

数学月間(SGK)だより

高窪正明・谷 克彦

数学月間を日本数学協会が提唱して2015年で丸10年になりました。7月22日の数学月間懇話会(第11回)のテーマは、10年目の数学月間(片瀬豊), フランス数学週間(高窪正明), サッカーボールの対称性を解くトポロジカル・シンメトリー(細矢治夫), 繰り返し模様の観賞法(谷克彦), テーラー展開の話(鈴木啓一)でした。

今年も例年のように大変暑い日で、教室付近の構内には自動販売機はないし熱中症も心配されましたが、高校生5人を含む30人を超す参加があり熱心に質疑もなされました。参加者の過半数が懇親会にも参加されました。

ここで内容を簡単に紹介します。ただし、10年目の数学月間に関しては(前号『数学文化』24号)に掲載しましたのでそちらをご覧ください。

(1) フランス数学週間(高窪正明)

2012年から始まったフランスの数学啓発活動(数学週間 La semaine des Mathématiques)について、主にネットで得られた情報を中心に紹介がありました。数学週間は、国民教育省の企画の下、“現在の生き生きとした魅力ある数学の提示”“数学が日常生活で果たしている重要性の提示”などの5つの目的を掲げ、パートナーと呼ばれる20数団体が参加して、毎年3月中旬に行われます。加えて毎回1つのテーマが決められています。2012年の第1回から2015年の第4回まで順にテーマを記すと、“女子と数学”“惑星である地球”“さまざまな文化の交差点にある数学”, そして“数学は私たちを運ぶ”です。

この数学週間の特徴は、“数学カンガルー”テスト(後述)・暗算大会と国内数学オリンピック大会とが同時開催されている点です。前者2つは、遊び・身近なものを通じて数学への関心を高める目的。後者は、数学を専門として使う人材を養成する目的でしょう。

さて、数学カンガルーとは、1978年オーストラリアの数学教授が考案した多項目選択式数学(算数)学力テストを、フランスの2人の数学教授がさらに発展させたもの(1991年)で、現在は“国境なきカンガルー協会”が毎年3月の第3木曜日に実施し、EUを中心に世界50か国(600万人)以上が参加しています。テスト問題は学年・専攻別に12水準で用意され、代数、幾何、および論理の3分野から出題される24問/50分から成り、参加国各国語に翻訳されます。テスト結果は参加国それぞれで集計され、成績優秀者が表彰されます。フランスでは約4,000の学校・約3,000,000の中小高生が参加します。

これら3つの催しの他に、数学週間の期間中、その年のテーマに沿って多くの講演、多彩な見学会(実習付)、そして教育映画上映会が、フランス全土の30大学区(教育行政区)・パートナーによって執り行われます。特に、第1回以来Cédric Villani教授(2011年Fields賞)が活発な講演・啓発活動を行っていることも注目されます。

(2) サッカーボールの対称性を解くトポロジカル・シンメトリー(細矢治夫)

今回のゲスト講演者、細矢治夫氏は瑞宝中級章の春の叙勲を受けたばかりです。細矢・宮崎興二編『多角形百科』(丸善), および同氏の「七金三パズル」の展示もありました。

サッカーボール(正確には球面多面体だが)は正20面体(正3角形の面が頂点で5つ集まる)の頂点を切断して得られる“切頂20面体”で、12個の正5角形と20個の正6角形で構成されます。C60という分子はこの切頂20面体(頂点数60個)の頂点に炭素原子を配置した構造です。この多面体の対称性は正12面体と同じで、5回、3回、2回の回転軸、鏡映面、対称心があり、位数120の20面体点群です。C60の分子軌道は、分子を構成する炭素原子60個の π 電子の原子軌道 ϕ_k の1次結合 $\sum_{k=1}^{60} c_k \phi_k$ として表現されます。隣の原子軌道といえども各原子軌道は互いに直交

$$\int \phi_k^* \phi_{k+1} dv = 0$$

するが、隣接原子軌道に原子のハミルトニアン h を作用させたものの積分

$$\int \phi_k^* h \phi_{k+1} dv$$

はゼロでないと仮定するのがヒュッケル近似です。こうして得られる60個の連立1次方程式(基底 ϕ_k による60次元の行列表現に相当する)から永年方程式を作ると、固有値に関する60次の方程式になり、この永年方程式を因数分解して固有値(分子のエネルギー)が求まるわけです。これは60次元の行列を各固有値に属する固有空間(対角ブロック行列の型)に分解することと同じです。60個の原子軌道は互いに分子の点群に従い変換しあうので、固有空間に分解(簡約)したときに出現可能性のあるブロック(既約表現)は既知です。行列の簡約は、通常は既約表現の指標(指標とは行列のトレース)の直交関係を利用して、指標の計算だけで行うことができます。

トポロジカル・シンメトリーは多面体の面のつながりグラフに注目した対称性のことで、群のグラフに基づく簡約を行っても同様な結果が容易に得られ、計算収束も速いことが紹介されました。

(3) 繰り返し模様の観賞法(谷克彦)

周期的な空間の対称性は有限図形の対称性にくらべて、なじみのない人が多いようです。教科書では有限図形の話だけしか取り扱いません。しかし、周期的空間は「空間を均一にデジタル化する」——空間の正則分割(平面のタイル張り)——ということから生まれるもので、周期的なデジタル化された空間は“結晶空間”と呼ばれ重要です。結晶の内部構造しかり、デジタル画像、視細胞の配列等々、自然界のほとんどがデジタル空間といってもよいほどです。繰り返し模様の数学に親しみましょう。

数学らしくいうと、繰り返し模様と有限図形との関係は「並進群(格子)を核(法)として空間群は点群に準同型」ということになります。ここで、繰り返しの規則が「並進群」、繰り返し模様の規則が「空間群」、有限図形の規則が「点群」です。準同型という概念の心は、集合のもつ特徴を見つけるのに、集合の要素の持つある特徴を同じと見

なせれば(小異に目をつぶれば)、別の特徴が顕著に見えてくるということ。日常生活のいろいろな場面でこの考え方が使えます。「小異を捨てて大同一に就く」といいますが、「小異を同値と見なすなら、別の違いが見えてくる」、そして「別の違いがない場合は、大同一に就ける」ということでしょう。

このほかに、非ユークリッド平面のタイル張りに関しても言及しました。

(4) テーラー展開の話(鈴木啓一)

鈴木氏は当協会会員で、山形県から参加されました。SGKは全くのボランティア活動なので遠方からの参加はお誘いしにくいのですが、自腹での積極的なご参加に感謝いたします。こうしてSGKの活動が全国的に広がることを望みます。

テーラー級数展開は、数値計算でも活躍しています。また、狭い範囲で定義される関数を、複素平面で正則でない点を避けながら、テーラー展開で繋いでいき定義域を拡げる解析接続は、数学理論でも重要です。

実多項式の割り算の計算を、分子と分母の多項式の係数を並べて割り算する計算方法の紹介から始まり、 $1/(x+1)(x+3)$ のような極のある実関数の級数展開の係数を、循環小数の計算に似た係数の割り算で求めました。この割り算手法で $3 < |x|$ の領域でのローラン展開、 $|x| < 1$ の領域でのテーラー展開の係数を求めることができます。数値計算などの応用数学ではこのような手法が利用できるでしょう。

数学月間懇話会はただの講演会ではありません。双方向の意見交換の場であることを目指しています。数学月間の輪を広げるために、できるだけSGK会員の方の成果や情報交換ができるプログラムにしたいと考えております。今後とも皆様の積極的なご協力をお願いいたします。

(たかくぼ・まさあき/SGK)

(たに・かつひこ/SGK世話人)