

数学月間(SGK)だより

谷 克彦

2017年の「数学月間懇話会(第13回)」7月22日は土曜日にあたり、40人を越す参加者で盛況でした。真夏炎天の一日、参加された皆さまに感謝します。プログラムは以下のようでした:

1. 社会調査の実際, 森本栄一(ビデオリサーチ)
2. ブラックホールの形を見る, 池田思朗(統数研)
3. 星型正多面体の体積比較(模型も作るよ!), 小梁修(osa工房)

■社会調査の実際

RDD調査は、固定電話だけでなく携帯も対象にするようになり、抽出した約5,000件の候補にオペレータが電話し、個人有権者(会社は除外)の電話(2,000件ほど残ることが経験的に既知)を調査対象にします。その対象から回答を900件以上得るのが目標です。ビデオリサーチの視聴率調査は、PM(ピープルメータ)という機械を設置して行います。リアルタイムのデータが得られる反面、限られた固定観測点であります。

NHK, 各TVや新聞社, 通信社なども、それぞれ一定の方法でサンプル集合を採取し、そのサンプル集合に対し統計解析を行います。そのサンプル集合がランダム・サンプリングであるかは大いに疑問です。その検証は非常に難しいし、誤差の範囲もはっきりしない。さらに、統計学の問題に持ち込む以前に以下の問題がある。設問の、言い回し、聞き方、設問の順序、選択肢など、誘導尋問のように見えるものもあります。電話で文脈に誘導されずに、設問に答えられるでしょうか? 世論調査で実態を正しくとらえるのは非常に困難で、この分野は行き詰まっているようです。発表される数値が独り歩きし、これに誘導される弊害の方が大きいと私は思います。別の話題ではありますが、最近、ビッグデータを用いた予測実績が

不気味なほど上がっているようです。

■星型正多面体の体積比較

いろいろな星型正多面体の立体紙模型を示して、各部分の体積比などの説明がありました。星型正 p 角形は、正5角形の1つの頂点からスタートして1つ飛びの頂点を結び2回転すると閉じる図形ですから、 $p=5/2$ 角形になります。正 p 角形の面が、頂点で q 個集まって作る正多面体は、シュレーフリ記号で $\{p, q\}$ と記すので、4つある星型正多面体のうち、例えば、星型小12面体のシュレーフリ記号は、 $\{5/2, 5\}$ になります。この星型小12面体は、プラトン正多面体(正12面体)を芯にして、その正5角形面に正5角錐を貼りつけた形。外周にできた12個の頂点を結ぶと正20面体になります。星型正多面体は全部で、 $\{5/2, 5\}$, $\{5, 5/2\}$, $\{5/2, 3\}$, $\{3, 5/2\}$ の4つがありますが、これらについてその部分の体積比の興味深い関係の説明がありました。

■ブラックホールの形を見る

ブラックホールからは光も脱出できません。しかし、ブラックホールの穴に荷電粒子が引き込まれるときに電波やX線が放出されるので、ブラックホールの形は、この放出される電波を観測(地球上6地点の電波望遠鏡を結んで、電波干渉計を作り、電波強度と位相がわかる)して、それらのデータをFourier変換すると形が見えるはずですが、しかし、Fourier変換に用いる観測データは、地球が宇宙空間で旅した範囲の観測点の限られたデータしかありません。

ブラックホールの穴画像を x 、観測されたデータを y とすると、 $y = Ax$ で、行列 A が正則ならば、 $x = A^{-1}y$ と簡単に解くことができますが、 y の次元 N は非常に小さく、 x の次元 M は非常に大きい(行列 A は $N \times M$ 行列でランク落ち)ため解けません。多数(M 個)の未知数のある x を解くのに、式の数(N 個)が少ないので、不定解になります。解 x にたくさんの0要素(スパース)があるとしランクを下げれば、一意解を持ちます。なぜこのようなスパースな解が合理的なのかは難しいのですが、我々のまわりの画像は統計

的にスパースなようです。この方法は、LASSO (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) といいます。数学的には、 x がスパースであるという条件を、 $\sum |x_i|$ が最小という条件にして、最小2乗法 $\|y - Ax\|^2$ を解く、ラグランジュの未定乗数法が適用できます。

■圧縮センシング [筆者による関連技術の解説]

解のスパース性を利用するこの手法は、医学画像(MRI など)の撮影で利用でき、高解像度の画像を短時間で得られるようになりました。

画像の解像度を上げるには、観測空間でサンプリング・レートを上げ、それらを用いて Fourier 変換を行うのが、サンプリング定理の語る正攻法でしょう。しかし、画像の大部分の領域はだだら変わり、急峻な変化がある領域は少ない(画像のスパース性)。この性質を利用した画像圧縮(jpg)や圧縮センシングが成功しています。

●MRI(核磁気共鳴イメージング)とは

水素の原子核(プロトン)にはスピンがあり、磁石の性質があります(核磁気)。強い静磁場に置かれたプロトン核磁気は、磁場の方向に揃い歳差運動をしています。その周波数(ラーモア周波数)は、磁場が強いほど高く、MRI 装置の静磁場 1.5 T では、64 MHz(ラジオ電波の周波数)程度です。静磁場のプロトンに、このラーモア周波数の電波が照射されると吸収共鳴(核磁気共鳴)が起こり、歳差運動の振幅が増大し、核磁気は横倒しの状態で回転します。一方、歳差運動をしているプロトン核磁気からは同じ周波数の電波が放射されるので、これを検出することにします。

生体組織は、水や有機物(水素原子と結合した分子)ですから、プロトン核磁気は組織の至る所に分布し、組織の状態はそのプロトン核磁気の性質に反映されます。すなわち、核磁気の歳差運動の縦緩和、横緩和という現象に違いが出ます。

電波照射を止めると、励起されていた核磁気の歳差運動が定常状態に戻る(緩和)のですが、静磁場方向の核磁気成分の復元緩和を「縦緩和」、静磁場に垂直成分の減衰緩和を「横緩和」といいます。組織の各点で測定した緩和定数をマップに表示できれば、診断に役立つ組織マップができます。

●さて、画像の位置情報はどのようにして得るのでしょうか。このためには、静磁場の他に傾斜磁場を印加します。傾斜磁場(ペアのコイルに電流を ON/OFF し発生/停止ができる)は、数十 mT/m 程度の大きさです。静磁場方向を z とすると、 z 方向に強度が変化する z -傾斜磁場、 x 方向に強度変化する x -傾斜磁場、 y 方向に変化する y -傾斜磁場の3種類があります。

静磁場と同じ方向の z -傾斜磁場を印加すると、磁場一定の場所は z 軸に垂直な平面で、プロトン核磁気のラーモア周波数(磁場強度に比例)に共鳴する電波の周波数をスキャンすれば、各断層面ごとの電波を順次採取することができます。

各断層面上の (x, y) 位置情報を得るには、断層面のプロトンの歳差運動を励起後に、 y -傾斜磁場を短時間だけ印加し、続いて x -傾斜磁場の印加を行います。このようにすると、断層面の点 (x, y) からの電波は、 x -座標に沿って周波数が増減し(周波数エンコーディング)、 y -座標に沿っては位相変化(位相エンコーディング)のあるものになります。傾斜磁場を印加して、空間の位置情報を得、画像化を可能にしたのは、Lauterbur の Nature (1973) に載せた論文です。Lauterbur らは 2003 年のノーベル賞を受賞しました。

●緩和時間の測定には、傾斜磁場や電波を ON/OFF する複雑なパルスシーケンスが要ります。MRI 測定で聞こえる変な音は、強い磁力で装置が歪む音です。256×256 画像の測定でも正攻法ではかなりの時間を要しますので、パラレルイメージングなどの手法と共に「圧縮センシング」を用いて、短縮が期待できます。

■2017 年から、定例の「数学月間懇話会(7月22日)」の他に、「数学月間勉強会」をスタートしました。勉強会シリーズの第1弾は「結晶空間群で数学と物理を学ぼう(全4回)」です。第1回：周期的空間(6/28)。第2回：結晶点群(9/26)。第3回：結晶空間群(12/12)を実施し、第4回：性質の対称性は3月実施の予定です。案内は日本数学会や数学月間の会ウェブサイトに掲載しますのでご覧ください。

(たに・かつひこ / SGK 世話人)