● 不思議な数学…数学が好きになる題材例

図形に関するもの—❶

万華鏡の不思議

谷　　克　彦

1．万華鏡について

不思議の国のアリスならずとも，鏡を張り巡らした部屋に入るととても不思議な気持ちになります。国会議事堂にある鏡の間に立つと，自分が映っている像中に鏡も映っており，その鏡の中にこれを眺めている自分の姿があり…，これが次々に繰り込まれていきます。見ている自分と見られている自分。いったいどの自分が本物なのだろう？とても不思議な気持ちになります。あたかも自分が結晶世界に迷い込んだようです。また，スーパーの野菜売り場では，商品の後ろの壁が鏡なので商品が2倍あるように見えます。

万華鏡の始まりは，スコットランドの物理学者ブリュースター卿の特許“Kaleidoscope”（1816）といわれています。そして，この“万華鏡”は発明後数年のうちに日本にも伝わり作られています。我々は，規則正しい幾何学模様に心が安まります。さらに，このような美しい幾何学模様が千変万化し，映し出されるのが万華鏡です。ほんの瞬間に垣間見る映像に心を奪われるのは，花火の鑑賞と似たところがあります。

2．光の性質

光線は最短時間で到達できる光路に沿って進みます。一様でない媒質を進む光線では，この光路は屈折のため直線とはなりません。しかし，万華鏡内は空気で一様なので光路は直線，したがって，壁面の平面鏡で起こる“反射の法則”（図1）だけ知っていれば十分です。

図1

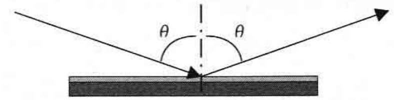
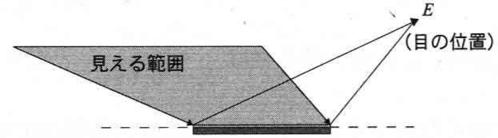


図2



目がE点にあるとき，有限幅の平面鏡で見ることのできる反射光線の範囲を図2に示します。これに加えて，万華鏡の視野地平線は反射を繰り返すことによる光の減衰が支配しています。E点が覗き孔，万華鏡の底＝“鏡張り室”に直接見える像が0次原像，1回の鏡映操作（r_1，あるいはr_2）を経て見える像が1次像，2回の連続した鏡映操作（r_1r_2，あるいはr_2r_1）を経て見える像が2次像，以下同様…と定義しましょう（図3）。n次像はn回の鏡映を経たものが見えるので，1回の反射率をr（$0<r<1$）とすれば，像の明るさはr^nになります。一方，各次数の像から放射される光を受け入れる角度幅は，0次の原像に対しては，$\Delta\theta_0=2\cdot\tan^{-1}(\frac{s}{2})$，ただし，$s=\frac{a}{L}$（$=\frac{1}{25}$程度の値，$a$：鏡張り室の幅，$L$：筒の長

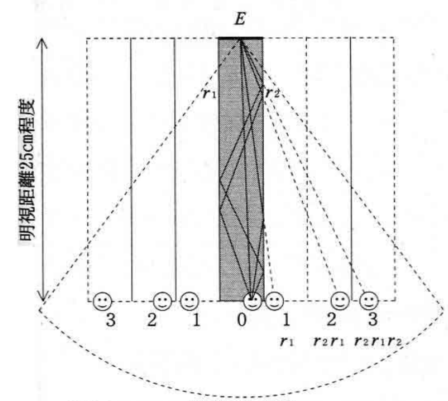


図3　視野60°程度

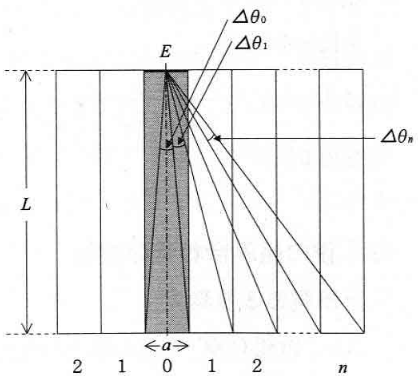


図3 a

さ)。n 次像に対しては，$\Delta\theta_n=\tan^{-1}\left[\dfrac{s}{1+s^2\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}\right]$となります[図３$a$，および注参照]。これは，$\dfrac{1}{25+0.04n^2}$ 程度の値の関数です。結局，n 次像の明るさは $\dfrac{r^n}{25+0.04n^2}$ となり，n の増加とともにどんどん暗くなります。これが，万華鏡の視野の地平線を決定する因子です。

鏡には裏表があり，鏡の裏側では反射は起こせないので，厳密にいえば鏡映の逆操作は存在しません。しかし，原像と鏡映像とが同時に見えているので，普通は，鏡映像を原像に戻す逆操作が常に存在するとして，壁紙模様などの対称性を説明しています。現実に，映像の重畳を起こそうとすると逆操作のないことを痛切に認識することになります。

[注] $s=\dfrac{a}{L}$

$\Delta\theta_0=2\cdot\tan^{-1}\left(\dfrac{s}{2}\right)$

$\tan(\Delta\theta_n)=\dfrac{\tan\theta_n-\tan\theta_{n-1}}{1+\tan\theta_n\cdot\tan\theta_{n-1}}$

この式に

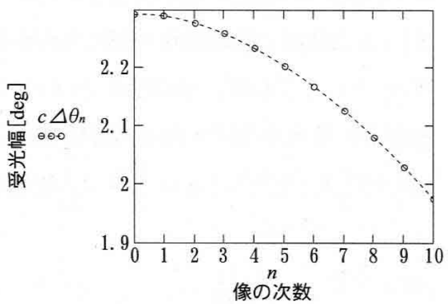
$\tan\theta_n=s\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$

$\tan\theta_{n-1}=s\left(n-\dfrac{1}{2}\right)$

を代入すれば

$\Delta\theta_n=\tan^{-1}\left[\dfrac{s}{1+s^2\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}\right]$

を得る。



3．鏡の組み合わせの設計

万華鏡の３要素：

A）“鏡張り室”（鏡の組み合わせ方）⇒本稿の主題

B）具＝０次原像（入れる物体，光源）

（課題）万華鏡の映像が，心を捉えるのは，映像が千変万化するためだ．次々と移り変わる映像を作るには，入れる物体（砂粒など）とその移動機構の工夫が必要だ．花火のように中心からパッと広がる映像，周囲から現れ中心に吸い込まれる映像などは，“鏡張り室”のどの頂点からどの方向に，砂粒を動かせばできるだろうか？

C）外観デザイン

鏡で反射されるたびに，新しい位置に像ができては，無限に新しい像を生み，メリハリのある模様とならないので，同じ位置に像が重なり合うような鏡の組み合わせを設計する必要があります。万華鏡の“鏡張り室”が並進を生む秘密は，鏡が部屋の壁を作っているところにあります。原点から a だけ離れた鏡は，原点での鏡映と２a の平行移動を組み合わせた効果となるからです。１点で交わる３枚の鏡では並進を生じることはありません。正多角形タイルには，平面を隙間なくタイル張りできるものとできないものがあります。

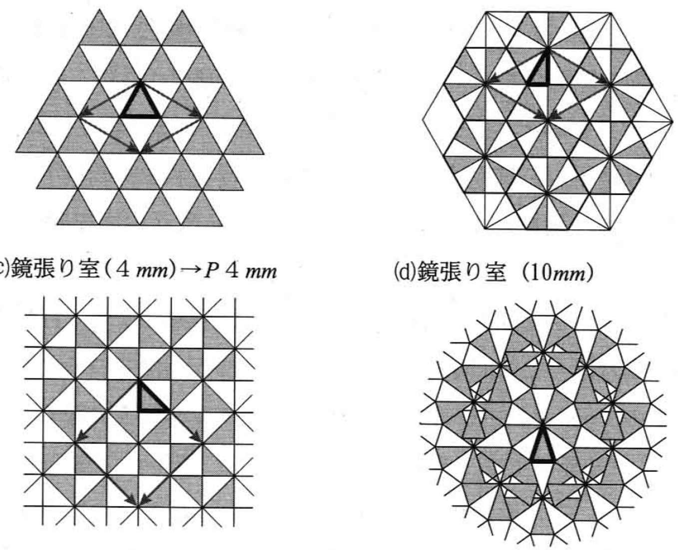
(1)　平面のタイル張りができるもの：並進（格子）が生じる

平面を隙間なくタイル張りできる正多角形タイルは，正３角形（３m），正方形（４mm），正６角形（６mm）であることがわかります。[注）括弧内はタイルの対称性を記述する点群記号で，最初の数字は，タイルの中心にある回転（対称）軸の次数，続く m はこの回転軸を含む鏡映面（mirror）を示します。回転軸が奇数次数の場合は，すべての m がこの回転軸で互いに変換されるので m はすべて同種類ですが，回転軸が偶数次数の場合は，この回転軸で互いに変換される m は２つのグループに分かれるので mm と記述します。] これらのタイルを３枚の鏡でできる“鏡張り室”（結晶学では“非対称領域”と呼ぶ）で作ったものを図４a－c に示します。これらには並進（単純格子 P）が生じています。

(2)　平面のタイル張りができないもの：並進（格子）は生じない

その他の正多角形タイルは，タイルが重なってしまい平面のタイル張

りができません。正５角形（５m）を考察しましょう。正５角形タイル（内角108°）は，３枚敷けるが$\frac{2}{3}$枚分の空白ができてしまう。３重のタイル張りを許す思考実験では，10枚で１点の周りが３重にタイル張りできます。この像がすべて重畳できるとペンローズ図形になるのですが，残念ながら，有限幅の鏡のため像の一部が折り返されたり，鏡の裏側は反射しないので内部への像の重畳は起こらなかったりで，不完全な映像になります。頂点が36°，72°，72°の２等辺３角形（10mm）の“鏡張り室”は，10回回転対称10mmの像を与えます。72°の周囲では異なる向きの３角形の重畳が生じ，少し乱れますが，具を36°の頂点から75°ではさまれた底辺へ向けた垂線に沿って流動させると，打ち上げ花火がパッと開くような奇麗な映像がえられます（図４d）。　（リコー中央研究所）



(a)鏡張り室（３m）→$P3m1$
(b)鏡張り室（６mm）→$P6mm$
(c)鏡張り室（４mm）→$P4mm$
(d)鏡張り室（10mm）

図４

太い線で囲んだ三角形が“鏡張り室”，矢印は生じる並進

結晶の幾何学

谷　克彦

１．数理結晶学発展史

(1)　18世紀までの結晶学

氷砂糖，ミョウバンの結晶，屋根付六角柱の水晶，…，整った美しい多面体の自形を見たことがあるでしょう。水晶のいろいろな面の大きさは，個体ごとに違うが，「対応する結晶面の間の角度を測ると，どの水晶でも同じ値だ」ということを発見したのはステノ（1669），この現象を，多くの鉱物結晶で調べ，「面角一定の法則」としたのは，デリスレ（1772）です。この法則は，「結晶の内部構造から生じている」と洞察したのがアウイ（1783）で，彼は「結晶には単位（胞）が存在し，この単位（胞）を繰り返し並べたブロック細工が結晶だ（図１）」と推論しました。

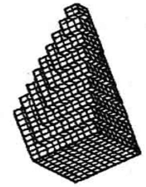


図１

(2)　19世紀の数理結晶学

―結晶世界はデジタル！有理数の世界！―

19世紀に入ると，結晶に座標軸（＝結晶軸）を導入し，結晶面に指数をつける方法が種々定義されました。それらの方法のうち，ミラー（1801～1880）によるミラー指数が，今日，最も広く用いられています。「その結晶に合った座標軸をとると，すべての結晶面のミラー指数は，簡単な整数で表せる。」＝結晶面の有理指数の法則。これは，アウイの述べた「結晶＝ブロック細工説」を裏付けることになります。この時期には，結晶面の方位（＝結晶内部の原点から，各結晶面へ垂線を立てて，結晶

を中心とする単位球表面に投影した点）を，２次元平面へ写像する種々の等角投影法も生まれています。

(3) 20世紀の結晶学の開花

20世紀の扉は，レントゲンによるＸ線の発見（1895）とともに開かれました（第１回ノーベル物理学賞受賞，1902）。発見されたばかりのＸ線が電磁波（波動）であるとすると，Ｘ線を結晶に透過させると，結晶の周期構造は３次元の回折格子として機能するので，回折パターンが観測できると考えたのがラウエ（1912）です（ノーベル物理学賞受賞，1914）。回折パターンを解析すれば，その原因である結晶中の原子／分子の配列構造［原子／分子の間隔は，オングストローム（10^{-10}m）オーダーなので，小さすぎて直接は見えません］を知ることができると考え実行したのが，ブラッグ親子（ノーベル物理学賞受賞，1915）で，岩塩やダイヤモンドを始め多くの鉱物の構造解析に成功しました。かくして，“Ｘ線構造解析”という大きな科学分野が生まれたのです。

(4) 再び19世紀の数理結晶学業績について —対称性の数学—

> （注）結晶・ガラス（アモルファス）・準結晶
>
> 結晶は単位胞が規則正しく繰り返す周期構造である。結晶は，ドロドロ融けたメルトがゆっくり冷えて，原子や分子が最も安定な位置に配列した時できる。一方，ガラスは，メルトが急速に冷えて固まった時にでき，最も安定な配列構造を作る前に固まった。この状態を，“結晶”に対して“アモルファス”と言う。近年，Al86－Mn14合金の急冷により，結晶でもなく［５回対称性があるので，並進性の存在と矛盾する］，アモルファスでもない物質が発見された（Shechtman, et al.,1984）。これは“準結晶”と呼ばれ，原子配列はペンローズのタイリングになっていることが解明された（Steinhardt, 1984）。

３次元の結晶点群は32種（ヘッセル，1830），３次元の空間格子（結晶格子）のタイプ＝ブラベ格子（1848）は14種が数え上げられ，続いて，３次元の空間群のタイプが230種であることが，フェドロフ，シェンフリーズ，バーロー（1885～1894）により，互いに独立に解決されました。これは，すべてＸ線の発見以前の純粋な数学的業績であることが興味深い。ちなみに，ペンローズ（パズルの特許，1974）の非周期タイリングも準結晶の発見（1984）以前の数学的業績でした。［(注) 下線付きの用語は，次の２章で説明します。］

2．結晶空間群とは何か

空間群を導く筋道を簡潔に示すために，以下はすべて２次元空間で説明します。「結晶世界は見渡す限り果てしのない周期的な世界！」ということを念頭においてください。２次元でのこのような周期構造（＝壁紙模様）の実例は，エッシャー（1944頃）の作品が参考になります。

(1) 格子

２次元空間では，互いに独立な２つの基本並進ベクトル$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$がとれ，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$の整数係数の１次結合をすべて集めた$T=\{h\cdot\boldsymbol{a}_1+k\cdot\boldsymbol{a}_2 \mid h, k$ は整数$\}$ が，この平面の格子点です。集合Tは無限集合になりますが，群の条件を満たしており，Tを並進群と呼びます（格子と呼ぶこともあります）。ブラベ格子とは，格子の対称性を，結晶点群の対称性を基準にタイプ分類したものです。

(2) 点群 —有限図形の対称性—

１点の周りの対称操作を考察してみましょう。まず，回転対称軸には，２，３，４，５，６，…，∞回（回転対称）軸［何もしないのは，１回軸］のすべてがあり得ます。n回軸C_nとは，360°／nだけの時計回りの回転操作で，$C_n{}^n=360°=0°\ (\mathrm{mod}\,360°)$，これは恒等操作１です。回転操作$C_n$からは，

回転群［位数 n の巡回群］$C_n=\{C_n,\ C_n^2,\ \cdots,\ C_n^n=1\}$ が生成されます。その他の２次元点群で見られる対称操作には，鏡映 m ［対称心 $\overline{1}$ は，２次元空間では２回軸と同じ］があります：$m=\{m,\ m^2=1\}$

⑶　結晶点群　―格子と両立できる点群―

結晶では，点群の回転対称性と並進群（格子）の対称性とが両立しなければいけません。２，３，４，６回軸は，それぞれに両立できる格子がありますが，５回軸の場合はどうでしょう。１つの５回軸が支配する局所的な作用域として正５角形タイルを描きます。複数の５回軸が配列している状態を考えると，各５回軸は自分の周りの局所的な作用域（正５角形タイル）内のみで有効というわけではなく，全域でも有効でなければならず，各５回軸およびそれらの局所的な作用域は，互いに他の５回軸により変換し合い，全体として不変となるべきです。これは，２次元平面を正５角形で隙間なくタイル張りすることになりますが，正５角形タイルは重なり合いが起こり，これは不可能です。したがって，５回軸と両立する格子はあり得ません。７回以上の回転対称軸に関しても同様で，結局，格子と両立できる（＝結晶で許される）回転対称軸は，２，３，４，６回軸に限られることになります［ただし，２次元，３次元空間での話］。

⑷　空間群の作り方（２次元の場合）

２次元空間では，10種の結晶点群 G：１，m，$2=\overline{1}$，２mm，３，３m，４，４mm，６，６mm，および，５つのブラベ格子 T（図２）：*clino*－*P*（三斜単純格子），*ortho*－*P*（直交単純格子），*ortho*－*C*（直交Ｃ面心格子），*tetra*－*P*（正方単純格子），*hexa*－*P*（六方単純格子）が数え上げられます。

結晶のように周期的な空間での対称操作が作る群が空間群で，空間群 Φ の要素は，結晶点群 G の要素と並進群 T の要素との積（結合）です。表１に２次元の空間群17種の成り立ちを示します。結晶は，１つの“モチーフ”（＝単位胞の中身）を格子点にばら撒いたものです。もし，「格子点距離だけ移動したものは同価（mod T）」との見方をすれば，無限に繰り返す分布を，単位胞内の“モチーフ”に還元できます。さらに，この見方を進めると，“モチーフ”の対称性を記述する結晶点群 G 自体も，格子を法として［＝(mod T) で］閉じればよく，群 G（mod T）に拡張できるので，群 G（mod T）と格子 T との積でできる空間群もあります。このようなタイプの空間群には，映進面（鏡映＋鏡面に平行に格子距離／２の並進），n 回螺旋軸（360°／n の回転＋軸方向に格子距離／n の並進。ただし，螺旋軸が現れるのは３次元以上の空間）などの操作があります。空間群の例として，$Pmm2$，$Pmg2$，$Pgg2$ を図３に示します［(注) 頭の P は格子を表し，続く $mm2$ などが結晶点群の対称要素で，x，y，z 座標軸の順に標します］。後者２つは，映進面 g が現れる空間群の例です。

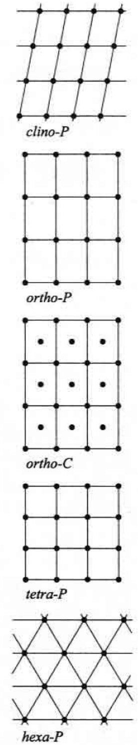


図２
２次元ブラベ格子

（表1） $\Phi=T\otimes G$［並進群と結晶点群の積によりつくられる空間群］

結晶点群 G ＼ 並進群 T	1	m	2	2 mm	3	3 m	4	4 mm	6	6 mm
Clino－*P*	$P1$		$P2$							
Ortho－*P*	Pm Pg			$Pmm2$ $Pmg2$ $Pgg2$						
Ortho－*C*		Cm		$Cmm2$						
Tetra－*P*							$P4$	$P4mm$ $P4gm$		
Hexa－*P*					$P3$	$P3m1$ $P31m$			$P6$	$P6mm$

(注) $Pmg2$ などの網掛けは，拡張された点群 G(mod T) を用いて作った空間群。

紙数が尽きましたが，空間対称操作と同時に色置換を行う演算が作る“色群”，高次元空間の群，局所対称操作による群概念の拡張などの興味ある領域も発展中です。

（リコー中央研究所）

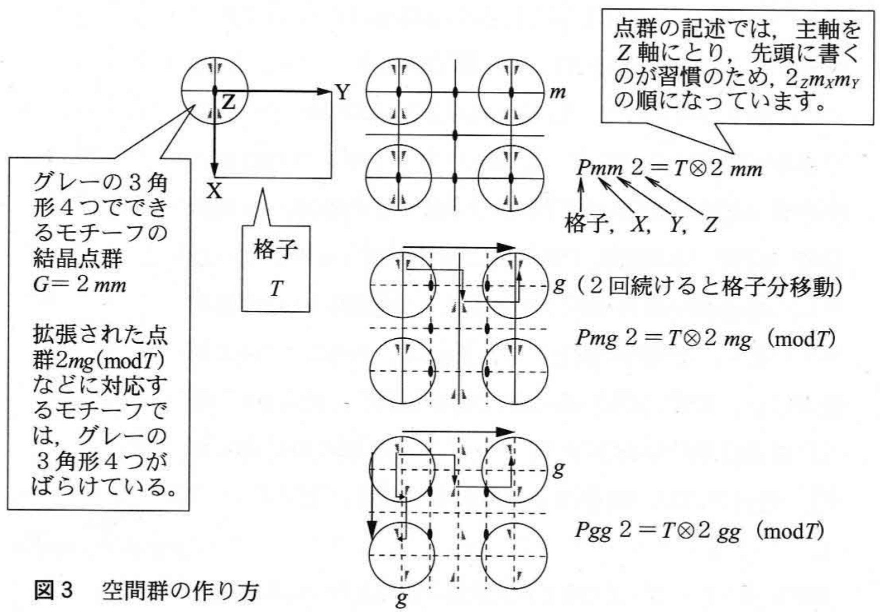
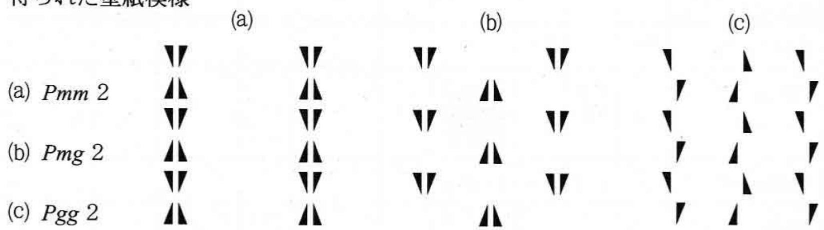


図３　空間群の作り方

得られた壁紙模様



ベクトルの定義をめぐって

真鍋　和弘

●ベクトルとは何か？

ベクトル（vector）という単語には，方向量［数学］，進路［航空］，保菌生物［生物］などいろいろな意味があるが，数学におけるベクトルとは何か？と問われても簡単に説明することは難しい。かつて高校の数学教師たちの宴会の席で「ベクトルとはベクトル空間の元である」と主張する派と，「ベクトルとは矢印で表されるものである」と主張する派との間で大論争になったこともある。

入試問題の影響もあってか，ベクトルに対する高校生たちの評判はあまりよくない。ベクトルは方程式や関数にくらべてはるかに簡単で面白いと思うのだが，それが彼らに十分伝わらないのは教科書の扱いにも問題があると思う。高校ではベクトルの題材が幾何学に限定されてしまっている。後でも述べるが，ベクトルの最大の利点は，足したり，引いたり，何倍したりという小学校以来の基礎演算が自由にできることである。幾何学の問題ばかりでは，これが得意でない生徒たちはすっかりベクトルが嫌いになってしまうだろう。

物理学や工学，経済学などベクトルが活躍する場面は非常に多い。とくに物理では，ベクトルの概念なしに力学や電磁気学を理解することはほとんど不可能に近い。しかし注意も必要である。速度や力，電場や磁場といった物理量はベクトル的な性質をもっているが，純粋なベクトルともどこか違っている。これはベクトルに限らず，現実的な量（具象）と数学的な実数（抽象）との間でも起こっていることである。量として

教育科学 数学教育

もくじ

2003.11（No. 552）

特集／続・不思議な数学

●不思議な数学…数学が好きになる題材例●

連載

● 次号予告・特集「方程式のよさをどう学ばせるか」

表紙イラスト＝小野孝一