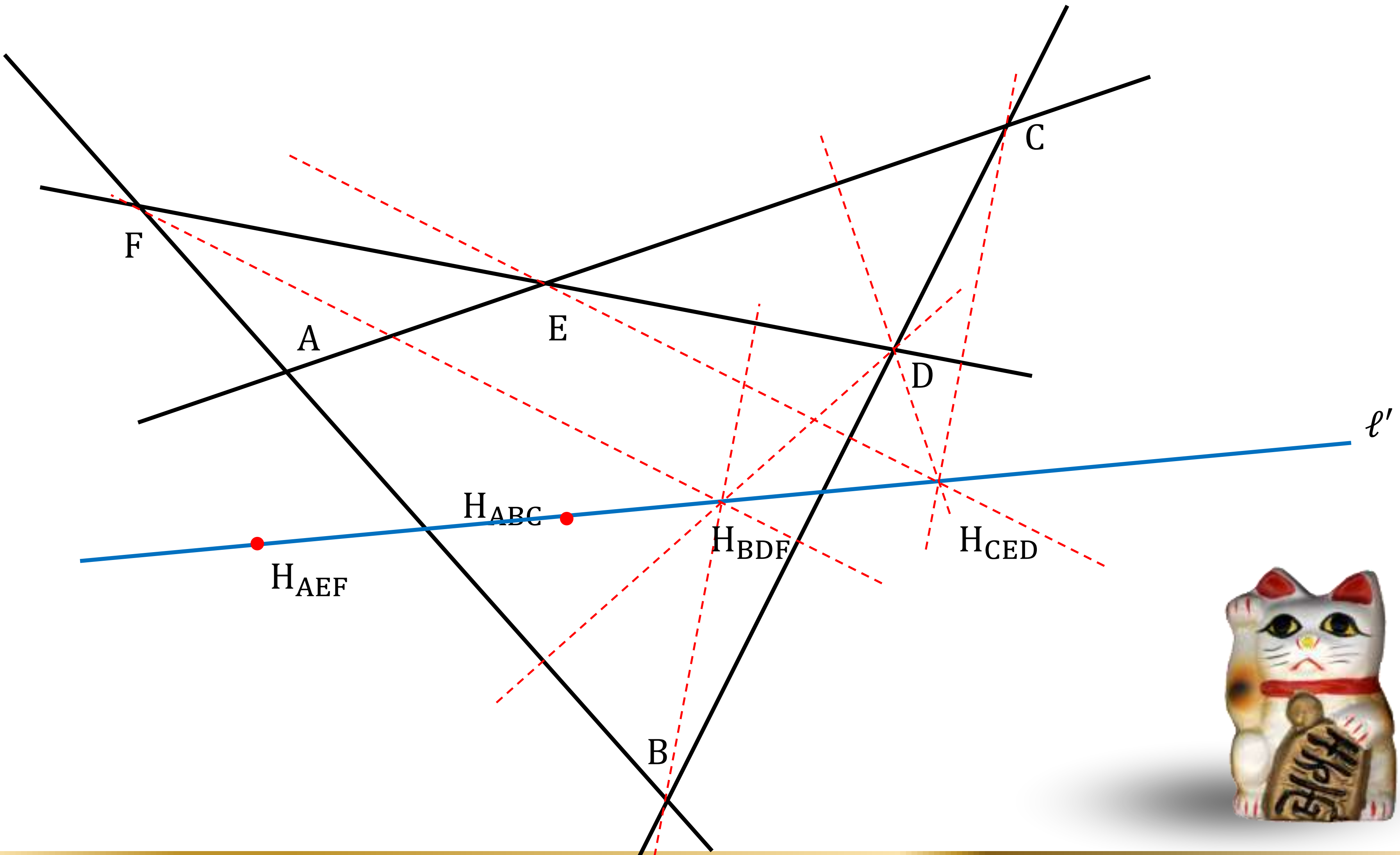


この直線を以下，完全四辺形のミケル点に関する共通シムソン線，ということにする

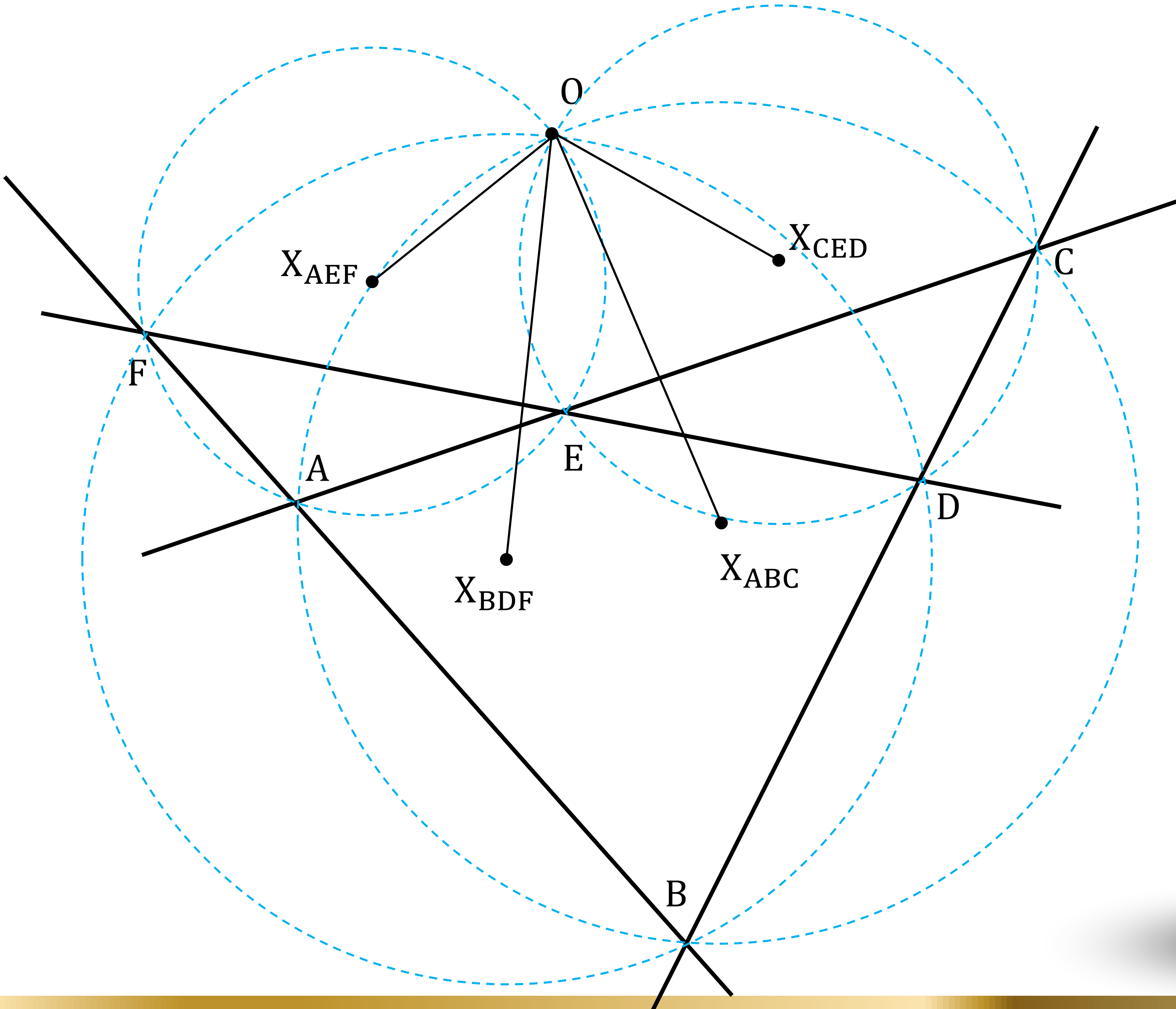
ΔABC の垂心を H_{ABC}，ΔAFE の垂心を H_{AEF} とすると，OH_{ABC}，OH_{AEF}，の中点は ℓ 上にある



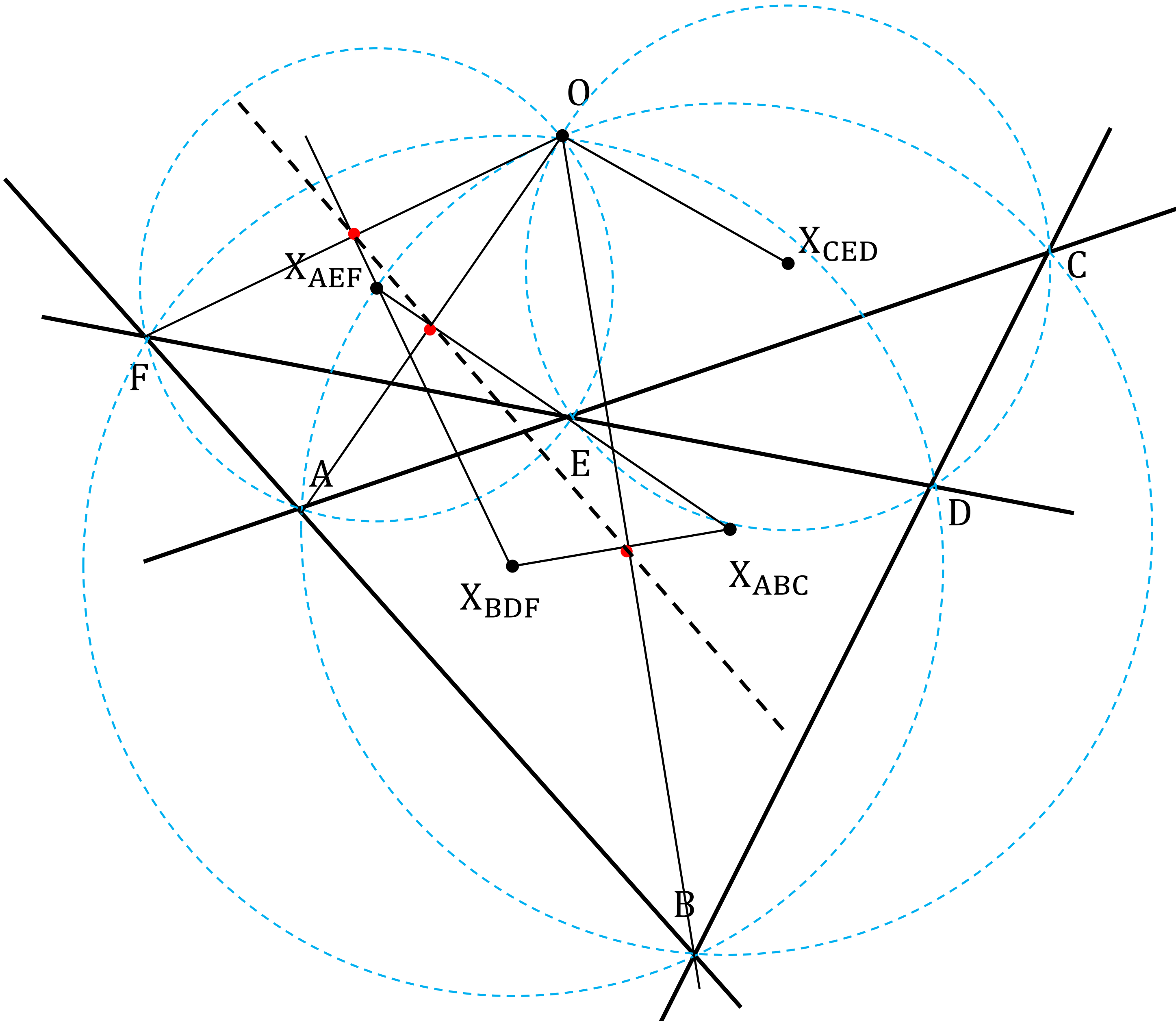
ΔAFE，ΔABC，ΔBDF， ΔCED， の４つの垂心，H_{AEF}，H_{ABC}，H_{BDF}， H_{CED}， は
ミケル点Ｏに関するシムソン線に平行な１直線 ℓ' 上にある



ΔAFE， ΔABC，ΔBDF， ΔCED， の４つの外心を，X_{AEF}，X_{ABC}，X_{BDF}， X_{CED}，とする

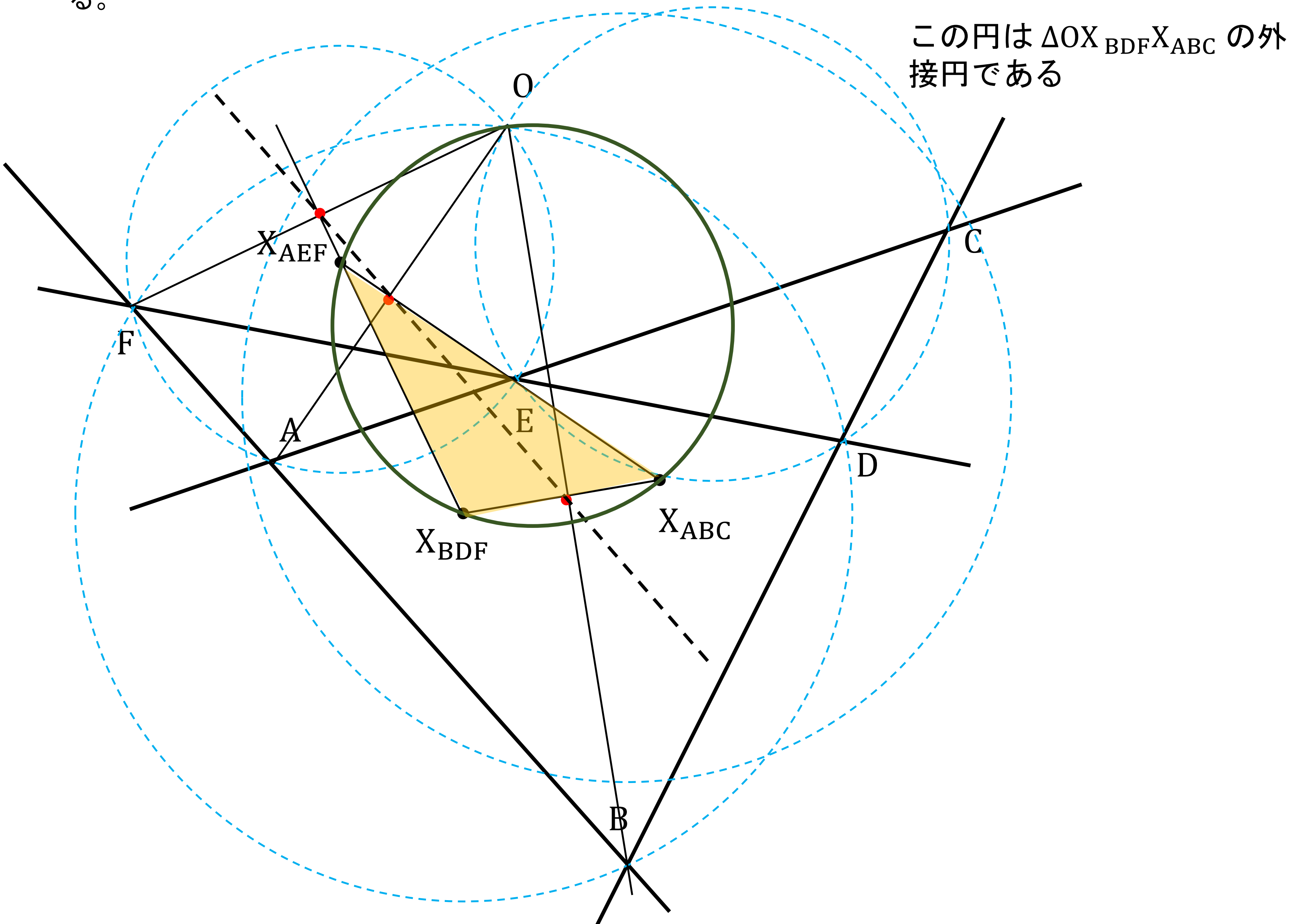


直線 $X_{AEF}X_{BDF}$ は線分 OF を垂直に**2**等分し，直線 $X_{BDF}X_{ABC}$ は線分 OB を垂直に**2**等分し，直線 $X_{ABC}X_{AEF}$ は線分 OA を垂直に二等分する

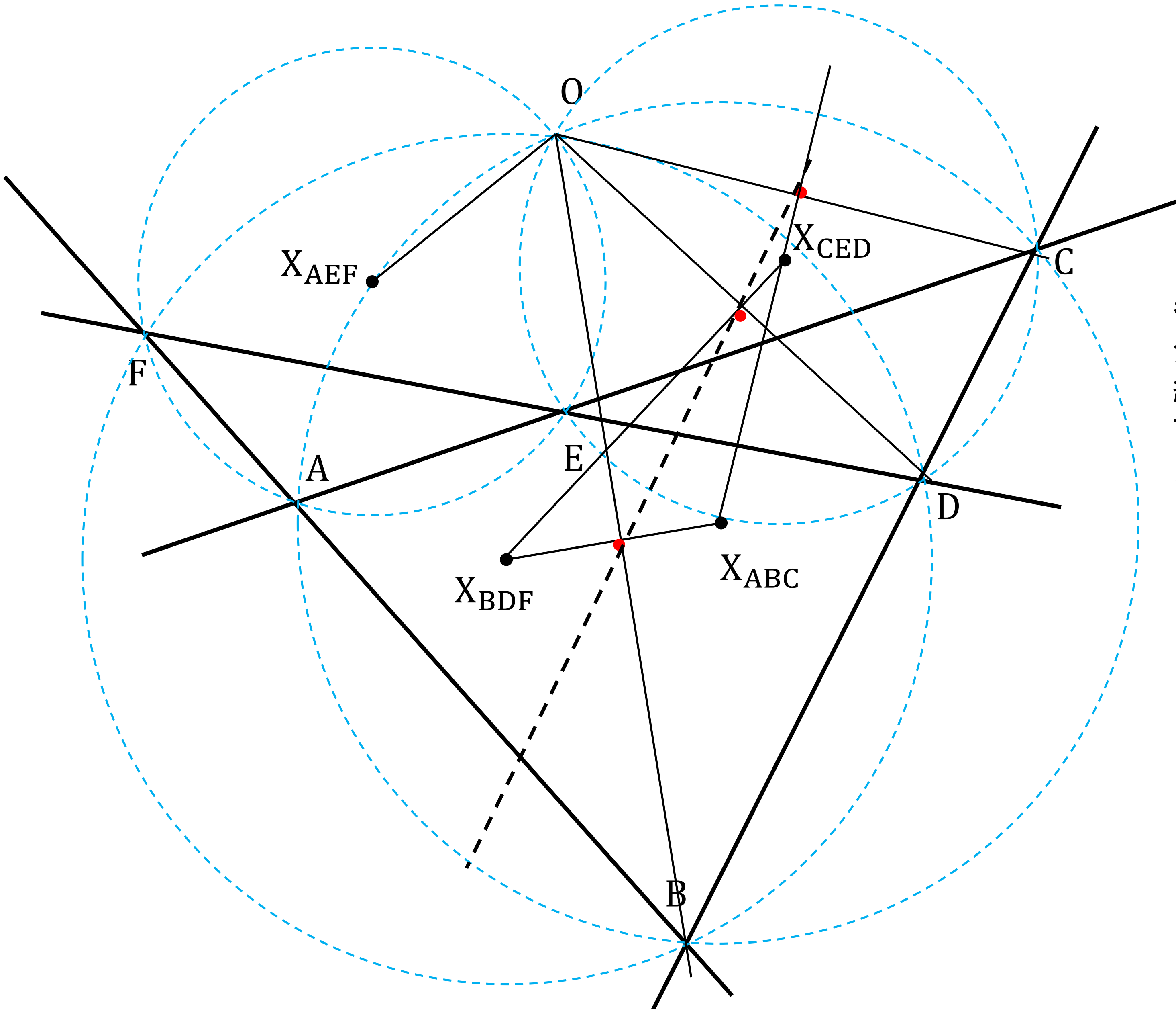


各共通弦の二等分点は，中点連結定理により，直線 FAB と平行な直線上にある

点 O から $\Delta X_{AEF} X_{BDF} X_{ABC}$ の各辺におろした垂線の足は１直線上にある。
したがって，シムソン線の定理の逆　により，点 O は $\Delta X_{AEF} X_{BDF} X_{ABC}$ の外接円上にある。

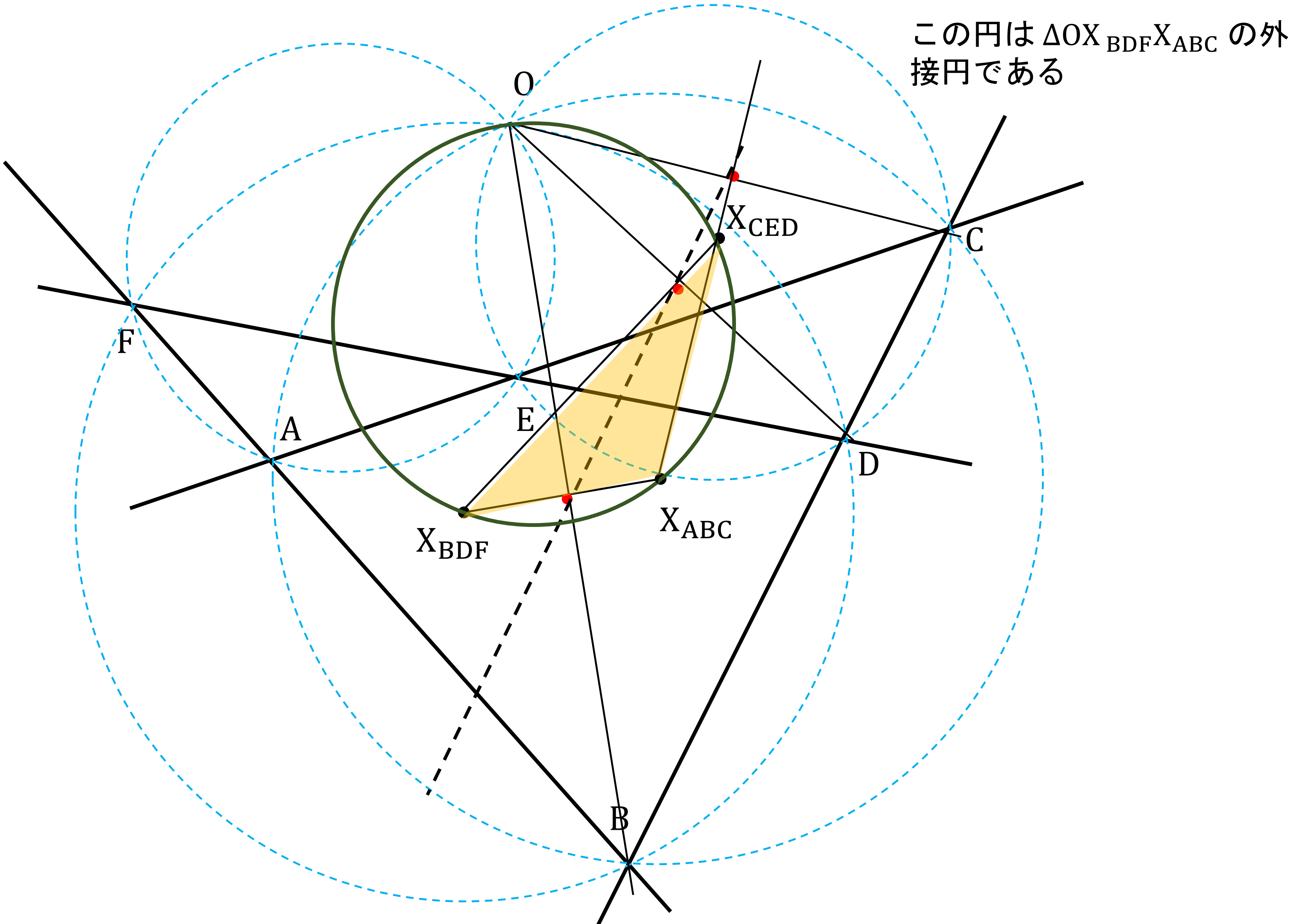


直線 $X_{CED}X_{BDF}$ は線分 OD を垂直に**2**等分し，直線 X_{BDF} X_{ABC} は線分 OB を垂直に**2**等分し，直線 $X_{ABC}X_{CED}$ は線分 OC を垂直に二等分する

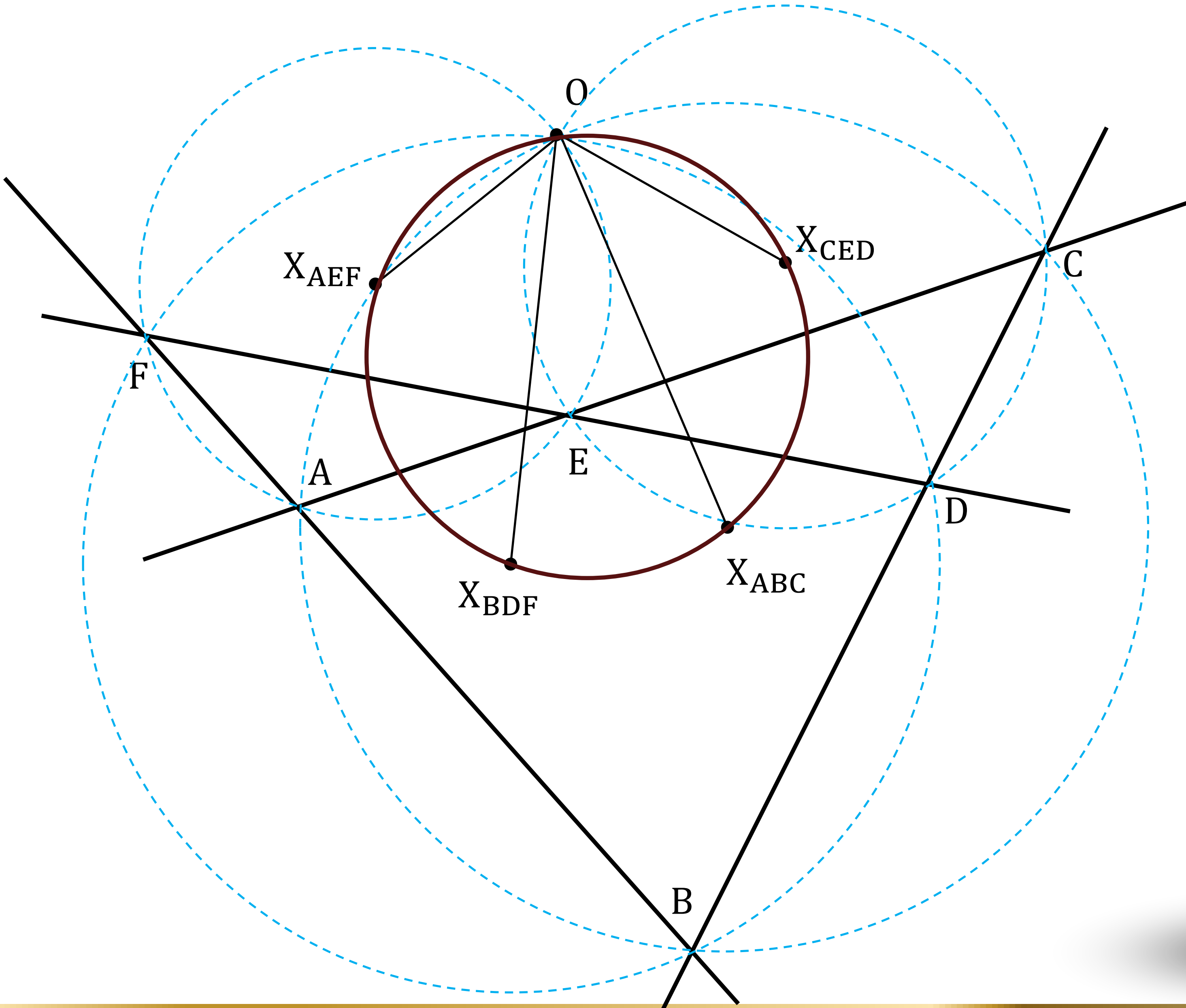


各共通弦の二等分点は，中点連結定理により，直線 BDC と平行な直線上にある

点 O から $\Delta X_{CED}X_{BDF}X_{ABC}$ の各辺におろした垂線の足は１直線上にある。
したがって，シムソン線の定理の逆　により，点 O は $\Delta X_{CED}X_{BDF}X_{ABC}$ の外接円上にある。



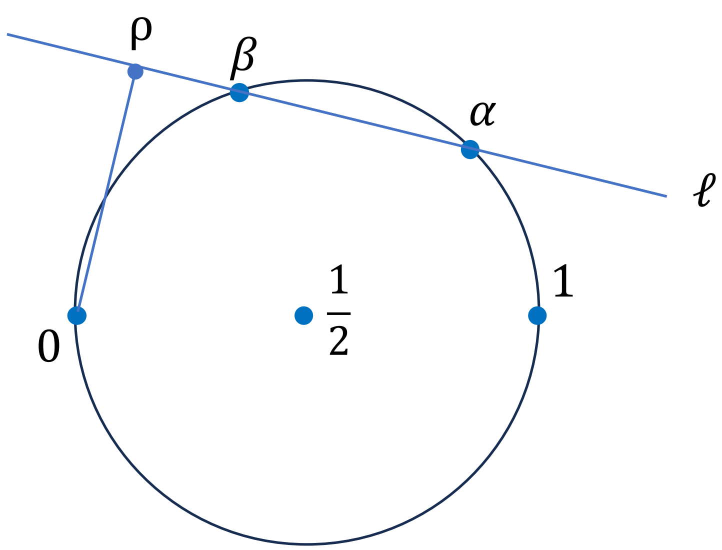
ΔAFE，ΔABC，ΔBDF，ΔCED，の４つの外心を，X_{AEF}，X_{ABC}，X_{BDF}，X_{CED} とミケル点は同一円周上にある。（シュタイナーの定理）

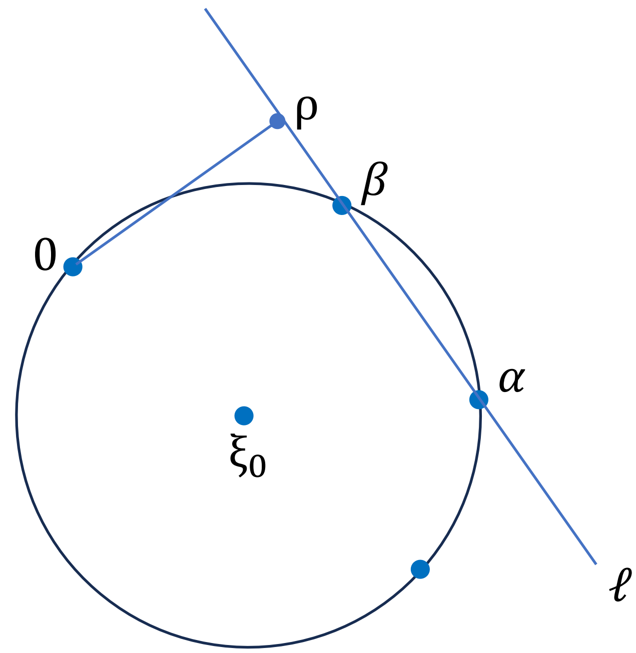


この円を
シュタイナー円
という

複素平面の完全四辺形

- 完全四辺形の再構成
- 複素平面での表示





上図の場合，原点 0 から直線 ℓ におろした垂線の足を ρ とすると

$$\rho = \alpha\beta$$

上図の場合に原点 0 から直線 ℓ におろした垂線の足を ρ とすると

$$\rho = \frac{\alpha\beta}{2\xi_0}$$

直線 ℓ の方程式は

$$\frac{z}{\rho} + \frac{\bar{z}}{\bar{\rho}} = 2$$

円　$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

上に原点以外の相異なる４点

ξ_1，ξ_2，ξ_3，ξ_4，

を勝手に取り，この各点を中心とし原点を通る４つの円

$C(\xi_1)$，$C(\xi_2)$，$C(\xi_3)$，$C(\xi_4)$，

を考える

２円の原点 0 以外の交点を複素数で左の図のように，α，β，γ，δ，ε，κ，と表わす

３点

$\xi_1\xi_2$，$\xi_2\xi_3$，$\xi_3\xi_1$，

は同一直線上にあり，原点 0 から下した垂線の足は

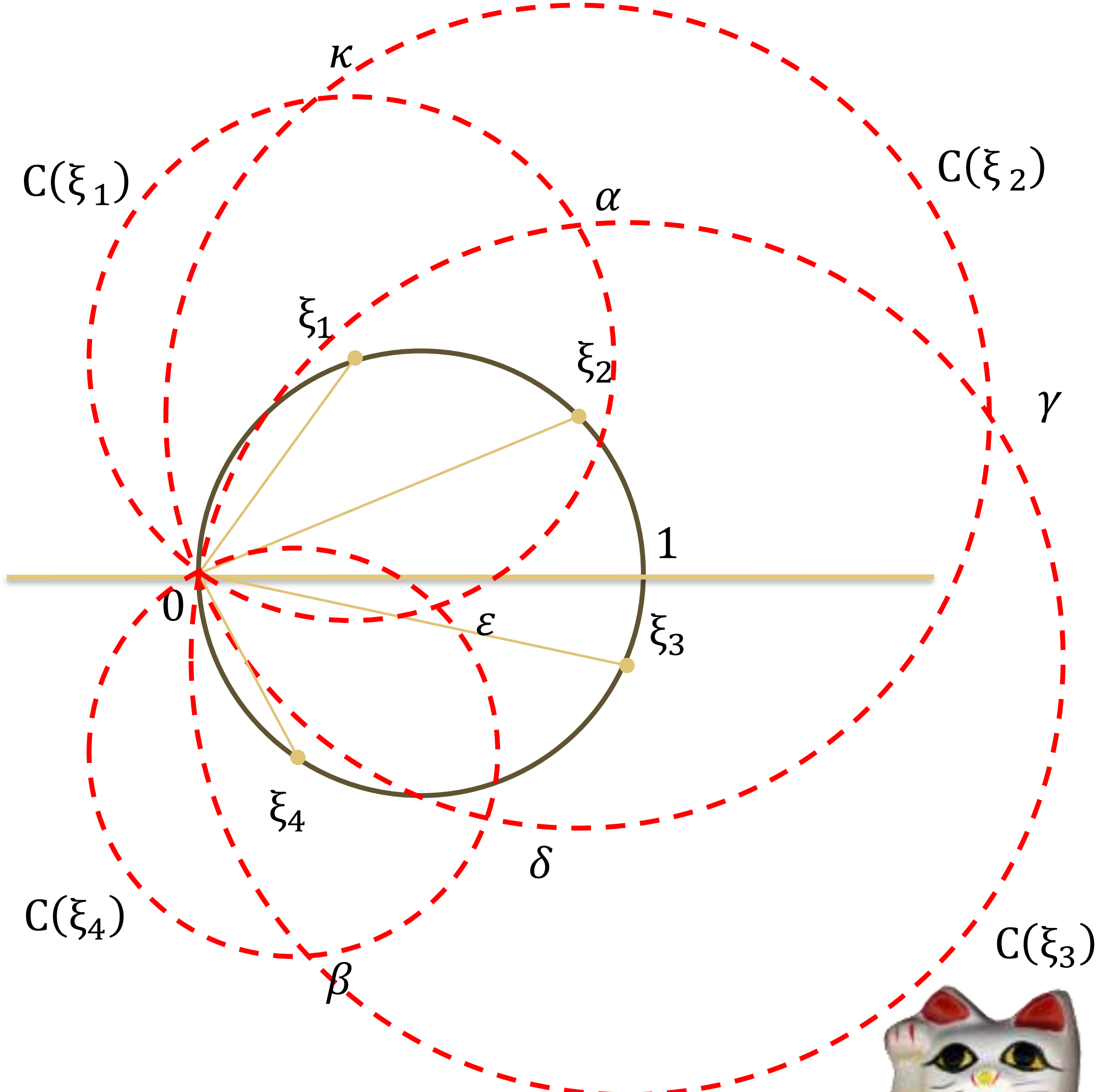
$\xi_1\xi_2\xi_3$

４点

$\xi_1\xi_2\xi_3$，$\xi_1\xi_2\xi_4$，$\xi_1\xi_3\xi_4$，$\xi_2\xi_3\xi_4$，

は同一直線上にあり，原点 0 から下した垂線の足は

$\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$



$X_1(\xi_1)$，$X_2(\xi_2)$，$X_3(\xi_3)$，$X_4(\xi_4)$，$O(0)$，

$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$，$D(\delta)$，$E(\varepsilon)$，$F(\kappa)$，

直線 X_1X_2 に O から下した垂線の足の複素座標は

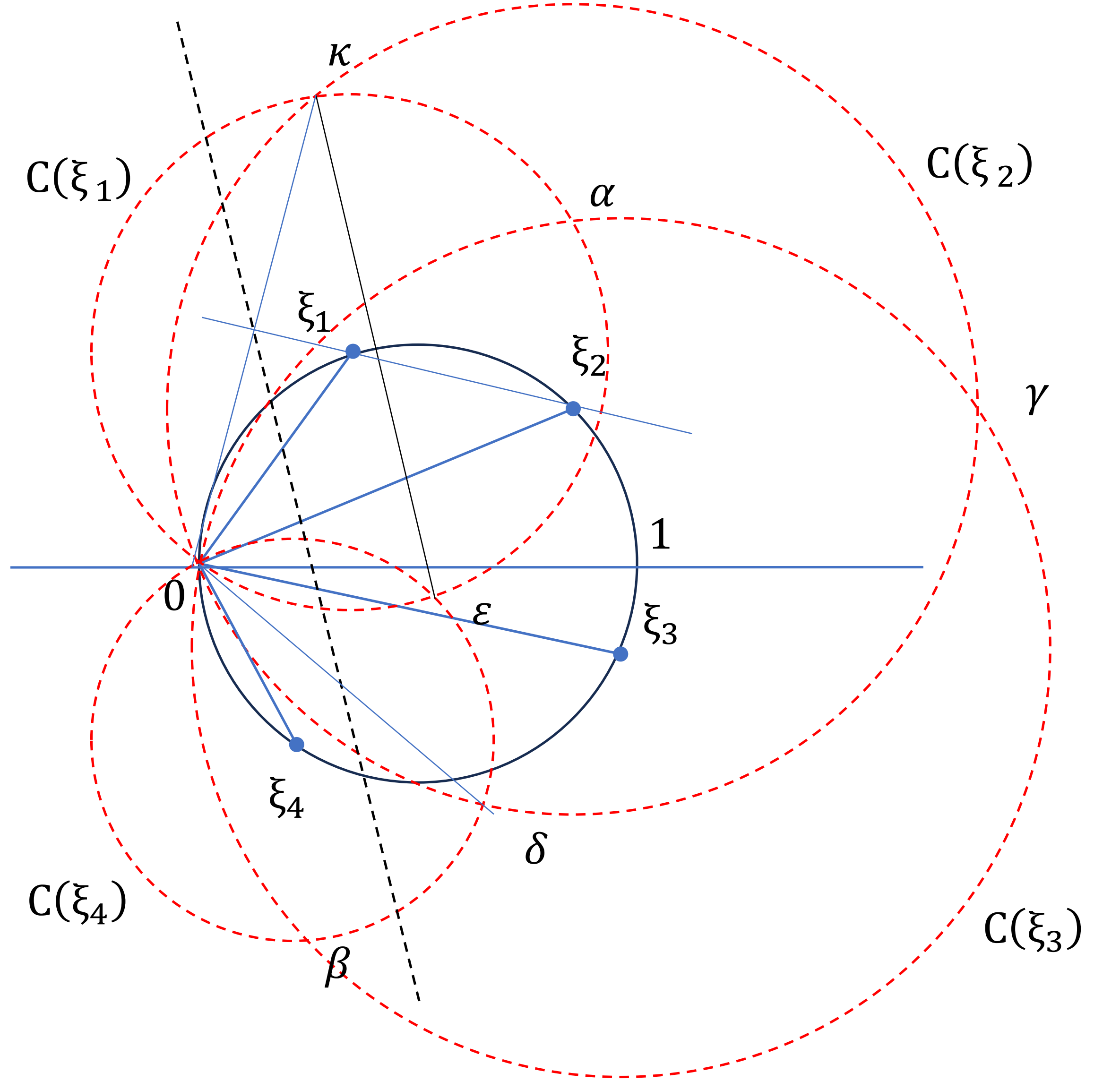
$$\xi_1\xi_2$$

である。
直線 X_1X_2 は $C(\xi_1)$ と $C(\xi_2)$ の共通弦 OF を垂直に２等分するから，垂線の足は線分 OF の中点である。

線分 EFに O から下した垂線の足の複素座標は

$$\frac{\varepsilon\kappa}{2\xi_1}$$

である。



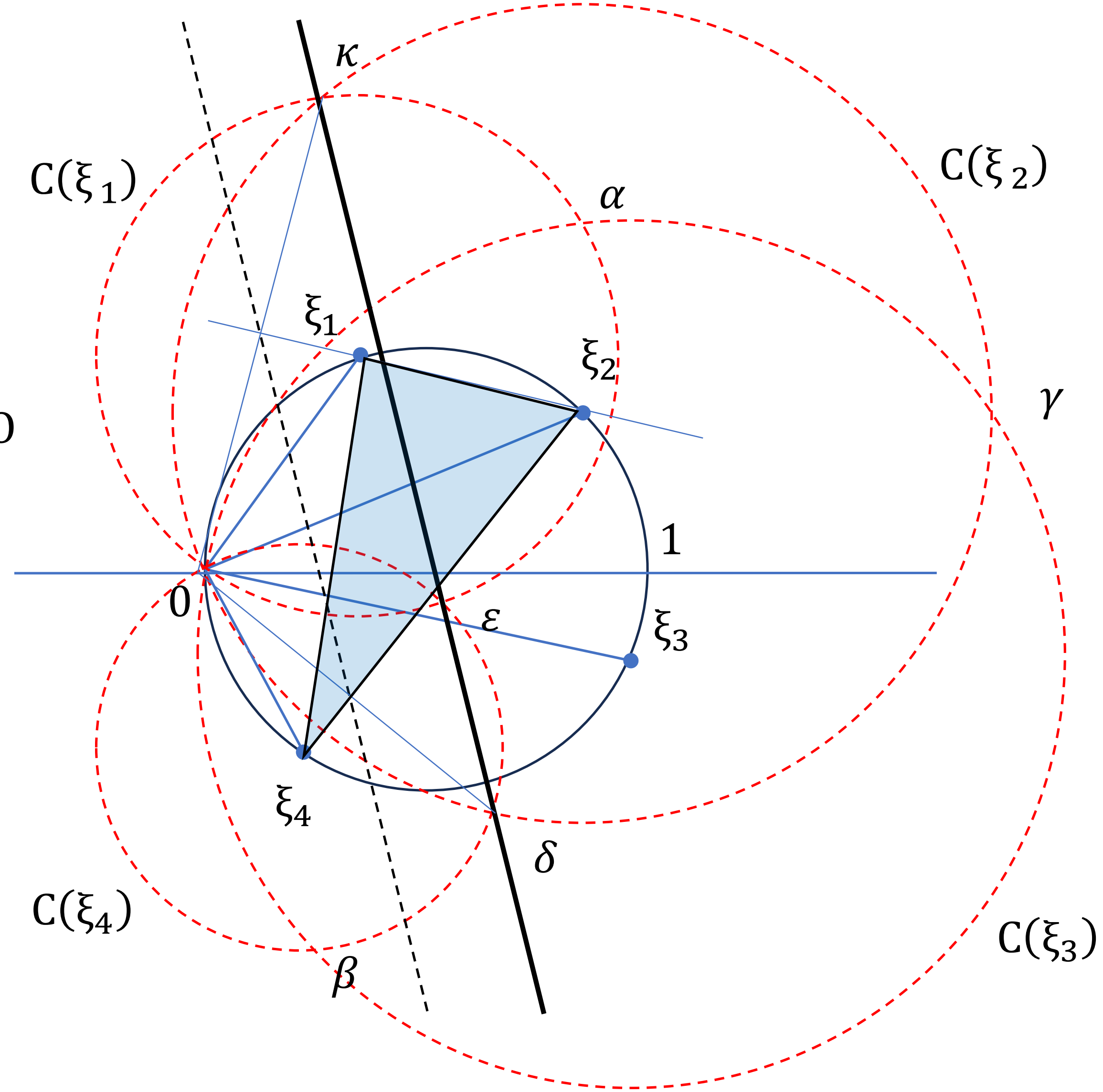
$X_1(\xi_1)$，$X_2(\xi_2)$，$X_3(\xi_3)$，$X_4(\xi_4)$，$O(0)$，
$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$，$D(\delta)$，$E(\varepsilon)$，$F(\kappa)$，

$\Delta X_1X_2X_4$ の O に関する
シムソン線を考える

O から直線 X_1X_2 に下した垂線の足は線分 OF の中点で，
複素座標は $\xi_1\xi_2$ である

直線 X_2X_4 は $C(\xi_2)$ と$C(\xi_4)$ の共通弦 ODを垂直に２等分し，O からこの直線におろした垂線の足は $\xi_2\xi_4$ である

$\Delta X_1X_2X_4$ の O に関するシムソン線は，OD，OE，OF，の中点を結ぶ直線である。
したがって，D，E，F，は，このシムソン線に平行な同一直線上にある。



$X_1(\xi_1)$，$X_2(\xi_2)$，$X_3(\xi_3)$，$X_4(\xi_4)$，$O(0)$，
$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$，$D(\delta)$，$E(\varepsilon)$，$F(\kappa)$，

このようにして，シュタイナー円から出発して，図のような完全四辺形が再構成された。ミケル点は O(0) である

構成から，以下のことが分かる

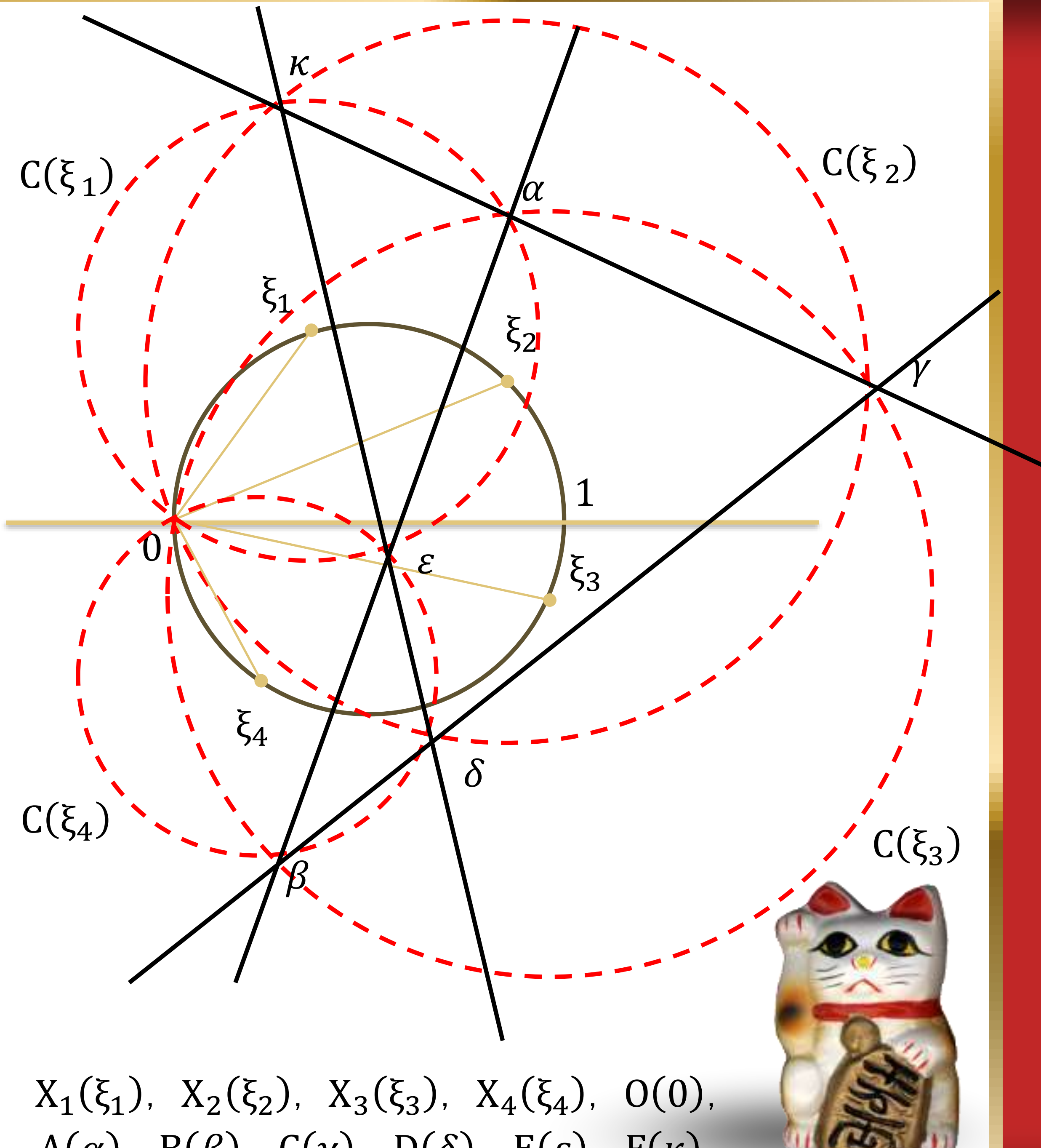
$$\alpha = 2\,\xi_1\xi_3$$
$$\beta = 2\xi_3\xi_4$$
$$\gamma = 2\xi_2\xi_3$$
$$\delta = 2\xi_2\xi_4$$
$$\varepsilon = 2\xi_1\xi_4$$
$$\kappa = 2\xi_1\xi_2$$

線分 EFに O から下した垂線の足の複素座標は

$$\frac{\varepsilon\kappa}{2\xi_1} = 2\xi_1\xi_2\xi_4$$

直線 DE に O から下した垂線の足の複素座標は

$$\frac{\delta\varepsilon}{2\xi_4} = 2\xi_1\xi_2\xi_4$$



$X_1(\xi_1)$，$X_2(\xi_2)$，$X_3(\xi_3)$，$X_4(\xi_4)$，O(0)，
A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)，E(ε)，F(κ)，

完全四辺形の確認

線分 AB に O から下した垂線の足の複素座標は

$$\frac{\alpha\,\varepsilon}{2\xi_1} = \frac{\alpha\beta}{2\xi_3} = 2\xi_1\xi_3\xi_4$$

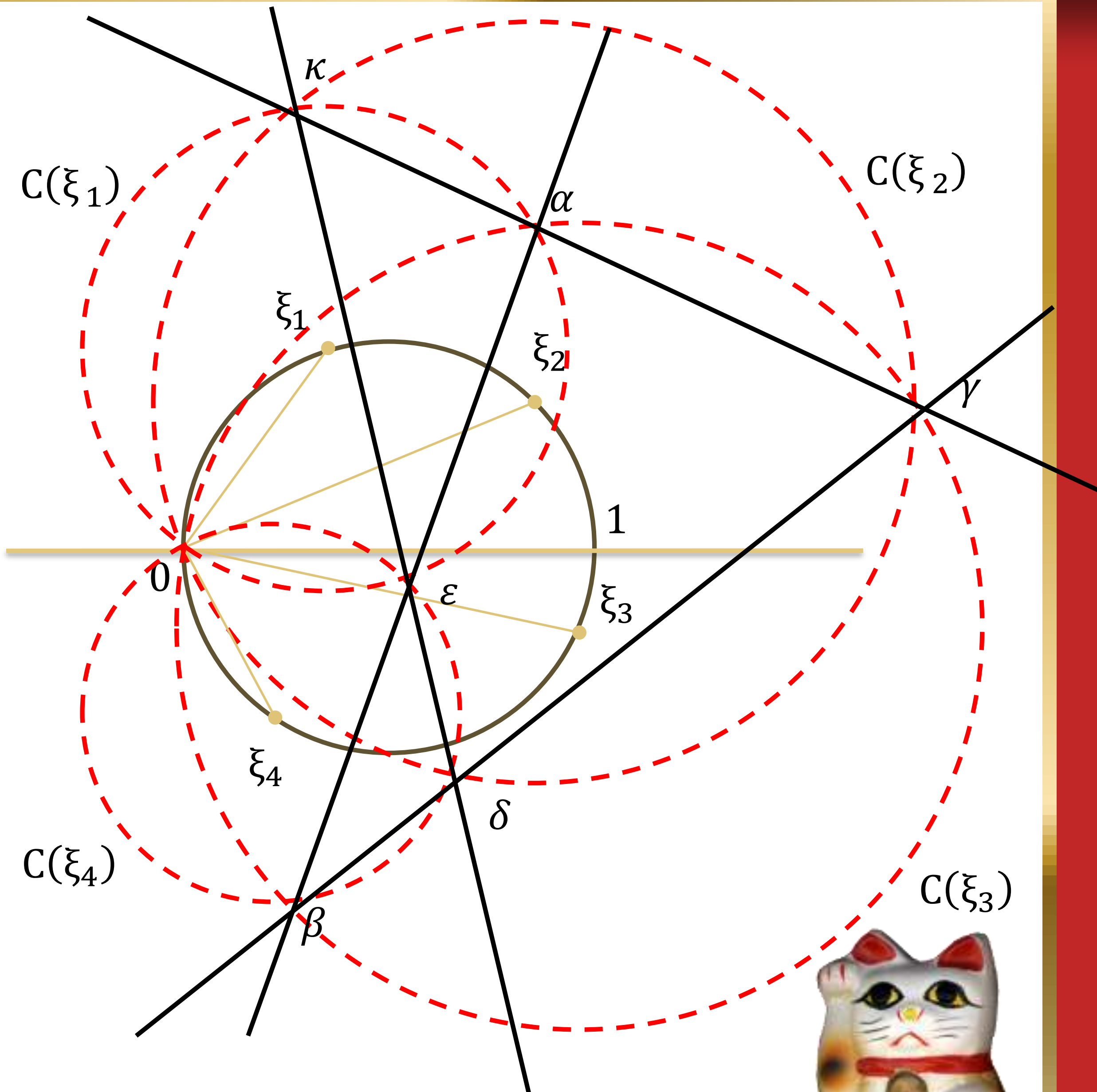
直線 BC に O から下した垂線の足の複素座標は

$$\frac{\gamma\delta}{2\xi_2} = \frac{\beta\gamma}{2\xi_3} = 2\xi_2\xi_3\xi_4$$

直線 CA に O から下した垂線の足の複素座標は

$$\frac{\alpha\kappa}{2\xi_1} = \frac{\gamma\alpha}{2\xi_3} = 2\xi_1\xi_2\xi_3$$

$\alpha = 2\,\xi_1\xi_3$
$\beta = 2\xi_3\xi_4$
$\gamma = 2\xi_2\xi_3$
$\delta = 2\xi_2\xi_4$
$\varepsilon = 2\xi_1\xi_4$
$\kappa = 2\xi_1\xi_2$



$X_1(\xi_1)$, $X_2(\xi_2)$, $X_3(\xi_3)$, $X_4(\xi_4)$, $O(0)$,
$A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$, $E(\varepsilon)$, $F(\kappa)$,

共通シムソン線について

４点,

$\xi_1\xi_2\xi_3$， $\xi_1\xi_2\xi_4$， $\xi_1\xi_3\xi_4$， $\xi_2\xi_3\xi_4$，

は同一直線上にあり，原点 0 から下した垂線の足は

$$\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$$

４点

$2\xi_1\xi_2\xi_3$，$2\xi_1\xi_2\xi_4$，

$2\xi_1\xi_3\xi_4$，$2\xi_2\xi_3\xi_4$，

は同一直線上にあり，原点 O(0) からこの直線に下した垂線の足は

$$2\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$$

この直線が，完全四辺形の 0 に関する共通シムソン線である

$\alpha = 2\,\xi_1\xi_3$

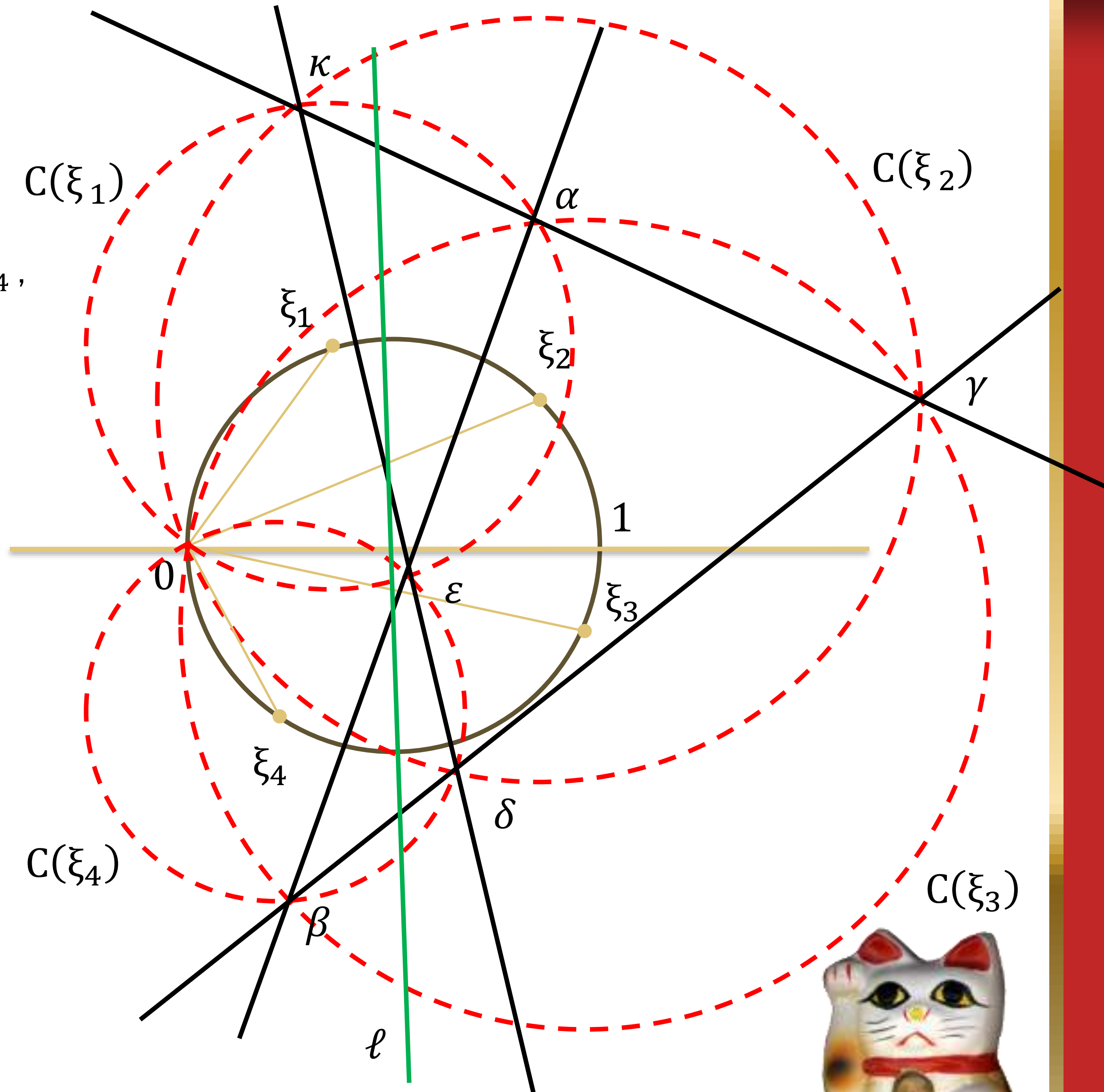
$\beta = 2\xi_3\xi_4$

$\gamma = 2\xi_2\xi_3$

$\delta = 2\xi_2\xi_4$

$\varepsilon = 2\xi_1\xi_4$

$\kappa = 2\xi_1\xi_2$



$X_1(\xi_1)$，$X_2(\xi_2)$，$X_3(\xi_3)$，$X_4(\xi_4)$，O(0)，

$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$，$D(\delta)$，$E(\varepsilon)$，$F(\kappa)$，

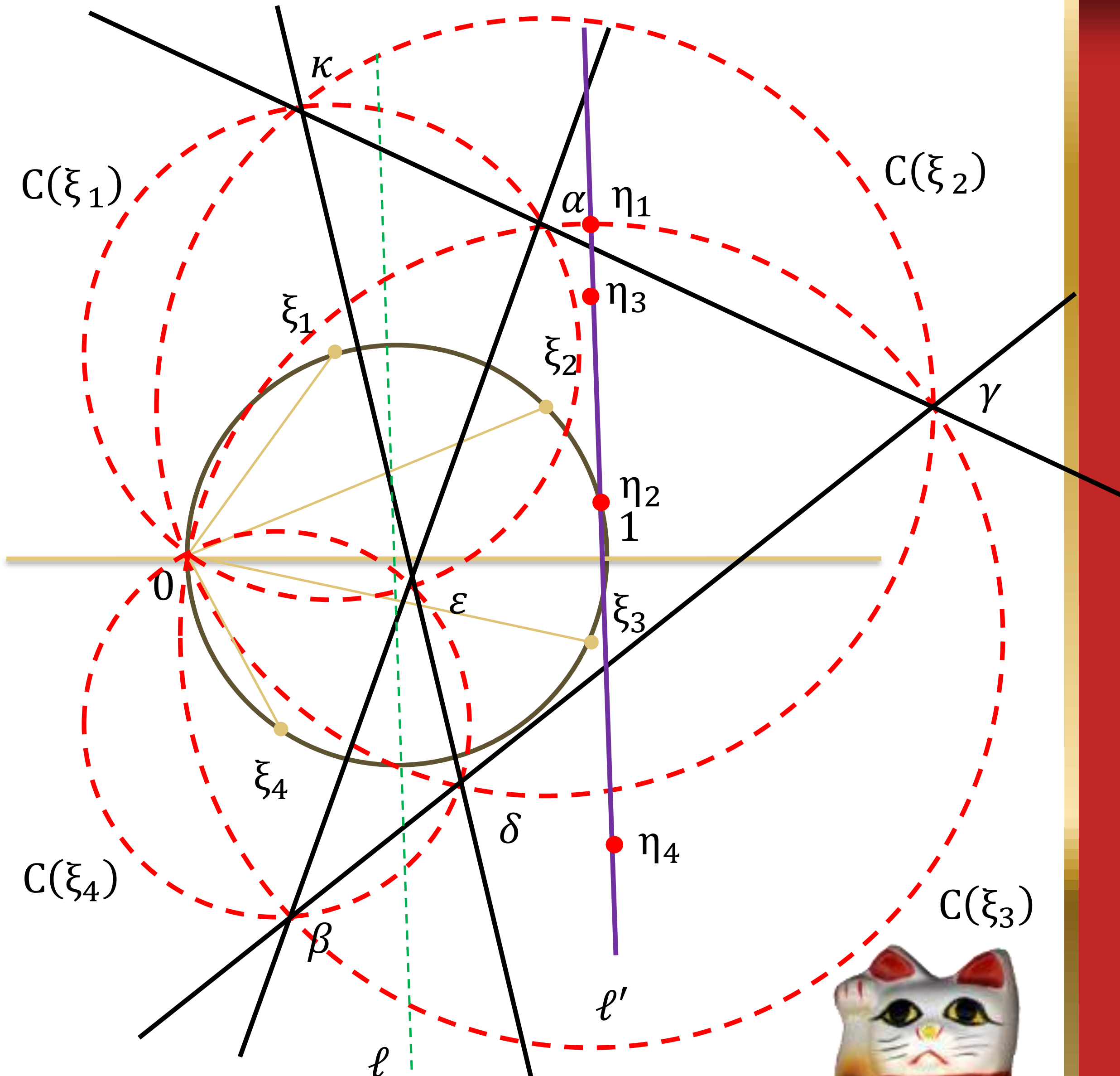
ΔAFE，ΔABC，ΔBDF，ΔCED，
の４つの垂心，
H_{AFE}，H_{ABC}，H_{BDE}，H_{CFD}，
はミケル点０に関するシムソン
線に平行な１直線 ℓ' 上にある

ΔAFE，ΔABC，ΔBDE，
ΔCFD，の４つの垂心を

$$H_{AEF} = H_1(\eta_1)$$
$$H_{ABC} = H_3(\eta_3)$$
$$H_{BDE} = H_4(\eta_4)$$
$$H_{CFD} = H_2(\eta_2)$$ とする

完全四辺形の各三角形の垂心とミケル点を結ぶ線分の中点は共通シムソン線上にある。
したがって，４つの垂心は同一直線 ℓ' 上にあり，原点 O(0) からこの直線に下した垂線の足は

$$4\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$$



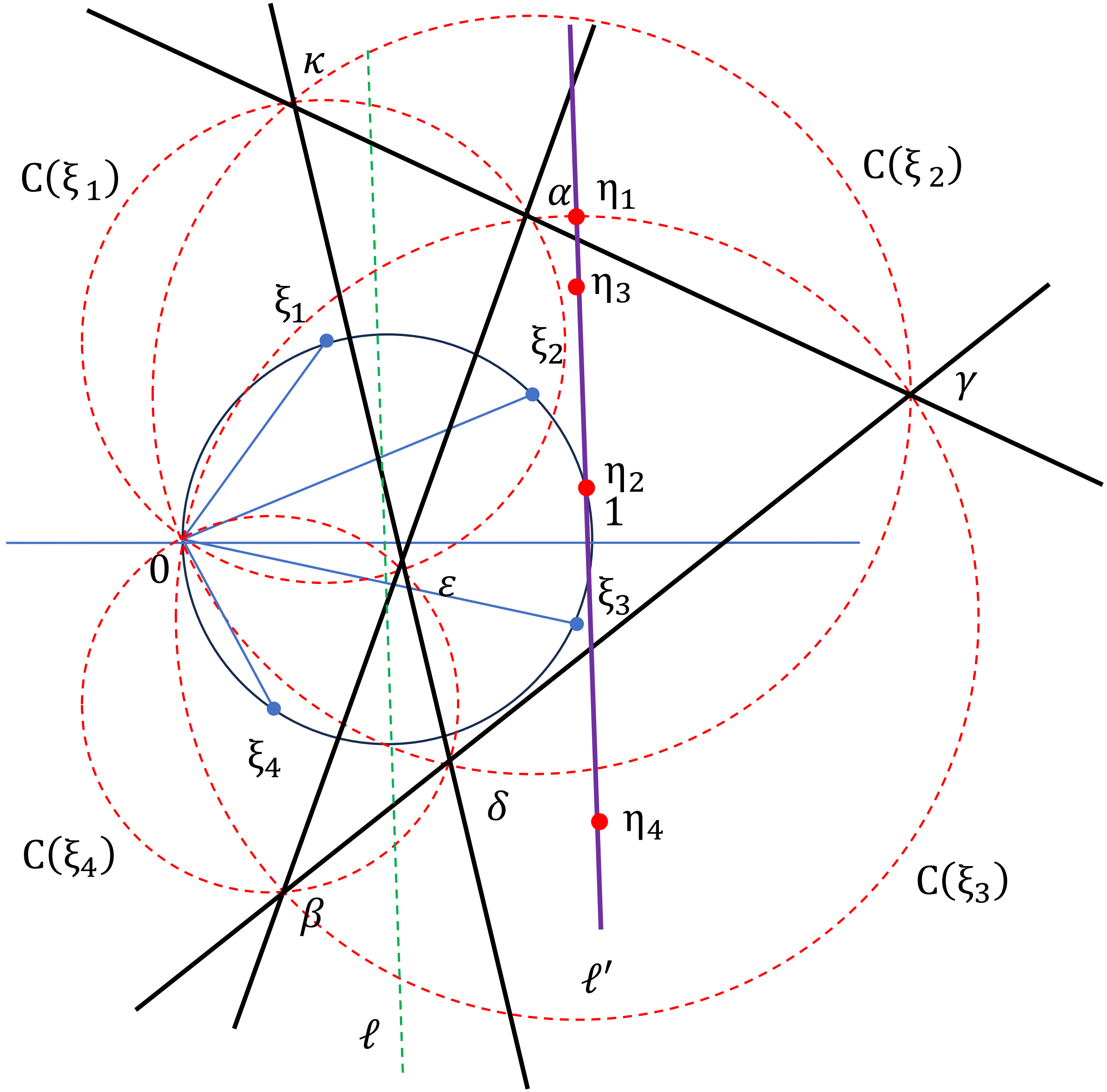
$X_1(\xi_1)$，$X_2(\xi_2)$，$X_3(\xi_3)$，$X_4(\xi_4)$，O(0)，
$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$，$D(\delta)$，$E(\varepsilon)$，$F(\kappa)$，

一般に A(α)，B(β)，C(γ)，を頂点とする ΔABC の外心を X(ξ) とすると，垂心 H(η) は

$$\eta = \alpha + \beta + \gamma - 2\xi$$

$$\eta_1 = \alpha + \kappa + \varepsilon - 2\xi_1$$
$$= 2\xi_1(\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 1)$$
$$\eta_2 = \gamma + \kappa + \delta - 2\xi_2$$
$$= 2\xi_2(\xi_1 + \xi_3 + \xi_4 - 1)$$
$$\eta_3 = \alpha + \beta + \gamma - 2\xi_3$$
$$= 2\xi_3(\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 - 1)$$
$$\eta_4 = \beta + \delta + \varepsilon - 2\xi_4$$
$$= 2\xi_4(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 1)$$

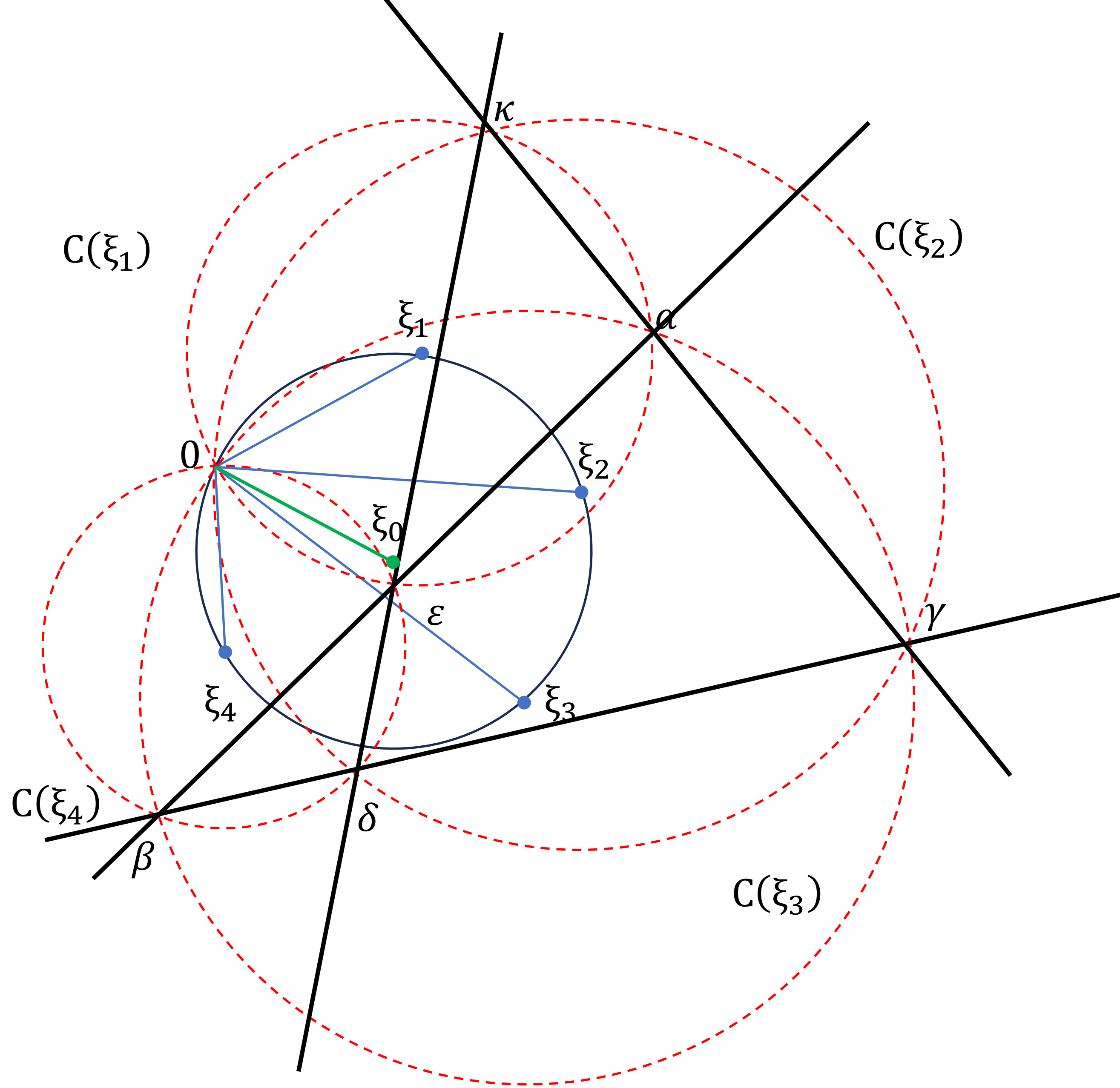
$$\alpha = 2\,\xi_1\xi_3$$
$$\beta = 2\xi_3\xi_4$$
$$\gamma = 2\xi_2\xi_3$$
$$\delta = 2\xi_2\xi_4$$
$$\varepsilon = 2\xi_1\xi_4$$
$$\kappa = 2\xi_1\xi_2$$



$X_1(\xi_1)$，$X_2(\xi_2)$，$X_3(\xi_3)$，$X_4(\xi_4)$，$O(0)$，
$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$，$D(\delta)$，$E(\varepsilon)$，$F(\kappa)$，

原点 O(0) を通り中心が $X_0(\xi_0)$ のシュタイナー円から出発する完全四辺形の再構成も同様である。ミケル点は O(0) で，完全四辺形の頂点は以下のようになる

$$
\begin{aligned}
\xi_0\alpha &= \xi_1\xi_3\\
\xi_0\beta &= \xi_3\xi_4\\
\xi_0\gamma &= \xi_2\xi_3\\
\xi_0\delta &= \xi_2\xi_4\\
\xi_0\varepsilon &= \xi_1\xi_4\\
\xi_0\kappa &= \xi_1\xi_2
\end{aligned}
$$



$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$，$D(\delta)$，$E(\varepsilon)$，$F(\kappa)$，

$X_0(\xi_0)$，$X_1(\xi_1)$，$X_2(\xi_2)$，$X_3(\xi_3)$，$X_4(\xi_4)$，$O(0)$，

この場合にも,

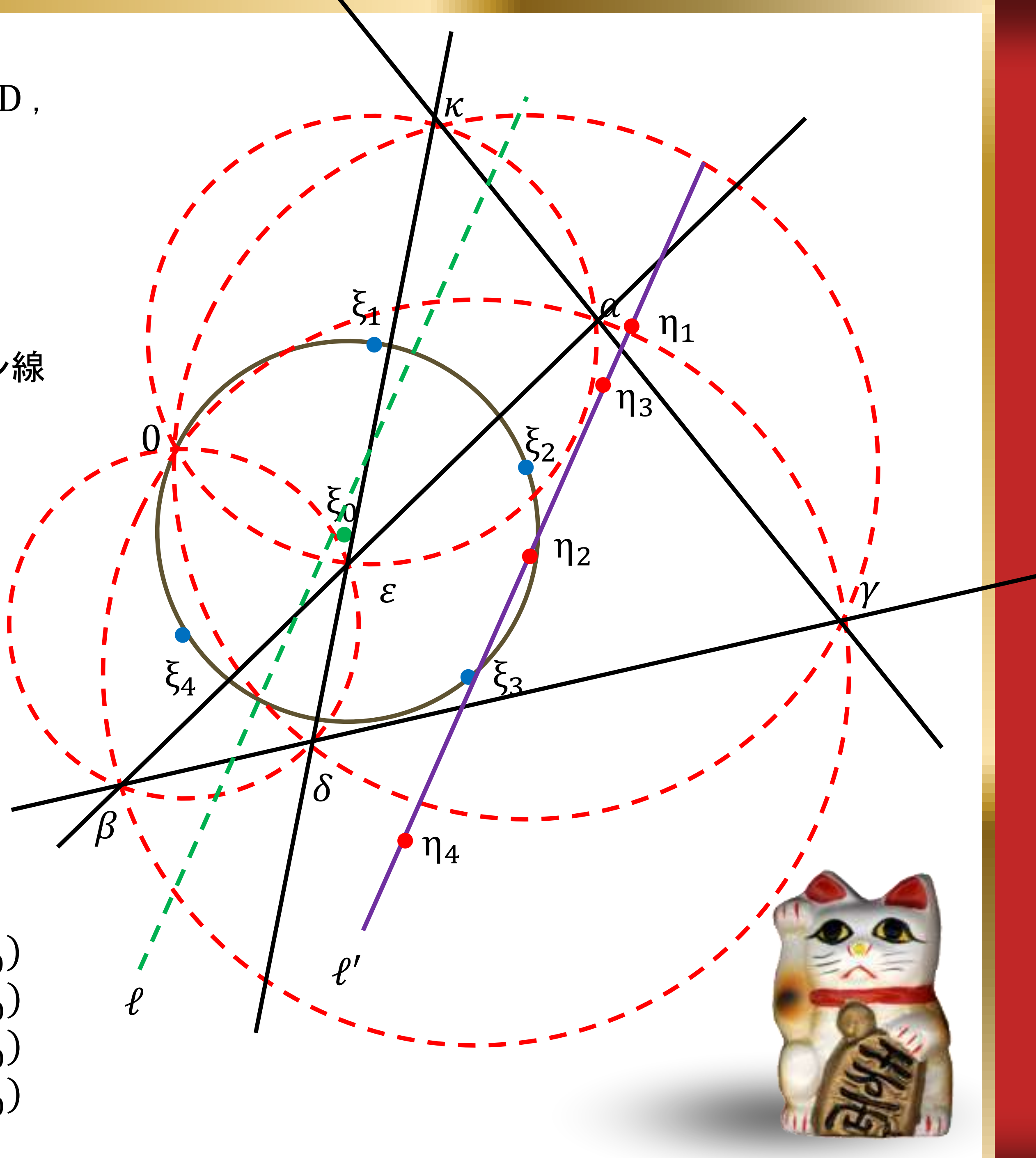
ΔAFE , ΔABC , ΔBDF , ΔCED ,

の４つの垂心,

$$H_{AFE} = H_1(\eta_1)$$
$$H_{ABC} = H_3(\eta_3)$$
$$H_{BDE} = H_4(\eta_4)$$
$$H_{CFD} = H_2(\eta_2)$$

はミケル点０に関するシムソン線

に平行な１直線 ℓ' 上にある



$$\eta_1 = \alpha + \kappa + \varepsilon - 2\xi_1$$
$$\eta_2 = \gamma + \kappa + \delta - 2\xi_2$$
$$\eta_3 = \alpha + \beta + \gamma - 2\xi_3$$
$$\eta_4 = \beta + \delta + \varepsilon - 2\xi_4$$

$$\xi_0\eta_1 = \xi_1(\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 2\xi_0)$$
$$\xi_0\eta_2 = \xi_2(\xi_1 + \xi_3 + \xi_4 - 2\xi_0)$$
$$\xi_0\eta_3 = \xi_3(\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 - 2\xi_0)$$
$$\xi_0\eta_4 = \xi_4(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 2\xi_0)$$

完全四辺形のミケル点 $O(0)$ に関するシムソン線 ℓ と各辺との交点を $L_1(\lambda_1)$, $L_2(\lambda_2)$, $L_3(\lambda_3)$, $L_4(\lambda_4)$, とする。

$$\lambda_1=\frac{\beta\gamma}{2\xi_3}=\frac{\xi_2\xi_3\xi_4}{2{\xi_0}^2}$$

$$\lambda_2=\frac{\beta\varepsilon}{2\xi_4}=\frac{\xi_1\xi_3\xi_4}{2{\xi_0}^2}$$

$$\lambda_3=\frac{\delta\kappa}{2\xi_2}=\frac{\xi_1\xi_2\xi_4}{2{\xi_0}^2}$$

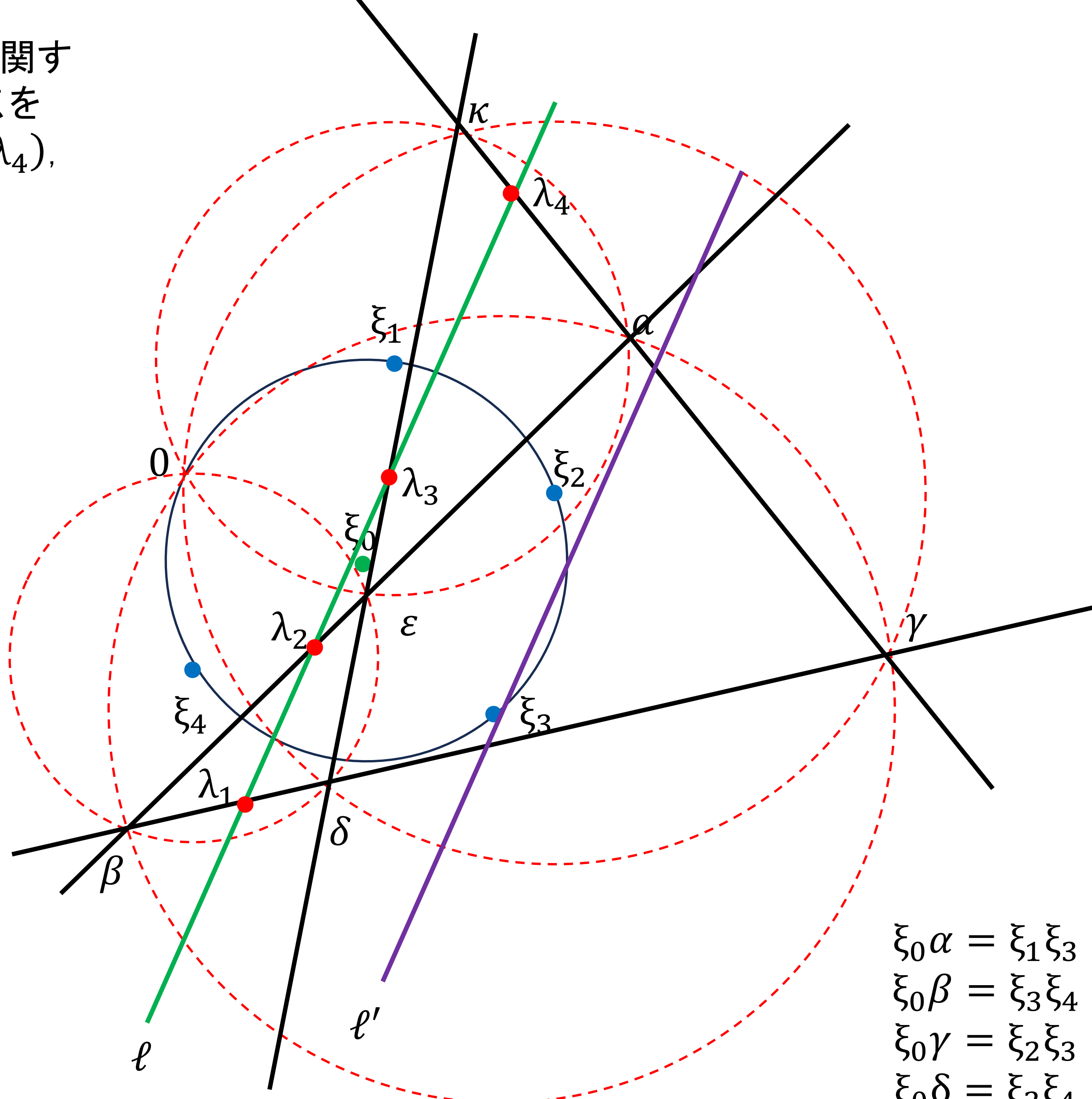
$$\lambda_4=\frac{\alpha\kappa}{2\xi_1}=\frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{2{\xi_0}^2}$$

原点 $O(0)$ から直線 ℓ' に下した垂線の足を $H_0(\eta_0)$ とすると

$$\eta_0=\frac{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}{2{\xi_0}^3}$$

シムソン線 ℓ に下した垂線の足は

$$\frac{\eta_0}{2}=\frac{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}{4{\xi_0}^3}$$



$$\xi_0\alpha=\xi_1\xi_3$$
$$\xi_0\beta=\xi_3\xi_4$$
$$\xi_0\gamma=\xi_2\xi_3$$
$$\xi_0\delta=\xi_2\xi_4$$
$$\xi_0\varepsilon=\xi_1\xi_4$$
$$\xi_0\kappa=\xi_1\xi_2$$

放物線と直線

完全四辺形と放物線

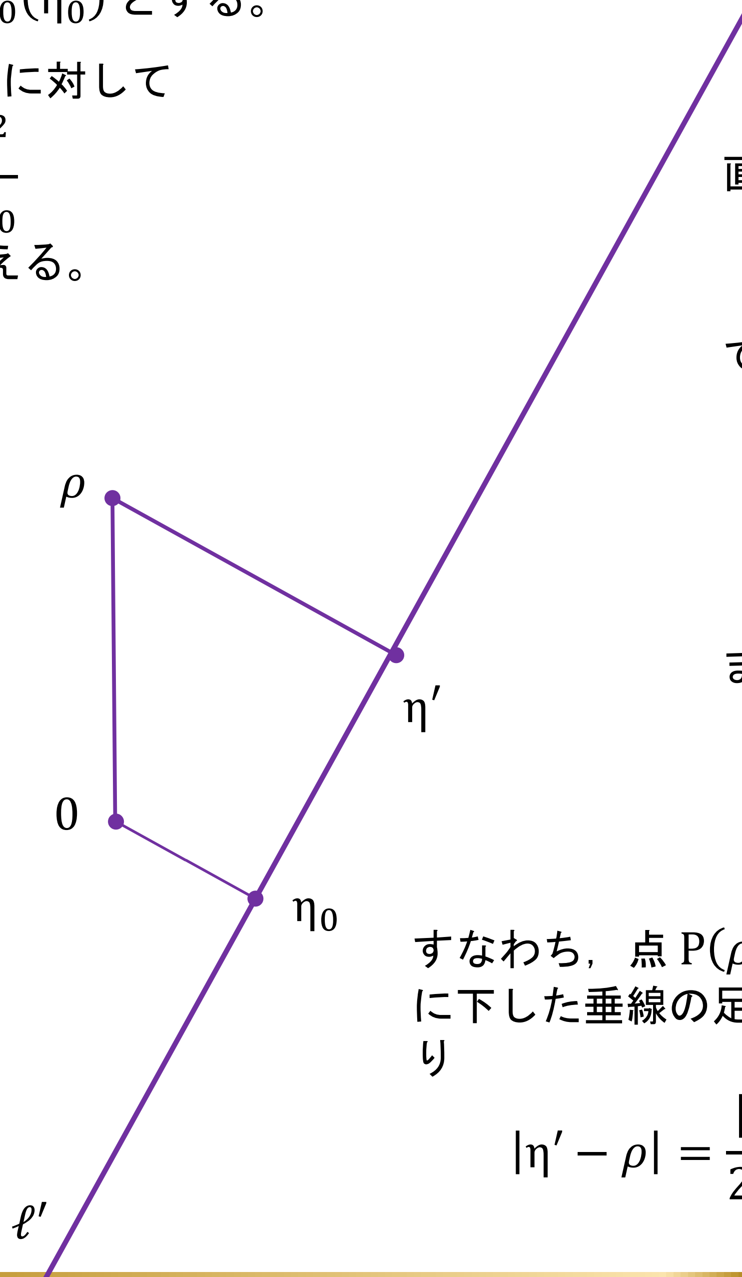
準線とシュタイナー円

原点 O(0) を通らない直線 ℓ' に O(0) から下した垂線の足を $\mathrm{H}_0(\eta_0)$ とする。

直線 ℓ' 上の点 $\mathrm{Q}(\eta')$ に対して

$$\rho = \frac{\eta'^2}{2\eta_0}$$

となる点 $\mathrm{P}(\rho)$ を考える。



直線 ℓ' の方程式は

$$\frac{\eta'}{2\eta_0} + \frac{\overline{\eta'}}{2\overline{\eta_0}} = 1$$

であるから，

$$\eta' - \rho = \eta'\left(1 - \frac{\eta'}{2\eta_0}\right)$$

$$= \eta' \cdot \frac{\overline{\eta'}}{2\overline{\eta_0}}$$

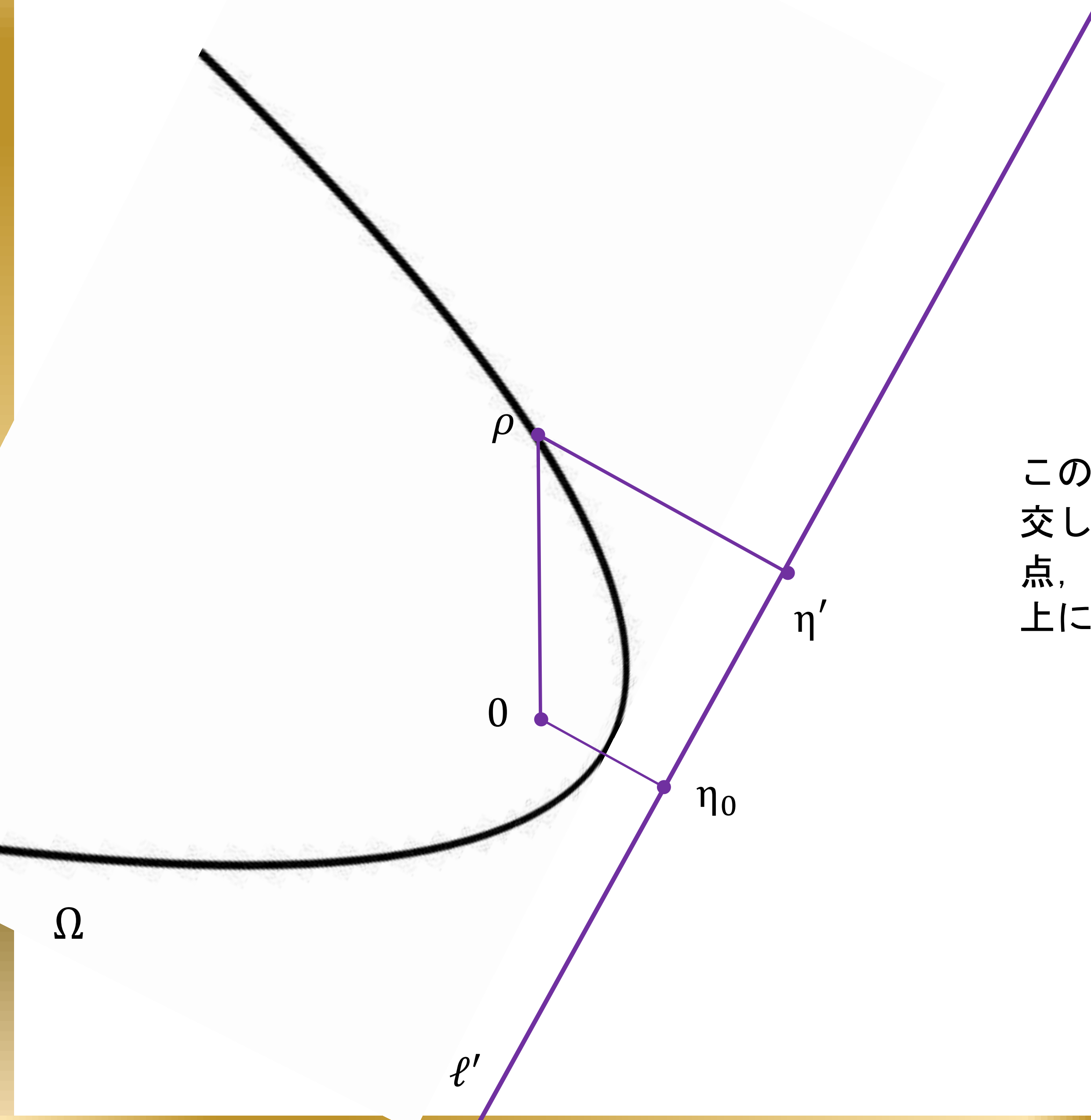
また

$$\frac{\eta' - \rho}{\eta_0} = \frac{\eta'\overline{\eta'}}{2\eta_0\overline{\eta_0}} = \frac{\overline{\eta'} - \bar{\rho}}{\overline{\eta_0}}$$

すなわち，点 $\mathrm{P}(\rho)$ から直線 ℓ' に下した垂線の足は $\mathrm{Q}(\eta')$ であり

$$|\eta' - \rho| = \frac{|\eta'|^2}{2|\eta_0|} = |\rho|$$

原点 O(0) を通らない直線 ℓ' に O(0) から下した垂線の足を $\mathrm{H}_0(\eta_0)$ とする。



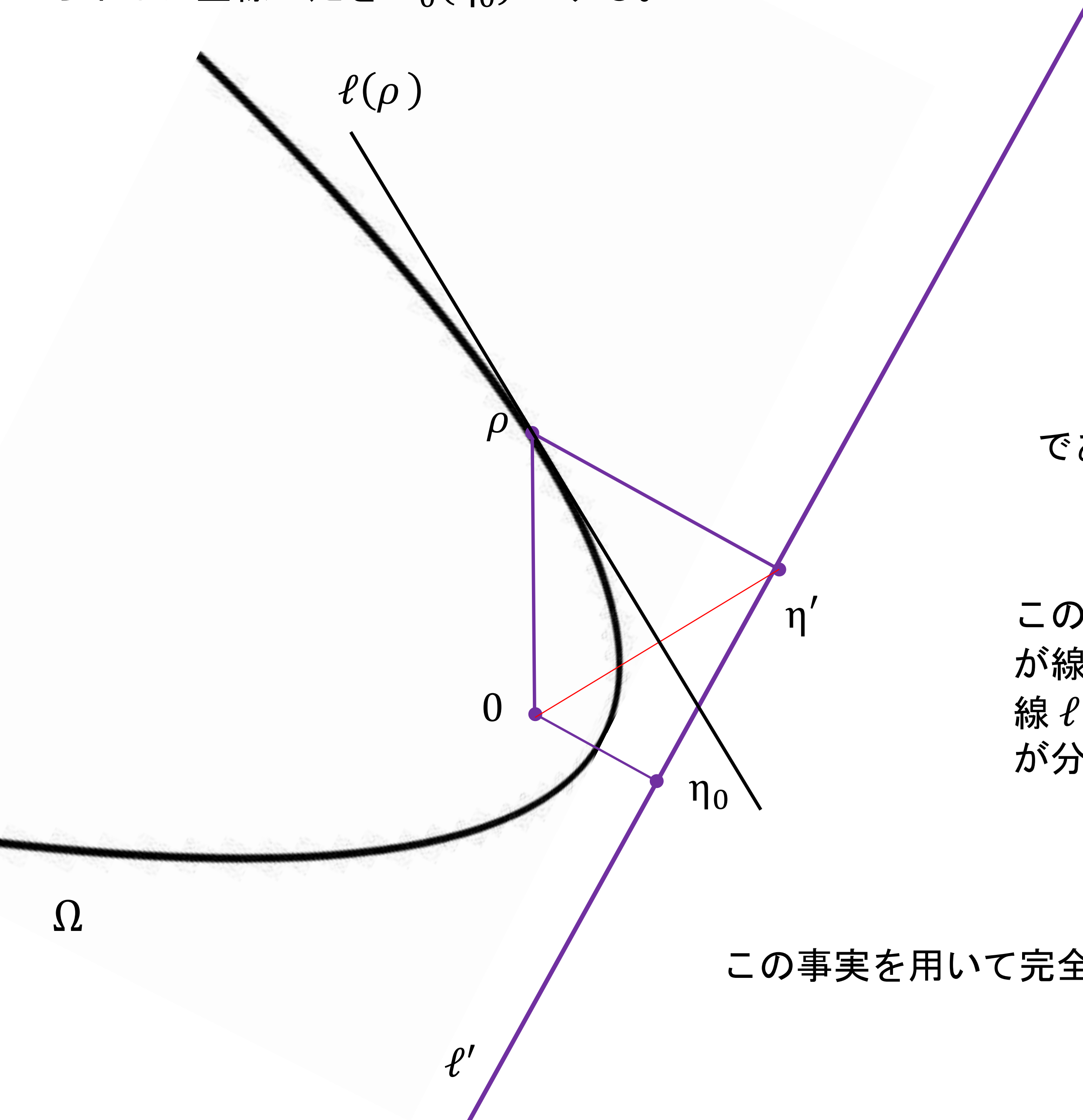
直線 ℓ' 上の点 Q(η') に対して

$$\rho = \frac{\eta'^2}{2\eta_0}$$

となる点 P(ρ) を考える。

このとき，線分 PQ は直線 ℓ' に直交し，点 P(ρ) は，点 O(0) を焦点，直線 ℓ' を準線とする放物線 Ω 上にある。

原点 O(0) を通らない直線 ℓ' に O(0) から下した垂線の足を $\mathrm{H}_0(\eta_0)$ とする。



直線 ℓ' 上の点 $\mathrm{Q}(\eta')$ に対して

$$\rho = \frac{\eta'^2}{2\eta_0}$$

となる点 $\mathrm{P}(\rho)$ は

$$\frac{\rho}{\eta'} = \frac{\eta'}{2\eta_0} \qquad \frac{\bar{\rho}}{\overline{\eta'}} = \frac{\overline{\eta'}}{2\overline{\eta_0}}$$

であるから，直線 ℓ' の方程式から

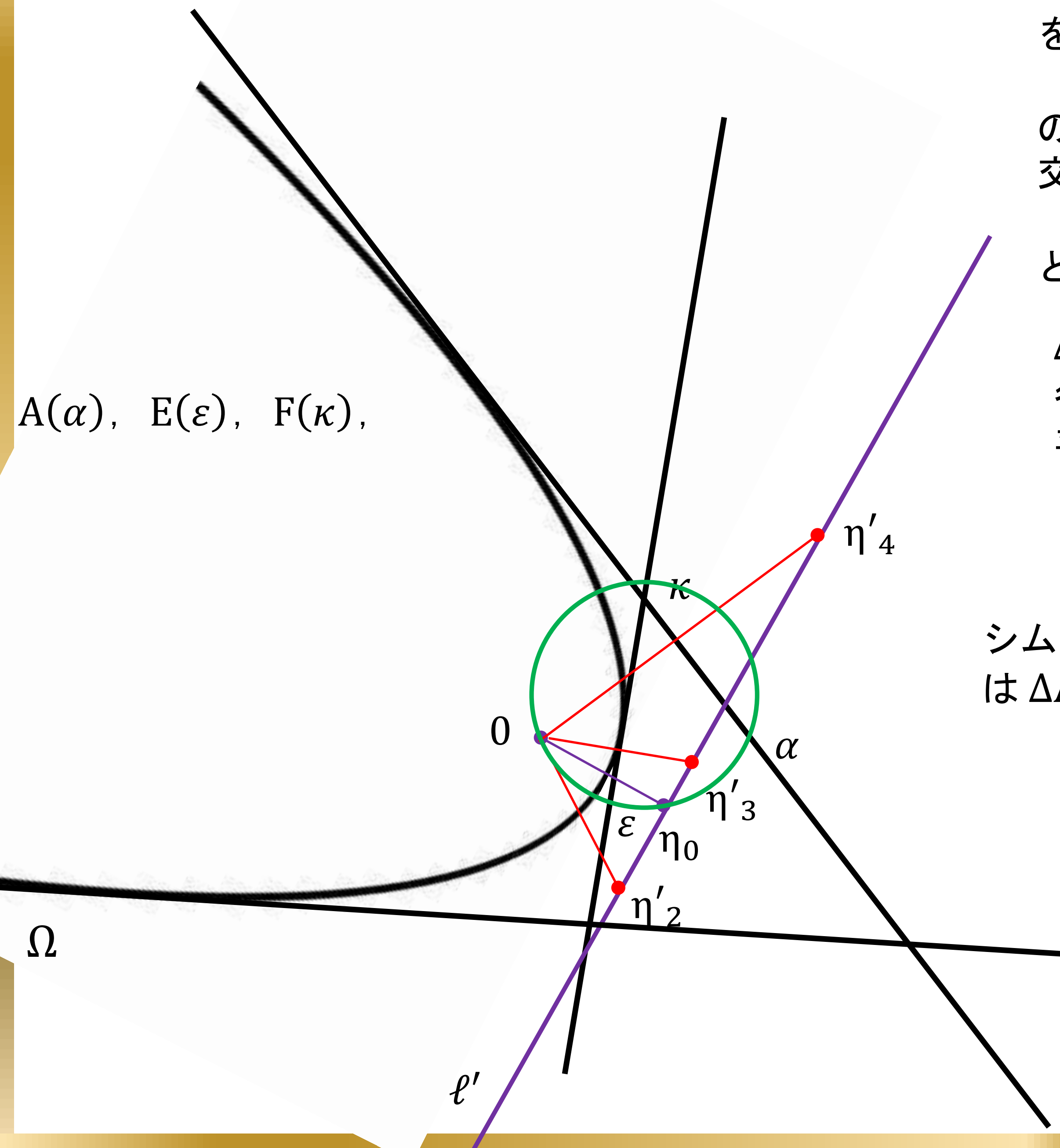
$$\frac{\rho}{\eta'} + \frac{\bar{\rho}}{\overline{\eta'}} = 1$$

この式からも点 $\mathrm{P}(\rho)$ が線分 OQの垂直二等分線 $\ell(\rho)$ 上にあることが分かる。

この事実を用いて完全四辺形を作ることを考える

$H_0(\eta_0)$, $H_2(\eta'_2)$, $H_3(\eta'_3)$, $H_4(\eta'_4)$, $O(0)$,

$A(\alpha)$, $E(\varepsilon)$, $F(\kappa)$,



直線 ℓ' 上に３点
$H_2(\eta'_2)$, $H_3(\eta'_3)$, $H_4(\eta'_4)$,
をとり，線分
OH_2, OH_3, OH_4,
の垂直二等分線を引く。
交点を
$A(\alpha)$, $F(\kappa)$, $E(\varepsilon)$,
とする。

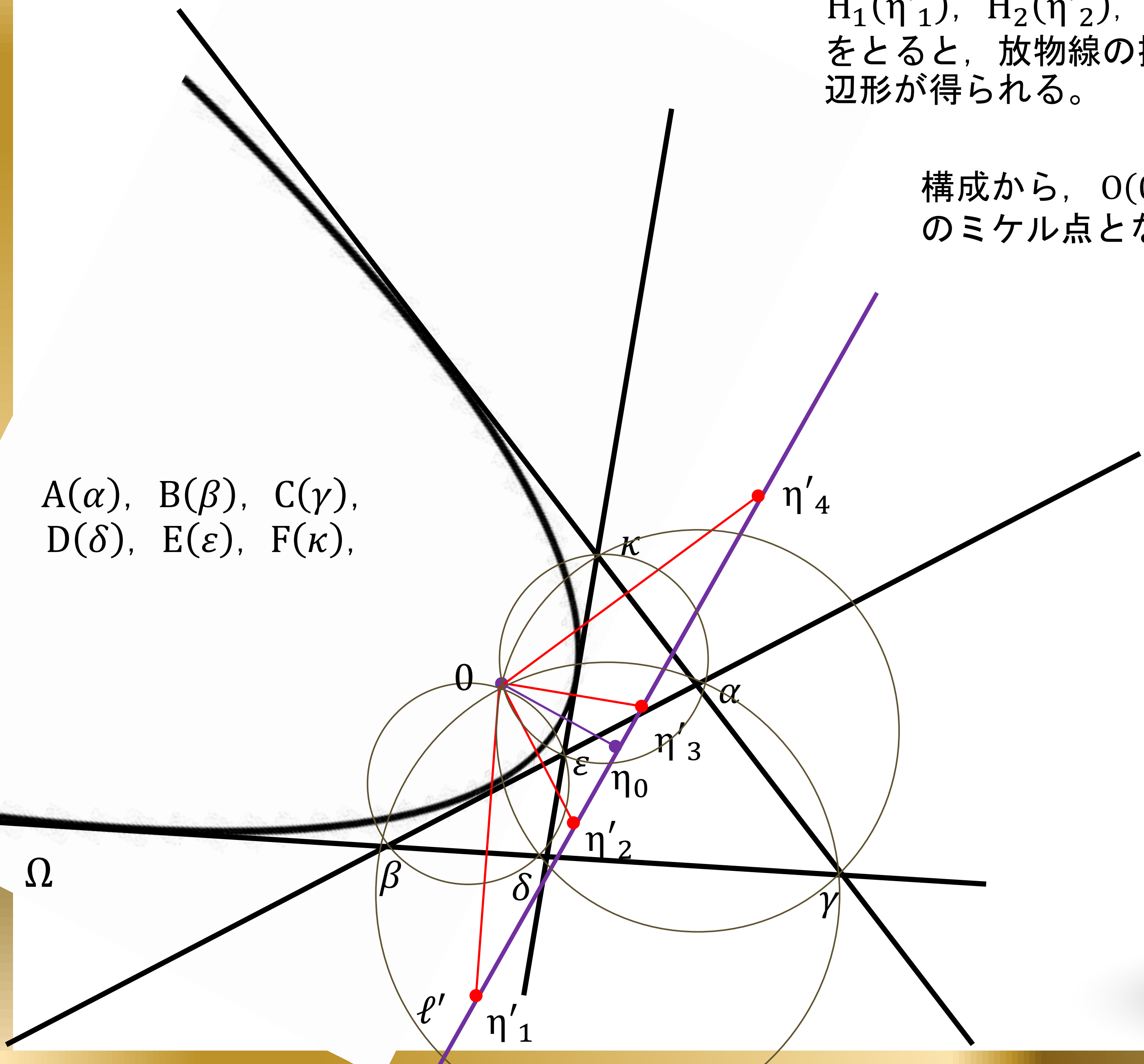
ΔAFE について，$O(0)$ から各辺に下した垂線の足は ℓ' と平行な直線 ℓ 上にある。

シムソンの定理の逆により，$O(0)$ は ΔAFE の外接円上にある。

直線 ℓ' 上に４点
$H_1(\eta'_1)$，$H_2(\eta'_2)$，$H_3(\eta'_3)$，$H_4(\eta'_4)$，
をとると，放物線の接戦からなる完全四辺形が得られる。

構成から， O(0) は完全四辺形のミケル点となる。

$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$，
$D(\delta)$，$E(\varepsilon)$，$F(\kappa)$，



ミケル点 O(0) を通る４つの三角形の外接円の中心を，これまでのように

$$X_1(\xi_1),\ X_2(\xi_2),\ X_3(\xi_3),\ X_4(\xi_4),$$

とする。

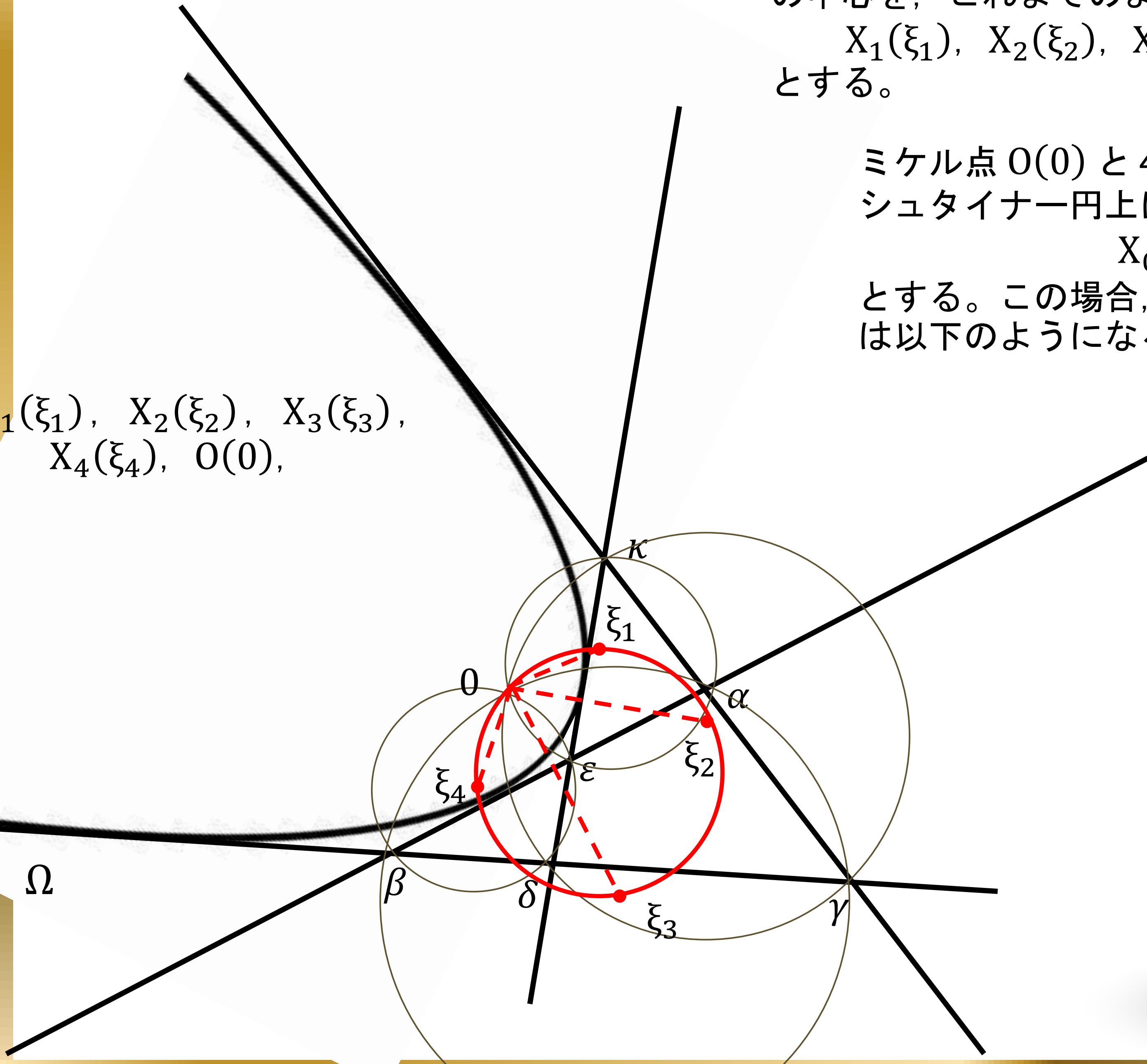
ミケル点 O(0) と４つの外心の５点はシュタイナー円上にある。この中心を

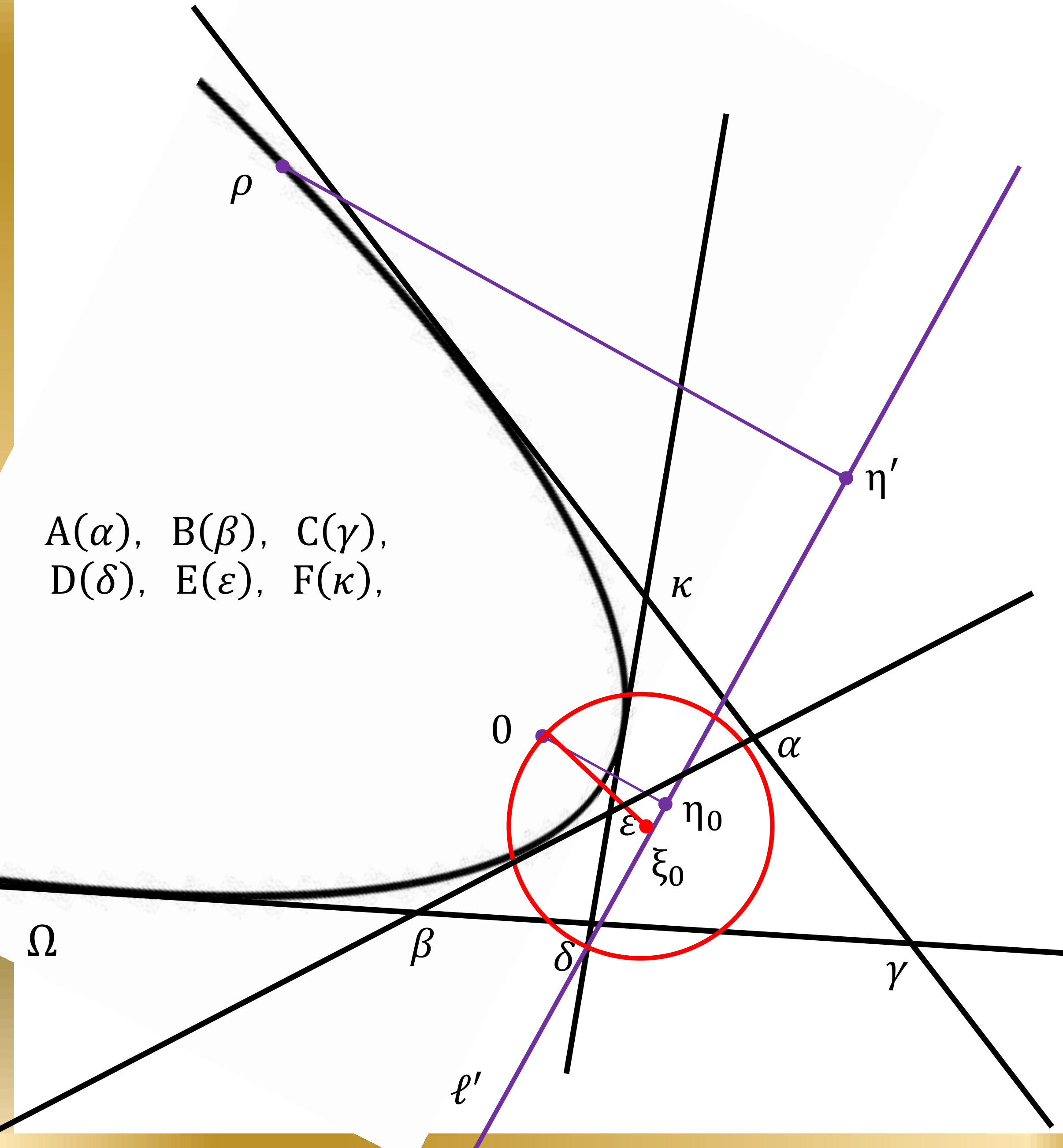
$$X_0(\xi_0)$$

とする。この場合，完全四辺形の頂点は以下のようになる。

$$\xi_0\alpha = \xi_1\xi_3$$
$$\xi_0\beta = \xi_3\xi_4$$
$$\xi_0\gamma = \xi_2\xi_3$$
$$\xi_0\delta = \xi_2\xi_4$$
$$\xi_0\varepsilon = \xi_1\xi_4$$
$$\xi_0\kappa = \xi_1\xi_2$$

$_1(\xi_1)$, $X_2(\xi_2)$, $X_3(\xi_3)$,
$X_4(\xi_4)$, $O(0)$,





放物線 Ω の直線 ℓ' によるパラメータ表示

$$\rho = \frac{\eta'^2}{2\eta'_0}$$

に対して

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{2\eta'_0}{\eta'}$$

とすると，放物線 Ω のシュタイナー円によるパラメータ表示

$$\rho = 2\eta'_0\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2$$

が得られる。

放物線Ωのパラメータ表示

$$\rho = \frac{\eta'^2}{2\eta_0}$$

に対して

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{2\eta_0}{\eta'}$$

より，直線 ℓ' の方程式

$$\frac{\eta'}{2\eta_0} + \frac{\overline{\eta'}}{2\overline{\eta_0}} = 1$$

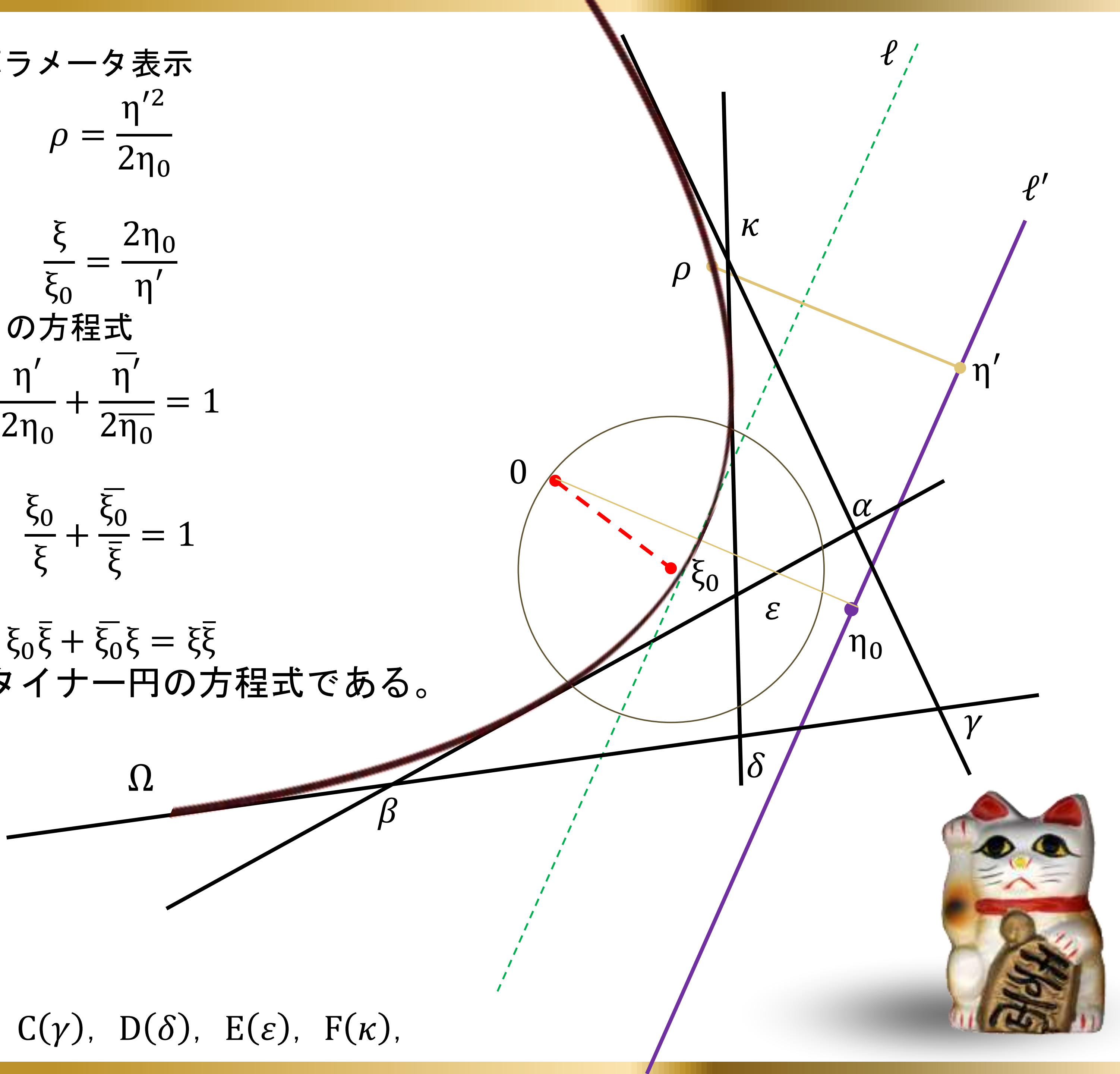
から

$$\frac{\xi_0}{\xi} + \frac{\overline{\xi_0}}{\overline{\xi}} = 1$$

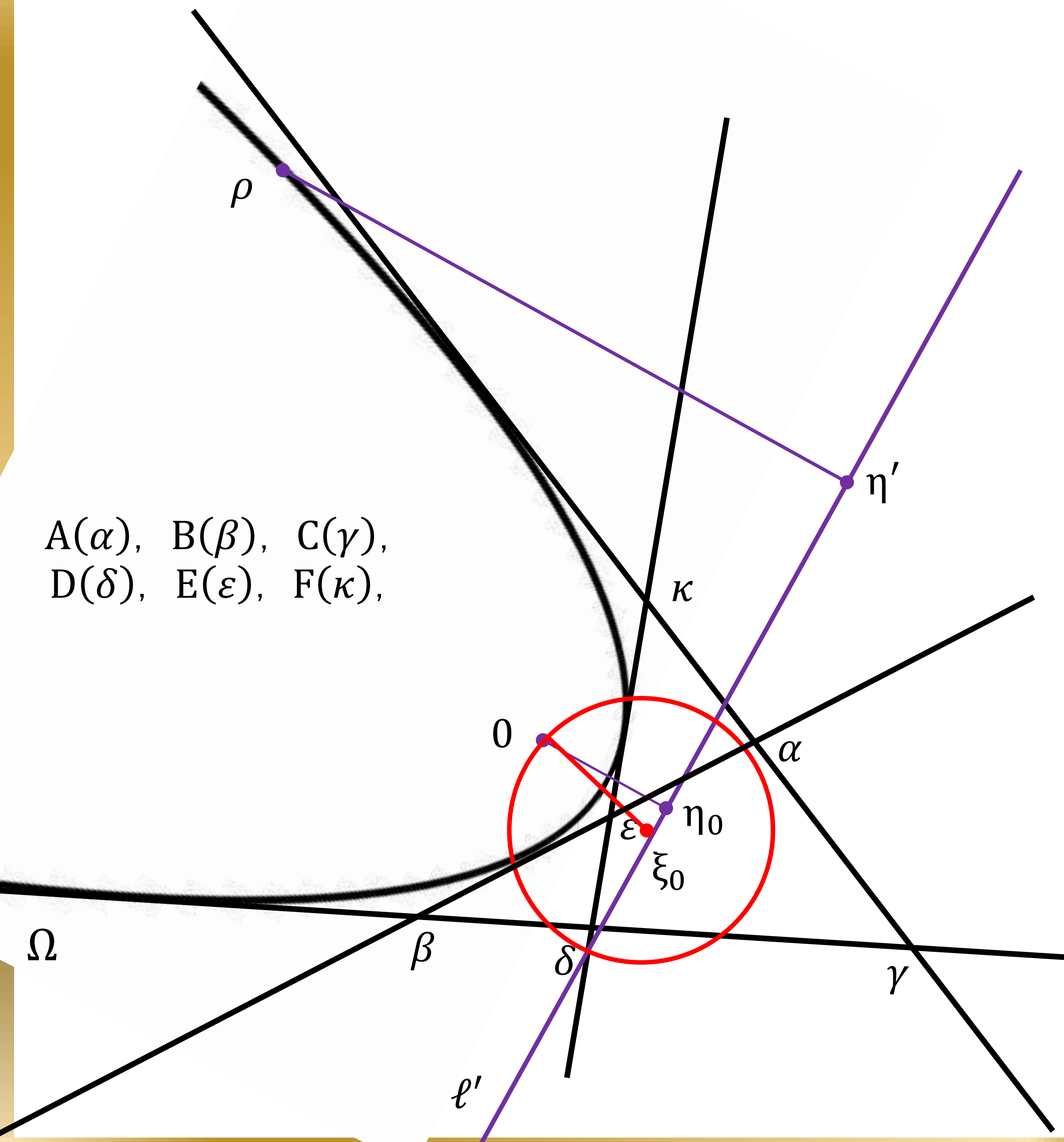
すなわち

$$\xi_0\overline{\xi} + \overline{\xi_0}\xi = \xi\overline{\xi}$$

これはシュタイナー円の方程式である。



A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)，E(ε)，F(κ)，



放物線 Ω のパラメータ表示

$$\rho = \frac{\eta'^2}{2\eta_0}$$

に対して

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{2\eta_0}{\eta'}$$

より，直線 ℓ' の方程式

$$\frac{\eta'}{2\eta_0} + \frac{\overline{\eta'}}{2\overline{\eta_0}} = 1$$

から

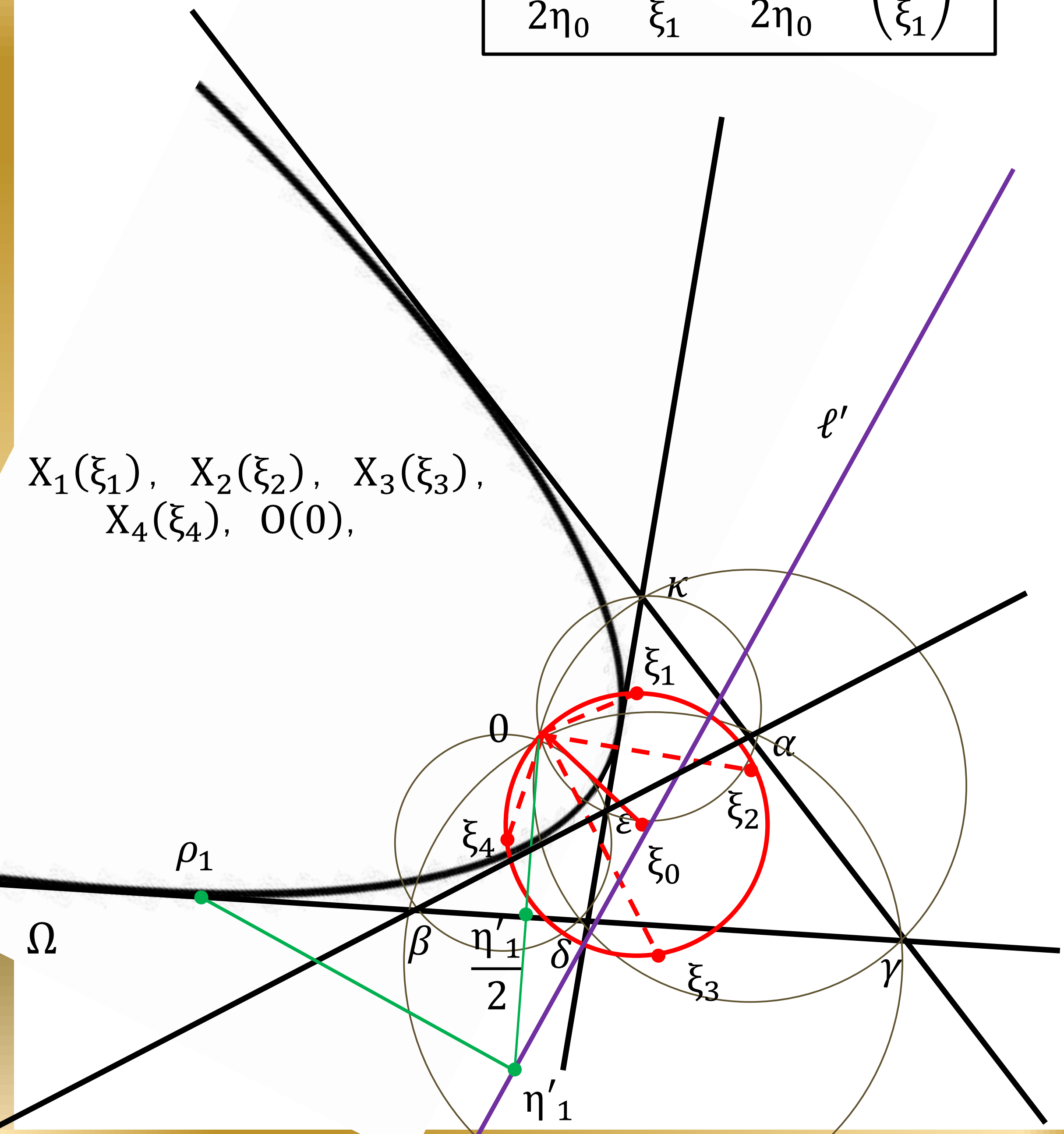
$$\frac{\xi_0}{\xi} + \frac{\overline{\xi_0}}{\overline{\xi}} = 1$$

すなわち

$$\xi_0\overline{\xi} + \overline{\xi_0}\xi = \xi\overline{\xi}$$

これはシュタイナー円の方程式である。

$$\frac{\eta'_1}{2\eta_0} = \frac{\xi_0}{\xi_1} \qquad \frac{\rho_1}{2\eta_0} = \left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2$$



とくに $\eta = \eta'_1$ の場合を考えると，ミケル点 O(0) から直線 BC に下した垂線の足は

$$L_1\left(\frac{\eta'_1}{2}\right)$$

$$\frac{\eta'_1}{2} = \frac{\beta\gamma}{2\xi_3} = \frac{\gamma\delta}{2\xi_2} = \frac{\xi_2\xi_3\xi_4}{2{\xi_0}^2}$$

であるから

$$\rho_1 = \frac{{\eta'_1}^2}{2\eta_0}$$

$$\eta_0 = \frac{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}{2{\xi_0}^3}$$

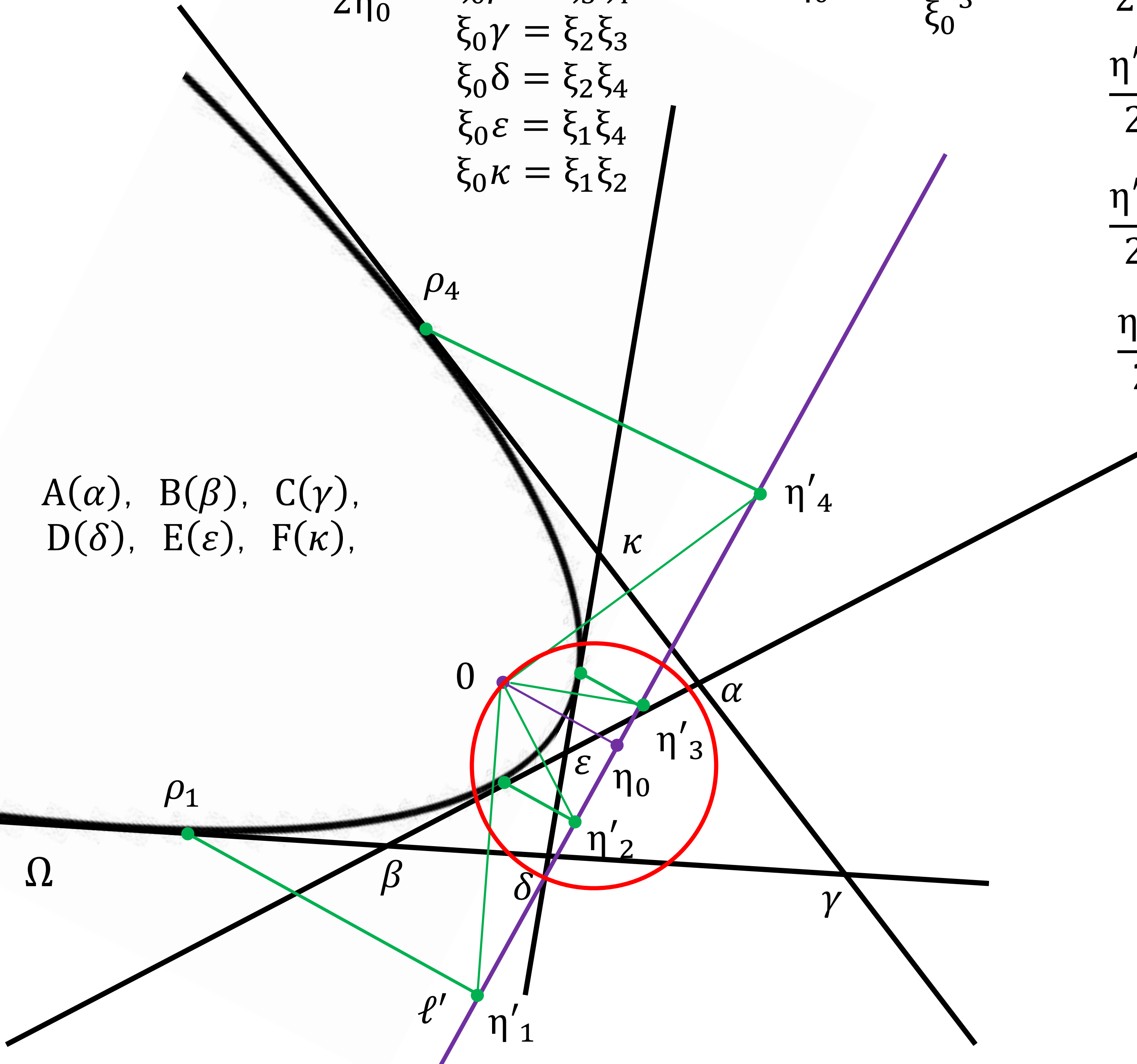
$$\rho_1 = \frac{{\eta'_1}^2}{2\eta_0} = \frac{\xi_2\xi_3\xi_4}{\xi_0\xi_1}$$

$$\rho = \frac{\eta'^2}{2\eta_0}$$

$$\xi_0\alpha = \xi_1\xi_3$$
$$\xi_0\beta = \xi_3\xi_4$$
$$\xi_0\gamma = \xi_2\xi_3$$
$$\xi_0\delta = \xi_2\xi_4$$
$$\xi_0\varepsilon = \xi_1\xi_4$$
$$\xi_0\kappa = \xi_1\xi_2$$

$$2\eta_0 = \frac{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}{\xi_0{}^3}$$

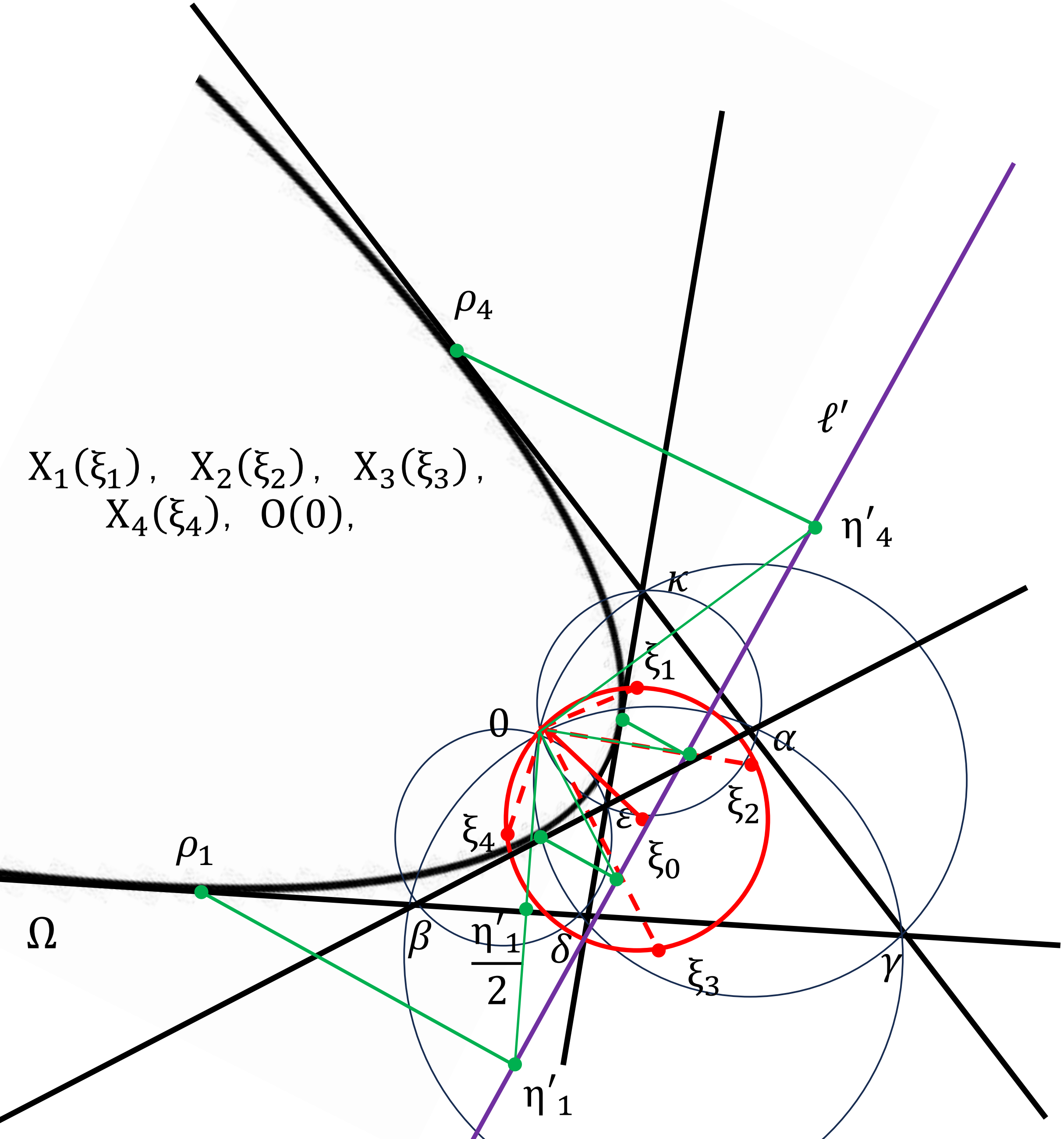
$$\frac{\eta'_1}{2} = \frac{\beta\gamma}{2\xi_3} = \frac{\gamma\delta}{2\xi_2} = \frac{\xi_2\xi_3\xi_4}{2\xi_0{}^2}$$
$$\frac{\eta'_2}{2} = \frac{\alpha\varepsilon}{2\xi_1} = \frac{\alpha\beta}{2\xi_3} = \frac{\xi_1\xi_3\xi_4}{2\xi_0{}^2}$$
$$\frac{\eta'_3}{2} = \frac{\delta\kappa}{2\xi_2} = \frac{\delta\varepsilon}{2\xi_4} = \frac{\xi_1\xi_2\xi_4}{2\xi_0{}^2}$$
$$\frac{\eta'_4}{2} = \frac{\alpha\kappa}{2\xi_1} = \frac{\alpha\gamma}{2\xi_3} = \frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{2\xi_0{}^2}$$



$$\rho_1 = \frac{\eta'_1{}^2}{2\eta_0} = \frac{\xi_2\xi_3\xi_4}{\xi_0\xi_1}$$
$$\rho_2 = \frac{\eta'_2{}^2}{2\eta_0} = \frac{\xi_1\xi_3\xi_4}{\xi_0\xi_2}$$
$$\rho_3 = \frac{\eta'_3{}^2}{2\eta_0} = \frac{\xi_1\xi_2\xi_4}{\xi_0\xi_3}$$
$$\rho_4 = \frac{\eta'_4{}^2}{2\eta_0} = \frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{\xi_0\xi_4}$$

放物線上の点とのその準線上の点

$$2\eta_0 = \frac{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}{\xi_0{}^3}$$



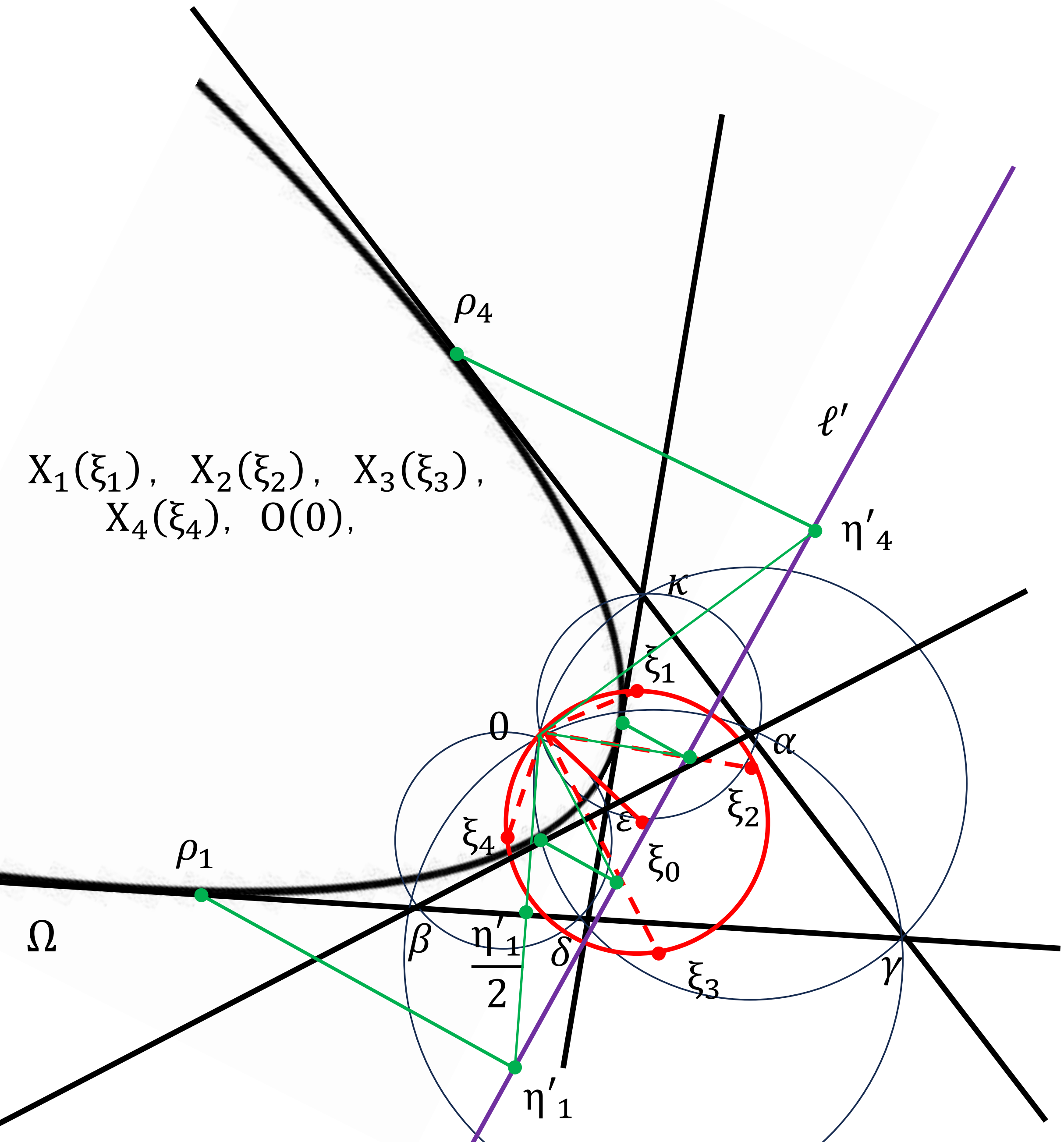
$$\frac{\eta'_1}{2\eta_0} = \frac{\xi_0}{\xi_1} \qquad \frac{\rho_1}{2\eta_0} = \left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2$$

$$\frac{\eta'_2}{2\eta_0} = \frac{\xi_0}{\xi_2} \qquad \frac{\rho_2}{2\eta_0} = \left(\frac{\xi_0}{\xi_2}\right)^2$$

$$\frac{\eta'_3}{2\eta_0} = \frac{\xi_0}{\xi_3} \qquad \frac{\rho_3}{2\eta_0} = \left(\frac{\xi_0}{\xi_3}\right)^2$$

$$\frac{\eta'_4}{2\eta_0} = \frac{\xi_0}{\xi_4} \qquad \frac{\rho_4}{2\eta_0} = \left(\frac{\xi_0}{\xi_4}\right)^2$$

各点に対応する複素数表示をまとめておく。



$$\eta'_1=\frac{\xi_2\xi_3\xi_4}{\xi_0{}^2}\qquad \frac{\eta'_1}{2\eta_0}=\frac{\xi_0}{\xi_1}$$

$$\eta'_2=\frac{\xi_1\xi_3\xi_4}{\xi_0{}^2}\qquad \frac{\eta'_2}{2\eta_0}=\frac{\xi_0}{\xi_2}$$

$$\eta'_3=\frac{\xi_1\xi_2\xi_4}{\xi_0{}^2}\qquad \frac{\eta'_3}{2\eta_0}=\frac{\xi_0}{\xi_3}$$

$$\eta'_4=\frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{\xi_0{}^2}\qquad \frac{\eta'_4}{2\eta_0}=\frac{\xi_0}{\xi_4}$$

$$\rho_1=\frac{\xi_2\xi_3\xi_4}{\xi_0\xi_1}\qquad \frac{\rho_1}{2\eta_0}=\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2$$

$$\rho_2=\frac{\xi_1\xi_3\xi_4}{\xi_0\xi_2}\qquad \frac{\rho_2}{2\eta_0}=\left(\frac{\xi_0}{\xi_2}\right)^2$$

$$\rho_3=\frac{\xi_1\xi_2\xi_4}{\xi_0\xi_3}\qquad \frac{\rho_3}{2\eta_0}=\left(\frac{\xi_0}{\xi_3}\right)^2$$

$$\rho_4=\frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{\xi_0\xi_4}\qquad \frac{\rho_4}{2\eta_0}=\left(\frac{\xi_0}{\xi_4}\right)^2$$

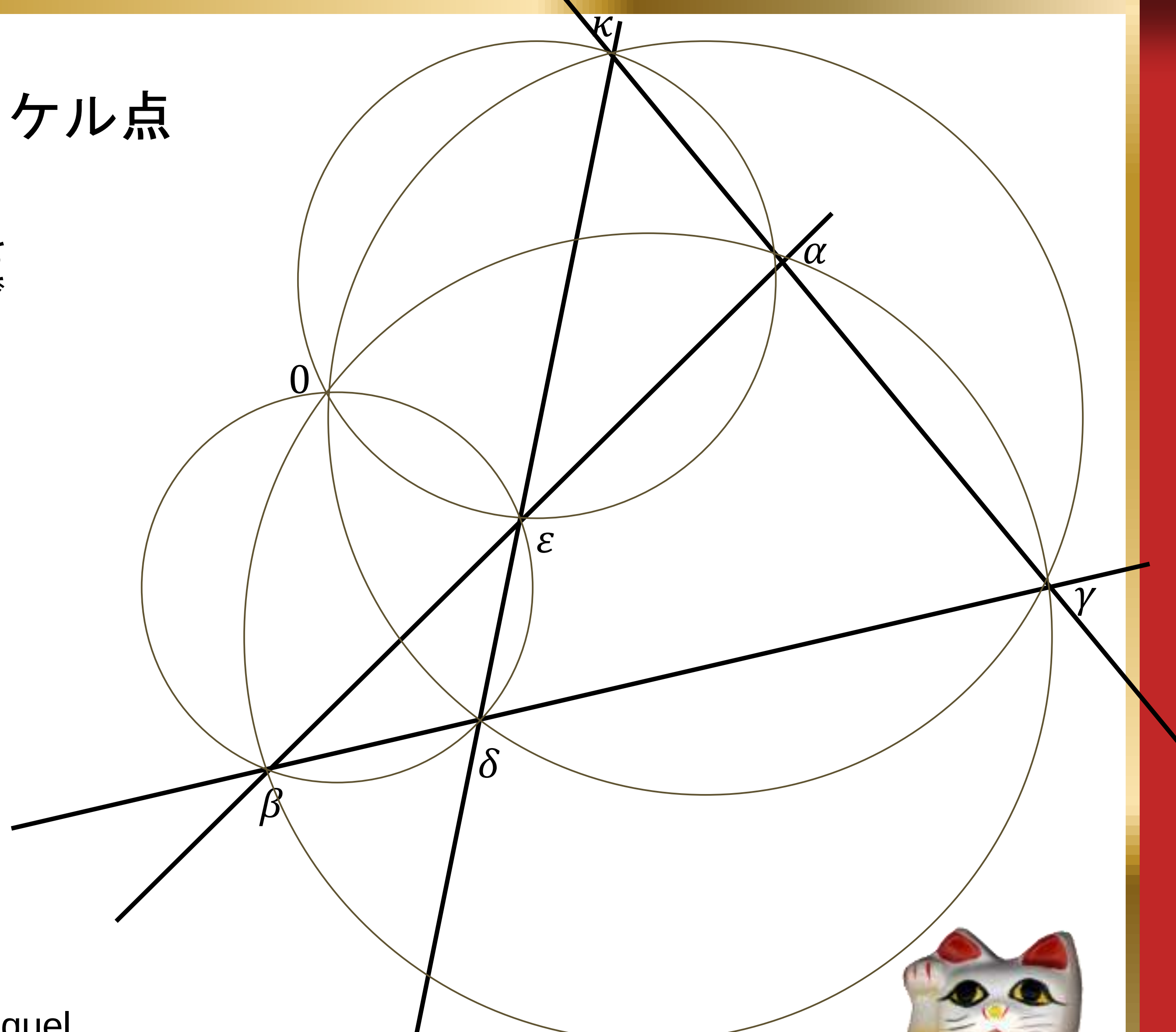
$$2\eta_0=\frac{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}{\xi_0{}^3}$$

ハーヴィ点

- オイラー線
- ハーヴィ点

完全四辺形とミケル点

完全四辺形をミケル点を
原点とする複素平面上で
考える。



Louis Joseph Augustin Miquel
1816-1851

$\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$, $\mathrm{D}(\delta)$, $\mathrm{E}(\varepsilon)$, $\mathrm{F}(\kappa)$, $\mathrm{O}(0)$,

シュタイナー円

４つの三角形の外心

$X_1(\xi_1)$, $X_2(\xi_2)$,

$X_3(\xi_3)$, $X_4(\xi_4)$,

は同一円,

シュタイナー円,

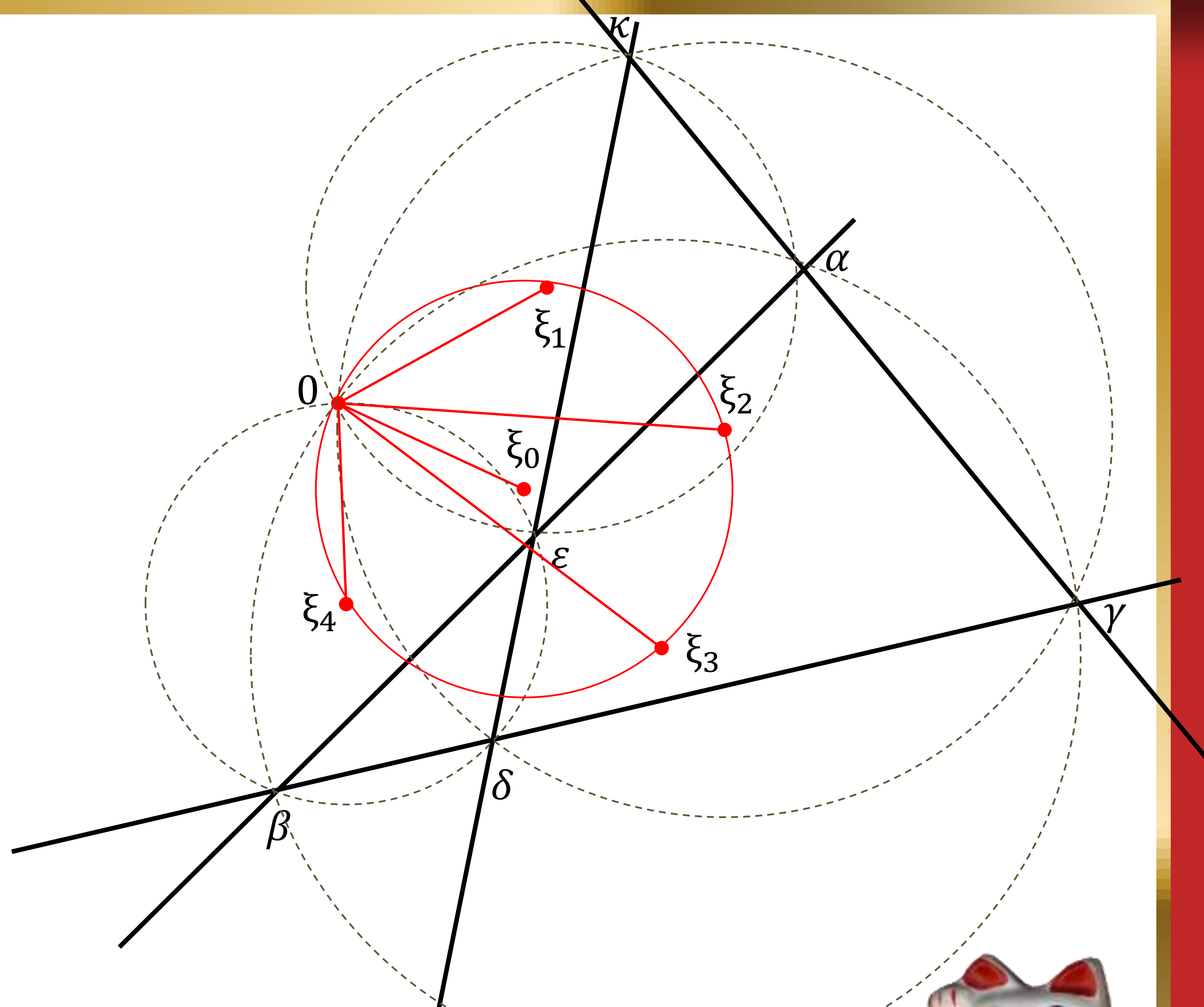
上にある。

シュタイナー円の中心を

$X_0(\xi_0)$

とする

$$\xi_0\alpha = \xi_1\xi_3$$
$$\xi_0\beta = \xi_3\xi_4$$
$$\xi_0\gamma = \xi_2\xi_3$$
$$\xi_0\delta = \xi_2\xi_4$$
$$\xi_0\varepsilon = \xi_1\xi_4$$
$$\xi_0\kappa = \xi_1\xi_2$$



$X_0(\xi_0)$, $X_1(\xi_1)$, $X_2(\xi_2)$, $X_3(\xi_3)$, $X_4(\xi_4)$,

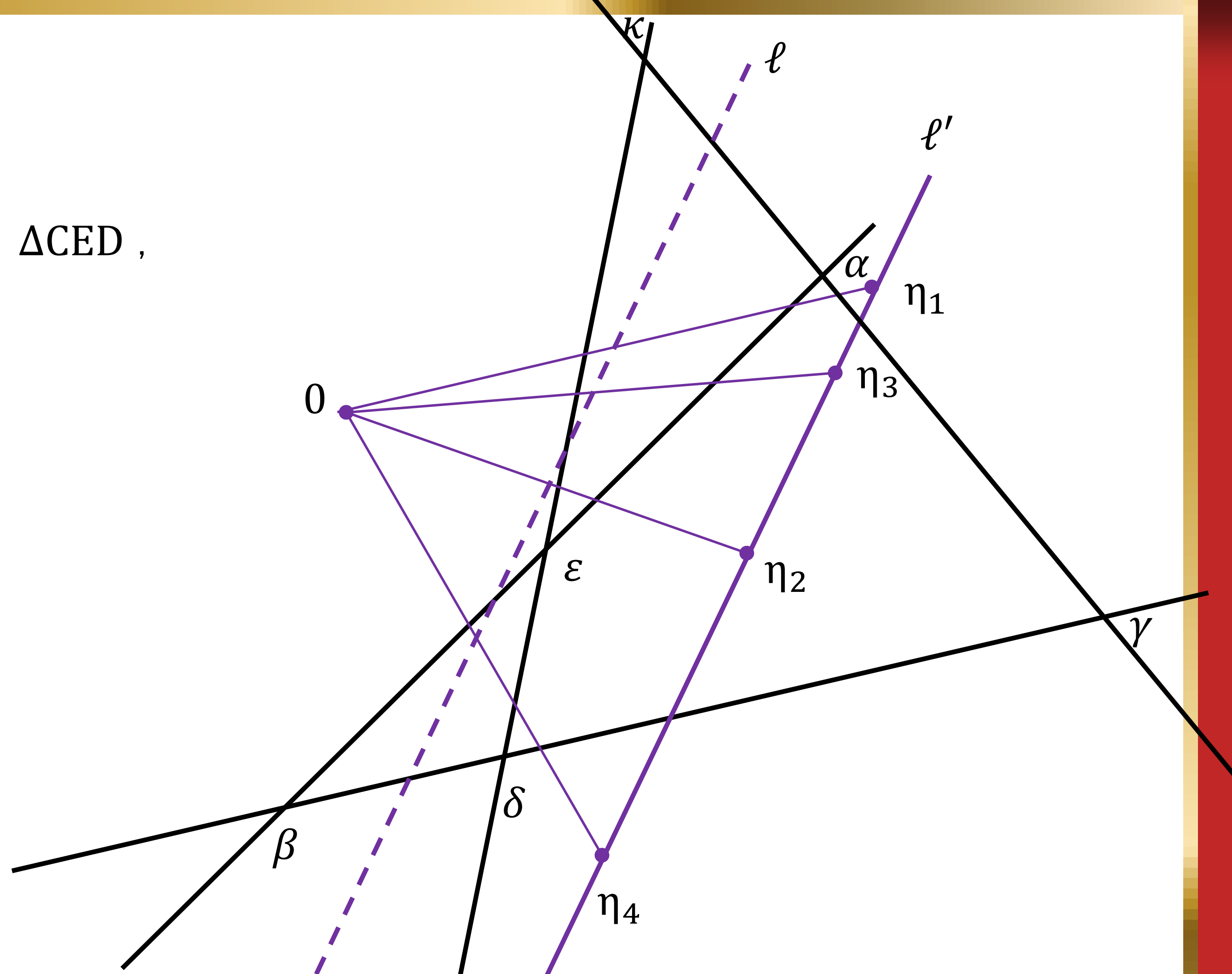
$A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$, $E(\varepsilon)$, $F(\kappa)$, $O(0)$,

垂心

ΔAFE， ΔABC， ΔBDF， ΔCED，
の４つの垂心,

$$\mathrm{H_{AFE}} = \mathrm{H_1}(\eta_1)$$
$$\mathrm{H_{CFD}} = \mathrm{H_2}(\eta_2)$$
$$\mathrm{H_{ABC}} = \mathrm{H_3}(\eta_3)$$
$$\mathrm{H_{BD\mathit{E}}} = \mathrm{H_4}(\eta_4)$$

はミケル点 O に関する
シムソン線 ℓ
に平行な
１直線 ℓ'
上にある

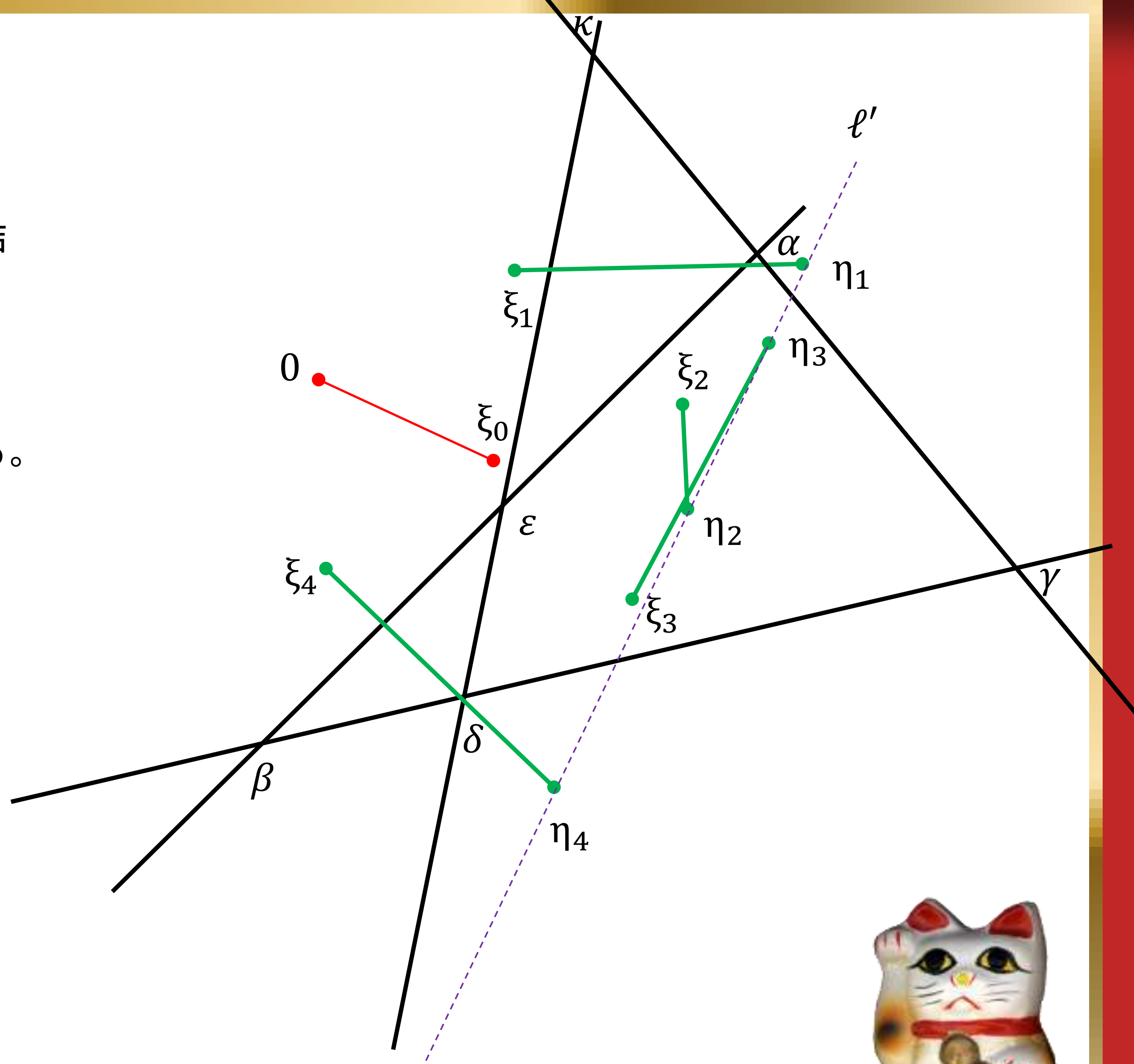


$$\xi_0\eta_1 = \xi_1(\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 2\xi_0)$$
$$\xi_0\eta_2 = \xi_2(\xi_1 + \xi_3 + \xi_4 - 2\xi_0)$$
$$\xi_0\eta_3 = \xi_3(\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 - 2\xi_0)$$
$$\xi_0\eta_4 = \xi_4(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 2\xi_0)$$

A(α)， B(β)， C(γ)， D(δ)， E(ε)， F(κ)， O(0)，

オイラー線

三角形の外心と垂心を結ぶ線分を
　　　オイラー線
という。
完全四辺形については，
４本のオイラー線がある。

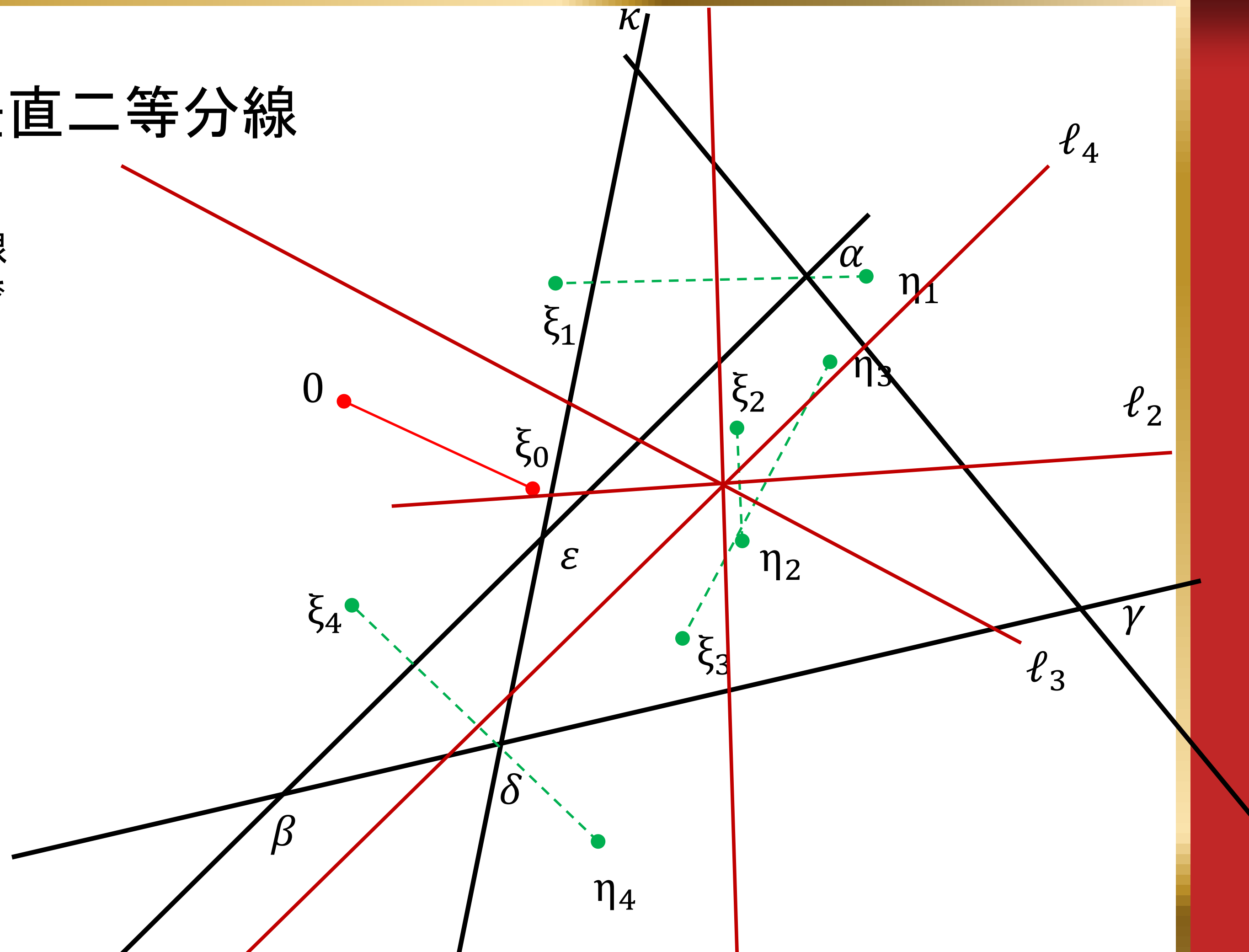


$X_0(\xi_0)$， $X_1(\xi_1)$， $X_2(\xi_2)$， $X_3(\xi_3)$， $X_4(\xi_4)$，
$A(\alpha)$， $B(\beta)$， $C(\gamma)$， $D(\delta)$， $E(\varepsilon)$， $F(\kappa)$， $O(0)$，

オイラー線の垂直二等分線

完全四辺形のオイラー線の垂直二等分線は１点で交わる。

これを完全四辺形の
ハーヴィ点
という。



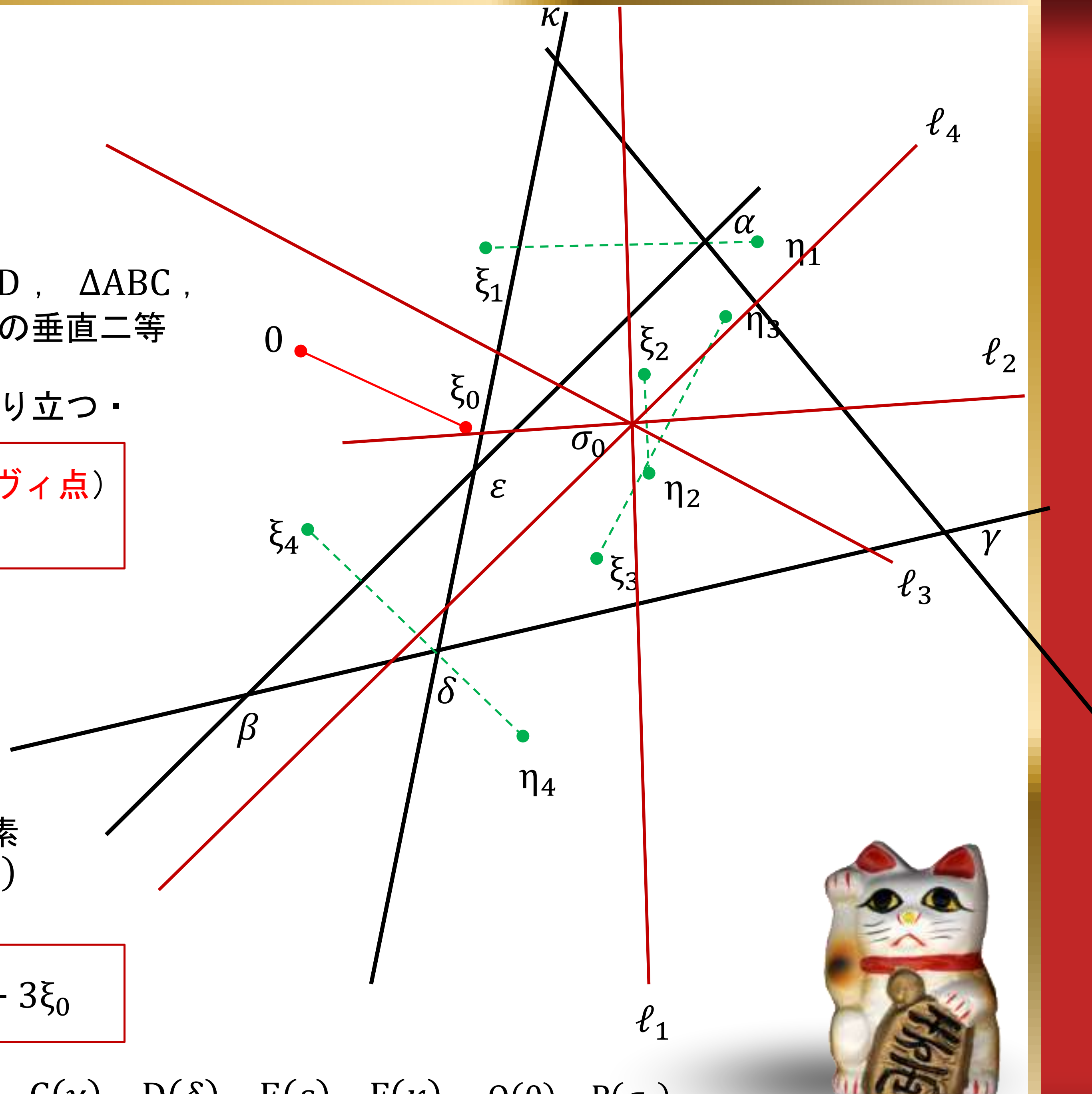
$$\xi_0\eta_1 = \xi_1(\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 2\xi_0)$$
$$\xi_0\eta_2 = \xi_2(\xi_1 + \xi_3 + \xi_4 - 2\xi_0)$$
$$\xi_0\eta_3 = \xi_3(\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 - 2\xi_0)$$
$$\xi_0\eta_4 = \xi_4(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 2\xi_0)$$

A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)，E(ε)，F(κ)，O(0)，

ハーヴィ点

完全四辺形において，
ΔAFE， ΔBDF， ΔCED， ΔABC，
のそれぞれのオイラー線の垂直二等分線を考える。
このとき，次のことが成り立つ・

この４直線は１点（ハーヴィ点）で交わる



ミケル点を原点とする複素平面でハーヴィ点を $\mathrm{P}(\sigma_0)$ とすれば

$$\sigma_0 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 3\xi_0$$

$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$，$\mathrm{D}(\delta)$，$\mathrm{E}(\varepsilon)$，$\mathrm{F}(\kappa)$， $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{P}(\sigma_0)$，

直線 ℓ_1 の方程式は

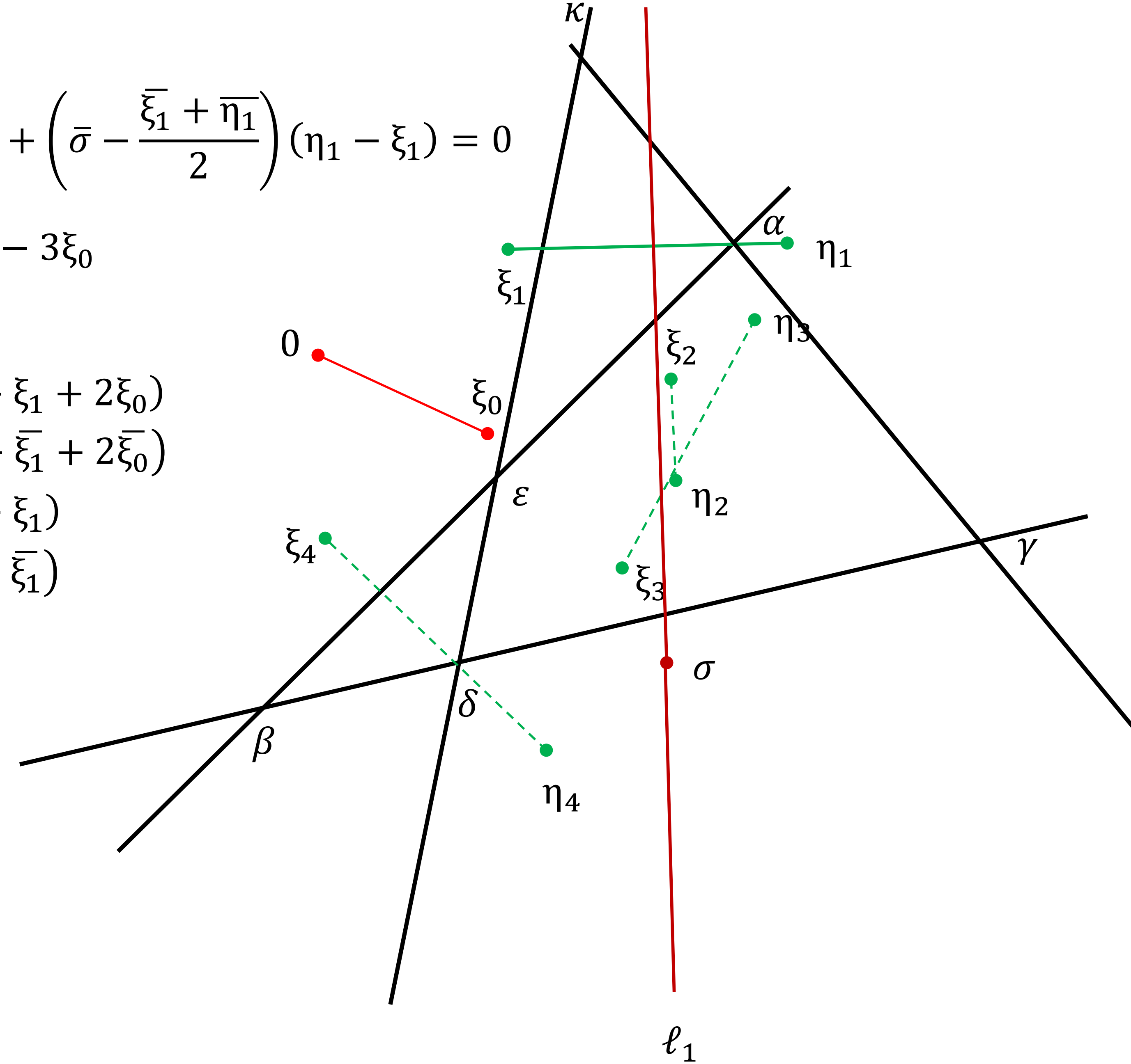
$$\left(\sigma-\frac{\xi_1+\eta_1}{2}\right)(\overline{\eta_1}-\overline{\xi_1})+\left(\bar{\sigma}-\frac{\overline{\xi_1}+\overline{\eta_1}}{2}\right)(\eta_1-\xi_1)=0$$

$$\sigma_0=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4-3\xi_0$$

と置き

$$\xi_0\eta_1+\xi_0\xi_1=\xi_1(\sigma_0-\xi_1+2\xi_0)$$
$$\overline{\xi_0}\overline{\eta_1}+\overline{\xi_0}\overline{\xi_1}=\overline{\xi_1}(\overline{\sigma_0}-\overline{\xi_1}+2\overline{\xi_0})$$
$$\xi_0\eta_1-\xi_0\xi_1=\xi_1(\sigma_0-\xi_1)$$
$$\overline{\xi_0}\overline{\eta_1}-\overline{\xi_0}\overline{\xi_1}=\overline{\xi_1}(\overline{\sigma_0}-\overline{\xi_1})$$

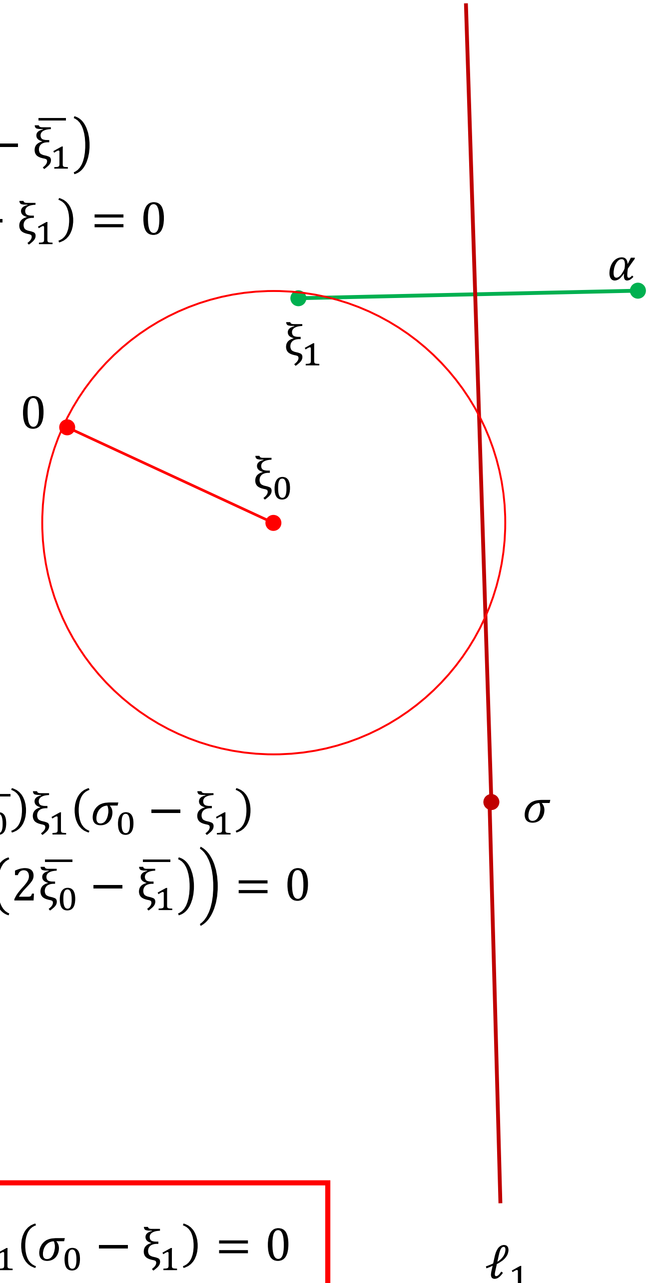
より，計算を続けると，



$$\xi_0\eta_1=\xi_1(\xi_2+\xi_3+\xi_4-2\xi_0)$$ A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)，E(ε)，F(κ)，O(0)，

直線 ℓ_1 の方程式は

$$\left(2\xi_0\sigma - \xi_1(\sigma_0 - \xi_1 + 2\xi_0)\right)\overline{\xi_1}\left(\overline{\sigma_0} - \overline{\xi_1}\right) + \left(2\overline{\xi_0}\bar{\sigma} - \overline{\xi_1}\left(\overline{\sigma_0} - \overline{\xi_1} + 2\overline{\xi_0}\right)\right)\xi_1(\sigma_0 - \xi_1) = 0$$



$$2\xi_0\sigma - \xi_1(\sigma_0 - \xi_1 + 2\xi_0) = 2\xi_0(\sigma - \sigma_0) + (2\xi_0 - \xi_1)(\sigma_0 - \xi_1)$$

$$2\overline{\xi_0}\bar{\sigma} - \overline{\xi_1}\left(\overline{\sigma_0} - \overline{\xi_1} + 2\overline{\xi_0}\right) = 2\overline{\xi_0}(\bar{\sigma} - \overline{\sigma_0}) + \left(2\overline{\xi_0} - \overline{\xi_1}\right)\left(\overline{\sigma_0} - \overline{\xi_1}\right)$$

と書き直すと

$$2\xi_0(\sigma - \sigma_0)\overline{\xi_1}\left(\overline{\sigma_0} - \overline{\xi_1}\right) + 2\overline{\xi_0}(\bar{\sigma} - \overline{\sigma_0})\xi_1(\sigma_0 - \xi_1) + (\sigma_0 - \xi_1)\left(\overline{\sigma_0} - \overline{\xi_1}\right)\left((2\xi_0 - \xi_1)\overline{\xi_1} + \xi_1\left(2\overline{\xi_0} - \overline{\xi_1}\right)\right) = 0$$

シュタイナー円を考えれば

$$(2\xi_0 - \xi_1)\overline{\xi_1} + \xi_1\left(2\overline{\xi_0} - \overline{\xi_1}\right) = 0$$

であるから，直線 ℓ_1 の方程式は

$$\boxed{\xi_0(\sigma - \sigma_0)\overline{\xi_1}\left(\overline{\sigma_0} - \overline{\xi_1}\right) + \overline{\xi_0}(\bar{\sigma} - \overline{\sigma_0})\xi_1(\sigma_0 - \xi_1) = 0}$$

$$\xi_0\eta_1 = \xi_1(\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 2\xi_0)$$

ハーヴィ点の複素座標

$$F_k(\sigma)$$
$$= \xi_0(\sigma - \sigma_0)\overline{\xi_k}(\overline{\sigma_0} - \overline{\xi_k})$$
$$+\overline{\xi_0}(\bar{\sigma} - \overline{\sigma_0})\xi_k(\sigma_0 - \xi_k)$$

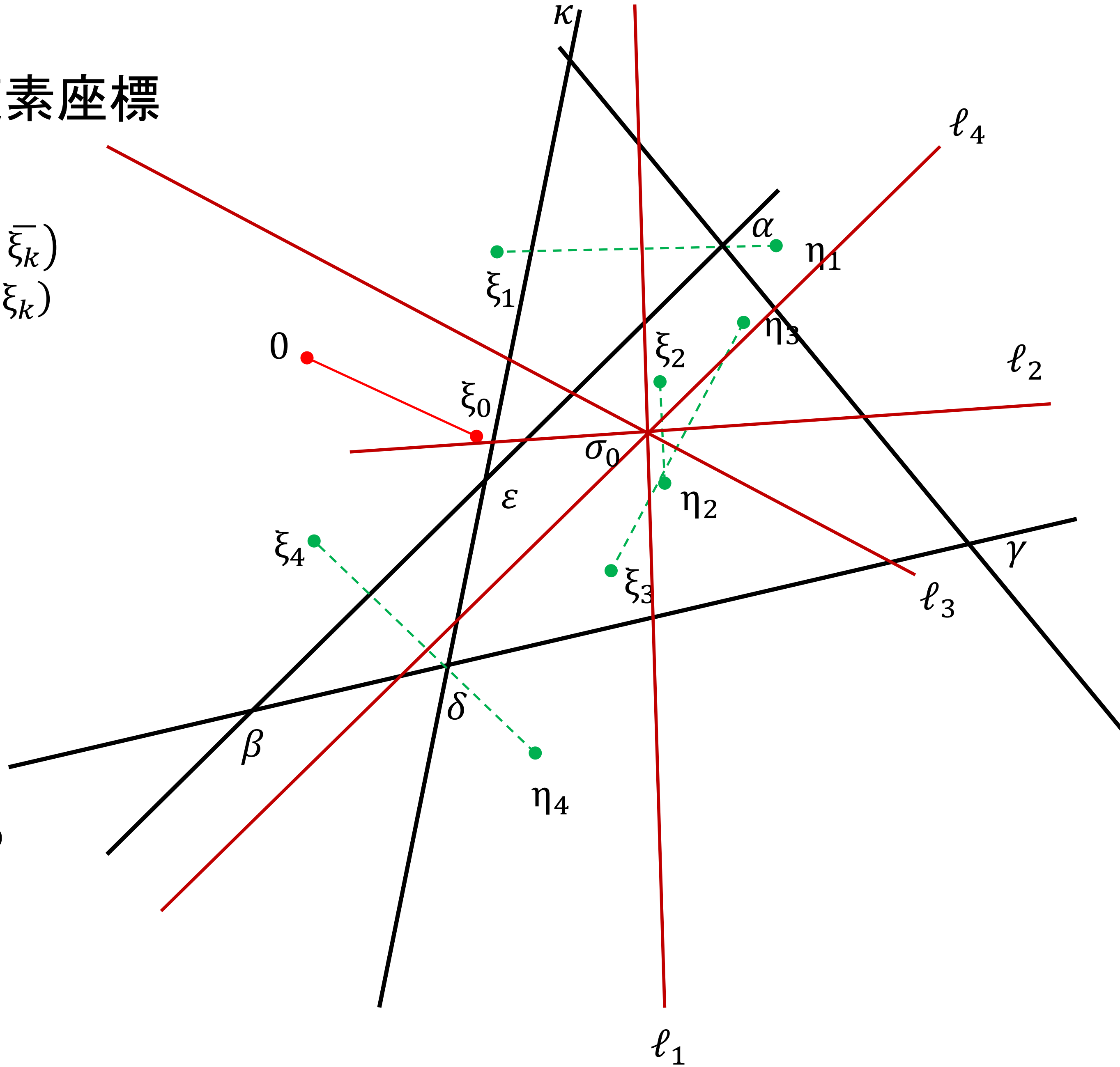
とすると，直線
ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3，ℓ_4，
の方程式は

$$F_1(\sigma) = 0$$
$$F_2(\sigma) = 0$$
$$F_3(\sigma) = 0$$
$$F_4(\sigma) = 0$$

共通根

$$\sigma = \sigma_0$$
$$= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 3\xi_0$$

がハーヴィ点を与える



A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)，E(ε)，F(κ)，O(0)，