数学月間(SGK)だより

谷 克彦

■米国の MAM (Maths Awareness Month) は毎年4月に実施されます．2014年の統一テーマは“Maths, Magic and Mystery”でした．このテーマは，今年がマーティン・ガードナーの生誕100年にあたるのを記念して決まりました．4月は毎日一つの面白い話題が MAM のホームページに発表されました．その中から3つだけ選び紹介します．

(1) 27枚のカード・トリック――27日に発表

27の枚カード・トリックは，マーティン・ガードナーが1956年に発表したものですが，それをマット・パーカーが発展させた新バージョンです．マット・パーカーは，英国のエジンバラ・フェスティバルで大人気のコメディ・ショーをもつ数学コミュニケータで，見ていて楽しいです．

→ http://www.standupmaths.com/

27枚のカードのトリックの演技は，以下のように進みます．

http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=l7lP9y7Bb5g

◆観客に任意のカード1枚(例えばスペードA)と，27以下の任意の数字(例えば18)を選ばせる．

◆演技者は，選んだカードが何であるかは知らない．選ばれたカードを含む27枚のカードは十分に混ぜられ，裏向きの束に積み上げられている．

◆演技の最後には，27枚のカード束の上から18番目の位置に，スペードAを移動して見せる．つまり，スペードA(演技者はこれが選ばれたことを知らない)の上に17枚のカードがあるようにしたい．

実は，この演技のプロセスに，3進法が利用されているのです．3進法で17を表すと

$$17 = 2\times3^0+2\times3^1+1\times3^2$$

で，221と表記されます(ここでは，1の位から先に表記しています．慣用の表記とは逆順なので注意のこと)．

演技者は，27枚のカードを3つの山に1枚ずつ配り分けて，選ばれたカードがどの山に入っているかを聞き，3つの山を，さりげなく重ね合わせます．再度同じ操作を繰り返し，結局全部でこの操作が3セット繰り返され，1つの束を作ります．すると，不思議なことに，求めるカードはこの束の上から18番目に置かれています．

このトリックのミソは，3つの山を重ねる順番にあります．重ねる機会は3回あるのだが，そのたびごとに，3つの山のどれを，できる束の

{上(Top = 0)，中(Middle = 1)，
下(Bottom = 2)}

のどこに置いて重ねたらよいのだろうか？

さりげなく手際がよいので見分けにくいが，ビデオをよく見て練習しましょう．ビデオの後半で，マットがその仕組みを説明します．

(2) 不思議な魔方陣――初日に発表

http://www.mathaware.org/mam/2014/calendar/magicsquares.html

イーサン・ブラウンは，マサチューセッツ，アンドーバーのフィリップス・アカデミィ・アンドーバーの高校生で，数学マジシャンです．

4×4魔方陣で，観客が任意に選んだ3マスに，観客が任意に選んだ数字(1～20)を置いてスタートです．さらに観客に，コラムの総和となる任意の数(30～80)を選ばせます．これらの条件下で4×4の魔方陣を作ります．まるで“ねずっち”の謎かけ問答のように直ちに作ります．図1のような魔方陣ができました．この例では，観客が選

10	2	8	59
64	3	1	11
-1	13	62	5
6	61	8	4

図1

A	B	C	D
$C-x$	$D+x$	$A-x$	$B+x$
$D+x$	$C+x$	$B-x$	$A-x$
B	$A-2x$	$D+2x$	C

図2

D	$B-3$	$A+2$	$C+1$
C	$A+3$	$B+2$	$D-5$
B	$D-3$	$C-2$	$A+5$
A	$C+3$	$D-2$	$B-1$

図3

んだマスの数字は11，2，5で，観客の提示した総和は79でした．確かに，魔方陣の縦/横/対角線/中心4マス/4隅の4マス/外周角の4マスなど，どの総和もすべて79になっています．図2，図3のようなラテン方陣の変形から作る方法も紹介されます．

（3）無限大の脅威——12日目に発表

発散する級数の奇妙な数学の話です．

$$S=1+2+3+4+\cdots\cdots=-\frac{1}{12}$$

自然数すべての総和が無限大でなく$-1/12$とは．正気の沙汰なのか？

このとんでもない結果は，1748年に偉大なオイラーにより導かれました．発散する数列は悪魔の発明であり，無限級数を用いると，どんな結論でも導くことができる．発散する級数の研究は，アーベル(1802-1829)に端を発し，数学者がこの悪魔の細部を解決するのに，リーマンの解析接続の理論(1859)までの続く100年を要しました．

今では，物理学［超弦理論，量子計算］や数学［ζゼータ関数］で利用されています．

リーマンは素数の分布を調べるために，ζ関数に解析接続をした関数の0点を研究し，リーマン予想を提示(1856)しましたが．これはまだ未解決の問題です．

……………………

オイラー-リーマンのζ関数は以下の無限級数の形で定義される．

$$\zeta(s)=1+2^{-s}+3^{-s}+4^{-s}+5^{-s}+\cdots\cdots$$

この関数は，実部が1より大きい複素平面Re$(s)>1$で収束するが，実部が1あるいは1より小さい複素平面Re$(s)\leqq 1$では発散する．そこで，全複素平面(ただし1は極)にζ関数の定義域を拡張するのに解析接続が役立つ．

$$S=\zeta(-1)=1+2+3+4+5+\cdots\cdots$$

$$S_1=1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots$$

$$=\begin{cases}1 & \text{奇数項までの和}\\ 0 & \text{偶数項までの和}\end{cases}$$

S_1の和は，偶数項までで止めれば0，奇数項までで止めれば1になる．しかし，解析接続という理論を使うと1/2になることを以下に示す．

$$f(x)=1+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots\cdots$$
$$=1/(1-x)$$

この多項式は公比xの等比級数だから，$|x|<1$なら収束し，$1/(1-x)$になる．

もとの多項式は$|x|<1$の外では発散し定義できないが，級数を解析接続した関数$1/(1-x)$に繋ぎ，形式的だが$x=-1$を入れると1/2が得られる．つまり，

$$S_1=f(-1)=1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots$$
$$=1/2$$

S_1, S_2などを等式と見立て加減演算をし，Sを求めてみよう．

$\infty+\infty$など無限大を数値のように演算しているのが気持ち悪いが，解析接続で収束した級数を用いているので実は正しい結果になる．

$S_2=1-2+3-4+5-6+\cdots\cdots$とすると，

$$2S_2=1-2+3-4+5-6+\cdots\cdots$$
$$+[1-2+3-4+5-6+\cdots\cdots]$$
$$=1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots=1/2$$

ゆえに，$S_2=1/4$が得られる．次に，

$$S-S_2=1+2+3+4+5+6+\cdots\cdots$$
$$-[1-2+3-4+5-6+\cdots\cdots]$$
$$=4(1+2+3+\cdots\cdots)=4S$$

ゆえに，$S=-S_2/3=-1/12$が導かれた．

●参考文献……………………

http://www.mathaware.org/mam/2014/calendar/infinity.html

大栗博司『超弦理論入門』講談社ブルーバックス

黒川信重『リーマン予想を解こう』技術評論社

■お知らせ

数学月間懇話会は，毎年，数学月間初日(7月22日)に日を決めて実施しています．

「数学月間SGK通信」という無料メール・マガジンの発行を5月から『まぐまぐ！』http://www.mag2.com/ で始めました．紙数の制限のため，ここでは割愛した他の話題もメルマガに掲載しています．ぜひご覧ください．

数学月間の会のウェブサイト

http://sgk2005.sakura.ne.jp/

も4月に開設しましたのでご訪問ください．

(たに・かつひこ／SGK世話人)