

万華鏡の実験

谷 克彦

1. はじめに

鏡を張り巡らした部屋に入るととても不思議な気持ちになります。自分が映っている像中に鏡も映っており、その鏡の中にこれを眺めている自分の姿があり……、これが次々に繰り返されていきます(写真1)。見ている自分と見られている自分。いったいどの自分が本物なのだろう? とても不思議な気持ちです。あたかも自分が結晶世界に迷い込んだようでもあります。また、スーパーの野菜売り場では、商品の後ろの壁が鏡なので商品が2倍あるように見えます。

万華鏡の始まりは、スコットランドの物理学者 Brewster 卿の特許“カレイドスコープ”(1816)といわれています。そして、この万華鏡は発明後2~3年のうちに日本にも伝わり作られています。我々は、規則正しい幾何学模様を見ていると心が安まります。さらに、このような美しい幾何学模様が千変万化し、映し出されるのが万華鏡です。ほんの瞬間に垣間見る映像に心を奪われるのは、花火の鑑賞と似たところがあります。

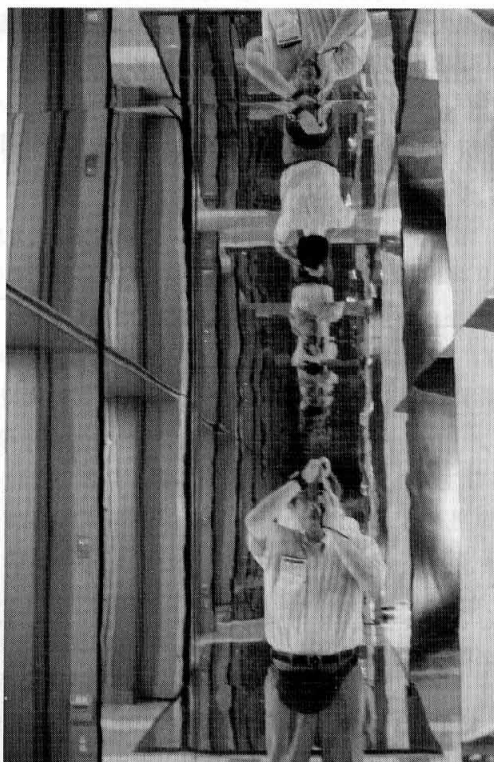


写真1 国際万華鏡展(2003)にて

2. 万華鏡の視野(地平線)

光は最短時間で到達できる光路に沿って進みます(Fermatの原理)。媒質の屈折率が高い所では、光の伝播速度は遅くなる。もし、円周に近づくにつれ屈折率がどんどん増加するような円形の世界なら、光はなかなか円周に到達できません。このような円形の世界の最短時間光路は双曲線になります。しかし、万華鏡内の媒質は空気で一様。最短時間光路は直線です。したがって、万華鏡では壁面の平面鏡で起こる“反射の法則”(図1)だけ知っていれば十分です。

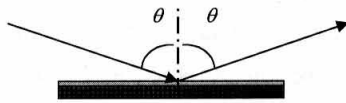


図1 反射の法則

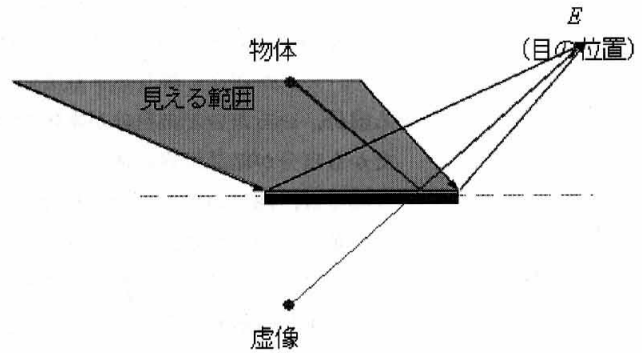


図2 鏡映操作の作用領域

目が E 点にあるとき、有限幅の平面鏡で見ることのできる反射光線の範囲を図2に示します。これに加えて、万華鏡の視野(地平線)は、反射を繰り返すことによる光の減衰に支配されます。 E 点を覗き孔としましょう。万華鏡の底(=“鏡張り室”)に直接見える像が0次原像、1回の鏡映操作(r_+ 、あるいは r_-)を経て見える像が1次像、2回の連続した鏡映操作(r_-r_+ 、あるいは r_+r_- ; 右側に書いた操作から先に実行)を経て見える像が2次像、以下同様……と定義しましょう(図3a)。 n 次像は n 回の鏡映を経たものが見えるので、1回の反射率を r (0

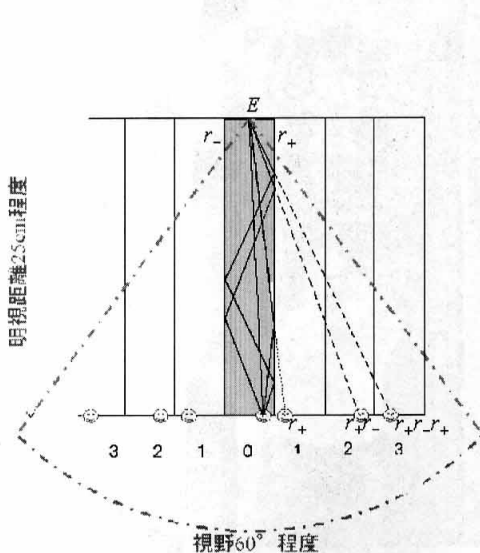


図3a 万華鏡で高次の反射像が見える原理

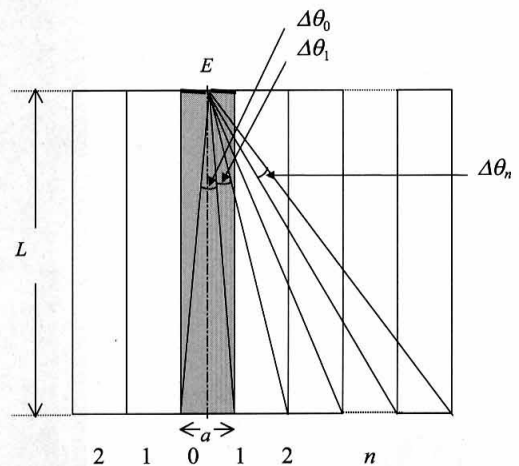


図3b 万華鏡の高次の反射像の明るさ

$< r < 1$) とすれば、像の明るさは r^n になります。一方、各次数の像から放射される光を受け入れる角度幅は、0 次の原像に対しては、 $\Delta\theta = 2 \cdot \tan^{-1}(s/2)$ 、ただし、 $s = a/L$ ($= 1/25$ 程度の値、 a : “鏡張り室” の幅、 L : 筒の長さ)。 n 次像に対しては、 $\Delta\theta_n = \tan^{-1} \left[\frac{s}{1+s^2(n^2-1/4)} \right]$ となります(図 3b および注 1 参照)。これは、 $\frac{1}{25+0.04n^2}$ 程度の値です。結局、 n 次像の明るさは $\frac{r^n}{25+0.04n^2}$ 程度となり、反射率が悪いと n の増加とともにどんどん暗くなります。これが、万華鏡の視野の地平線を決定する因子です。

なお、本節は拙文 [1] の一部を加筆して利用しました。

3. 万華鏡の設計

物体 (= 原像) から発した光は、時間とともに一方向に進み鏡映像(虚像)を作ります(図 2)。光を逆戻しするような、鏡映の逆操作は物理的に起こり得えません。しかし、原像と鏡映像とが同時に見えているので、鏡映像を原像に戻す逆操作も存在すると見做すことは許容でき、さらに、鏡の作用領域の制限を無視すると、すべての鏡映操作が結合的となるので、鏡映操作の組み合わせは群を生成し、この群は、映像の対称性を示すと思われます。これらの群は、点群や壁紙模様の空間群に含まれます [2]。

しかし、現実には鏡映の逆操作はない(虚像から実像ができたりしない)し、結合的でない鏡映操作もあるので、必ずしも群を生成するわけではありません。言い換えれば、万華鏡では映像の重畳は起こせません。非整合の周期で像の重畳が起きるような “Penrose” 万華鏡を作ろうとして、私自身、このことを切実に認識しました [3]。万華鏡概念の拡大を目指すには、これは残念な結果ではありません。像の重畳ができれば、高次元空間のイメージ像が見えるかも知れないものを！ この発見を、万華鏡の定理と名付け、以下で述べようと思います。

3.1 実験して見よう(注 2)

2 枚の鏡(注 3) を $360/n$ の角度で交差させます。(1) $n = 2p$ 偶数、(2) $n = 2p+1$ 奇数、(3) $n = r/q$ 有理数、(4) $n =$ 無理数、のそれぞれの場合で、2 枚の鏡映操作から生成される群の性質には相違があります。(1) 以外の場合には、ずれた映像の重畳が起こりますが、(2)~(4) では、それぞれ重畳のずれ方が異なり、面白い効果が期待できそうです。

(1) $n = 2p$ 偶数の場合：鏡の交差軸に C_p 回転軸が生じる。重畳によるずれはないので、原像には新たな鏡映対称性は生じない。生成される点群は、 $C_{2p}mm$ (p が偶数のとき)、または、 $C_{2p}m$ (p が奇数のとき) (注 4)。

(2) $n = 2p+1$ 奇数の場合：鏡の交差軸に C_{2p+1} 回転軸が生じる。位置をずらして(「交差鏡」の中間にも鏡が生じる)重畳が起こるので、原像には鏡映対称性が生じる。生成される点群は、 $C_{2p+1}m$ 。

(3) $n = r/p$ 有理数の場合：例えば、 $n = 10/3$ とすると、 360° を $p = 3$ 重に回って、延べ $r = 10$ 個の交差鏡頂角(この場合は正五角形の頂角 108°)で、平

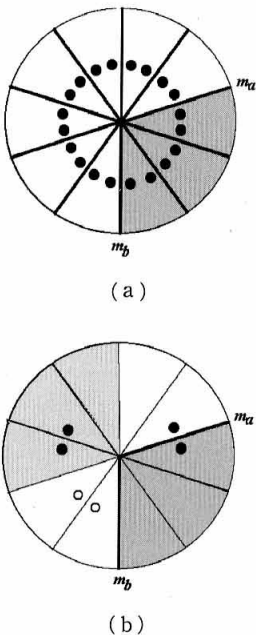


図 4 (a) m_a と m_b が群を生成する場合の対称性 (b) 万華鏡で実現できる対称性

面を充填する。これを平面に投影して見れば、回転対称が上昇して見える。生成される点群 $C_{10}mm$ (図4 a)。

(4) n が無理数の場合：周期性がないためずれが永久に重ならず、塗りつぶされた一様像。生成される点群 $C_{\infty}mm$ 。

以上の思考実験は本当に正しいのでしょうか？

実験して見るとこれが大違い。万華鏡では、像の重畳が禁止されてしまい、(1) の場合には一周した図形がきれいにつながりますが、(2)～(4) では、いずれも交差鏡の裏側半分的位置で、図形の繰り返し模様が合わなくなり、調和が乱れることが観察されます。これは、図2で説明したように、鏡の守備範囲(作用領域)から外れてしまうと像を見ることができないことと、鏡の裏側から来た光は反射できないことに原因があります。このような局所的(守備範囲が限定される)鏡映操作間では、互いに結合的な鏡映操作が限定され、鏡映操作全体が群をなさないからです。図4bに、正五角形の頂角 108° で交差する鏡の系が生じる現実の映像を示します。白丸の像を作るには、鏡 m_a の裏側からの反射が必要となり、この像は生じることがありません。

演習問題 $n = 3$ のときも同様な状況になることを、各自確かめてください。

3.2 高次反射像の見える仕組みと万華鏡の定理

図5に示す例は、2枚の鏡 m_a と m_b が、交差角 45° で“鏡張り室”を作っている例です。“鏡張り室”にある物体 A_0 が原像。 $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4$, $[m_a : \rightarrow, m_b : \rightarrow]$ の順に、高次の反射像が形成されていきます。目の位置を E とし、像 A_4 を見るとすれば、 E と A_4 を結んだ線分が鏡を過ぎる点が、像 A_4 の反射点になります。図5の場合は、鏡 m_b 上に像 A_4 の反射点ができます。物体 A_0 から生じる像 A_4 を見る光路を図5の鏡張り室の内に実線で示しました。

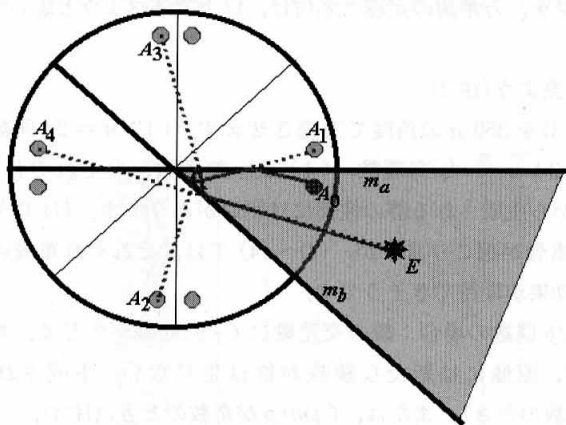


図5 高次の反射像の見える仕組み

万華鏡の定理 映像の重畳は生じないし、空白も生じない。生じた映像全体は平面を一重に被覆している。

証明 “鏡張り室”は凸多角形(図6の例では、三角形)で、視点 E は“鏡張り

室”の内部にあるとする。映像(n 次の虚像) A_n が見えたとする、 A_n と視点 E を結べば、必ずどれか1つの鏡(m_a とする)を過ぎるはずである。この点が像 A_n の反射点、虚像 A_n のもととなる原像 A_{n-1} は、鏡 m_a に関する A_n の対称点としてただ1つ必ず決まる。また、 A_n として、任意の点を選べるから、生じた映像に空白は生じない。

次に、像 A_n が移り行く先を見よう。これは、“鏡張り室”を構成している m_a 以外の鏡(ただし、像 A_n がその鏡の前にある)による反射で行われる。鏡 m_b, m_c で、像 A_n を反射させ像 A_{n+1}^b, A_{n+1}^c を作図する。各像と視点 E を結んだとき、反射点がそれぞれの鏡の上であれば、それぞれの像は観察できる。特殊な場合として、反射点が2枚の鏡の交点である場合には、反射像は見えないが、反射点がどちらかの鏡の上に乗った瞬間から、反射点に乗った鏡で反射した像が見えるようになる。

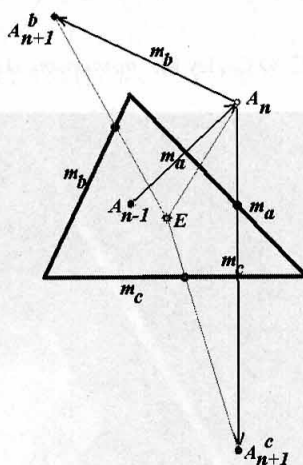


図6 結合が許される鏡映操作

図7 a, b は、“鏡張り室”を上から見た像平面上への投影図で、高次の像は視点 E からの距離が大きくなります。つまり、低次数の反射像と、高次数の反射像の反射点が投影図では同一点であったとしても、立体的に言うと、鏡の筒の高さ方向の成分が異なっています(高次数の反射点の方が筒の目に近い方にある)。

結局、万華鏡の定理の心は、次のようなものです：筒状の鏡の各点(=反射点)を、覗き口と結び、映像の生じる2次元平面上へ写像する。この写像は1:1 ontoです。

像 A_n の反射点は1つだから、 A_n にきたった像は1つだけ A_{n-1} 、像 A_n から移り行く先の像は、 A_{n+1}^b, A_{n+1}^c など複数。そして、最後に移動ができない領域に像 A_m ができて終わります。これらを結ぶ鏡映操作の結合関係(図8)の一部を、Cayley 図 [4] にしてみます(図7 a, b は正三角形の“鏡張り室”の例です)。作製した万華鏡の映像(写真2)と見比べてください。

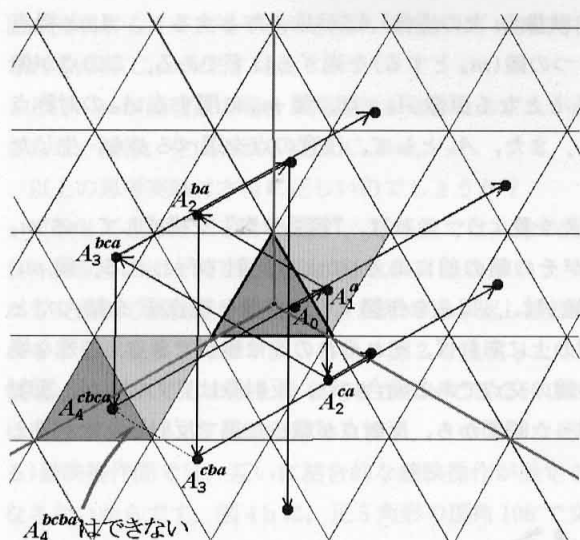


図7a 三角“鏡張り室”のCayley図. $m_c m_b m_c m_a$ は並進となる.

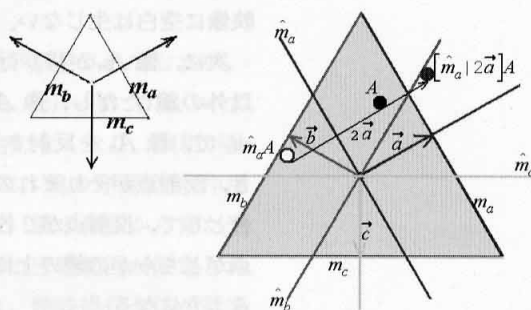


図7b 原点から a 離れた鏡映 m_a は、原点での鏡映 \hat{m}_a と $2\vec{a}$ の並進になる.

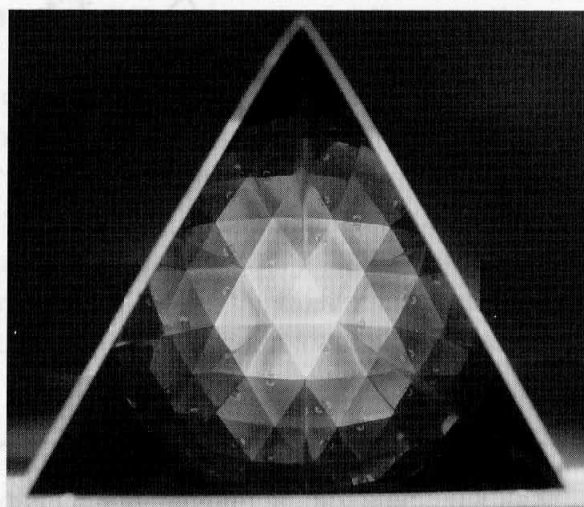


写真2 球面三角“鏡張り室”の万華鏡像

4. “鏡張り室”が、映像の並進を生む秘密

万華鏡で生じる映像は、平面を隙間なく埋め尽くしていますが、この埋め尽くしに、空間周期 (= 並進)が生じる場合があります。このような平面のタイル張りが起こる原因を考察しましょう。万華鏡が、並進を生む秘密は、鏡が“鏡張り室”の壁を作っている所にあります。原点から a だけ離れた鏡は、原点での鏡映と $2\vec{a}$ の平行移動を組み合わせた効果となるからです(図7b, (注5))。

交差する2つの鏡で、繰り返し反射されると、2枚の鏡の結合が許される限り(鏡の交差角 $360/n$ で、 $n = 2p$ 偶数の場合)、回転軸を交差軸とする回転 C_p を生みます。

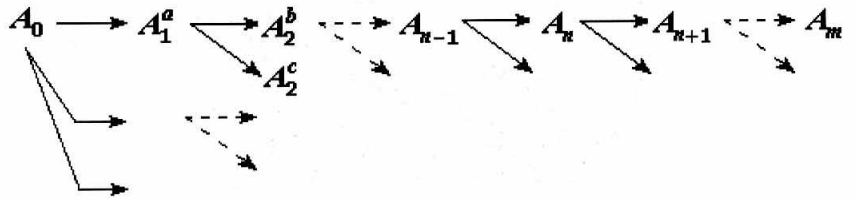


図8 万華鏡の鏡映操作の結合関係

4.1 平面のタイル張りができるもの：並進(格子)が生じる

平面を隙間なくタイル張りできる正多角形タイルは、正三角形(3m)、正方形(4mm)、正六角形(6mm)であることが知られています。括弧内は、タイルの対称性を記述する点群記号(注4)。これらのタイル張りを、3枚の鏡でできる“鏡張り室”(結晶学では“非対称領域”と呼ぶ)で作ったものを(図9 a-c)に示します。これらには並進(単純格子 P)が生じていますが、10mm(図9 d)には並進はありません。例えば、図7 a の Cayley グラフを見て、鏡映の結合 $m_c m_b m_c m_a$ (右側の対称操作から先に実施： $A_i^{bc a} = m_c m_b m_c m_a A_i$)は、 $-6\vec{a}$ の並進になることがわかります(注5)。

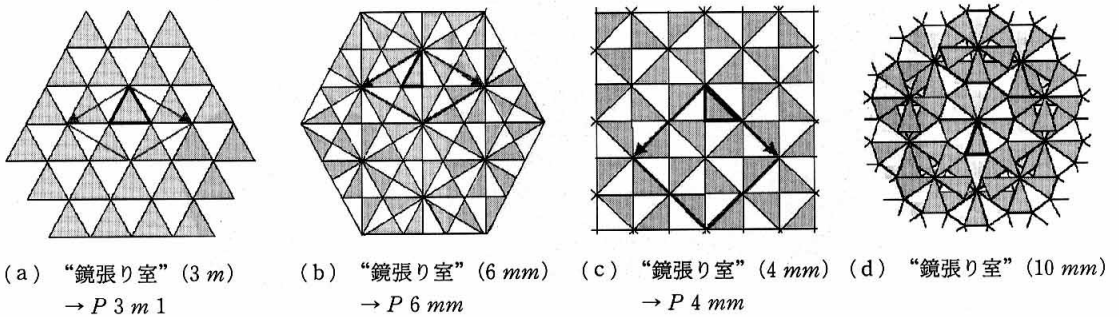


図9 太い線で囲んだ三角形が“鏡張り室”，矢印は生じる並進。
a-c では、並進(単純格子 P)が生じている。

4.2 “Penrose” 万華鏡の試み

写真3 a, b は、映像に重畳を起こさせる試みとして、作製した“Penrose”万華鏡 [5] です。写真3 a は、正五角形の“鏡張り室”による万華鏡像です。この正五角形の“鏡張り室”内部の対角線にハーフミラーを挿入したのも製作しました。写真3 b は、対角線の2箇所だけにハーフミラーを挿入したものです。分割のできる3個(2種類)の“鏡張り室”の像を同時に見て、擬似的な重畳映像を強引に起こさせるのがねらいです。

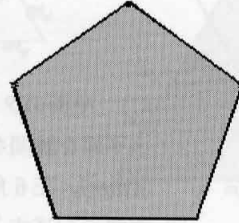
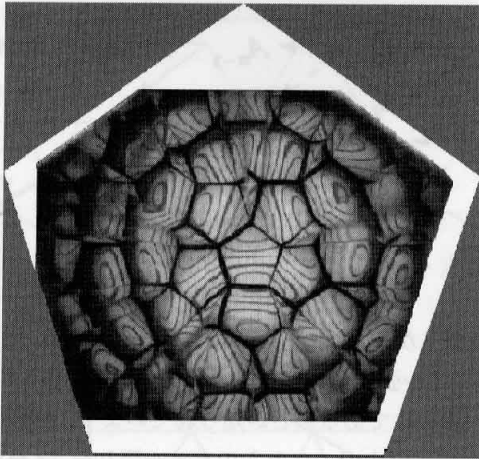


写真 3a Penrose 万華鏡(正五角形の“鏡張り室”による)

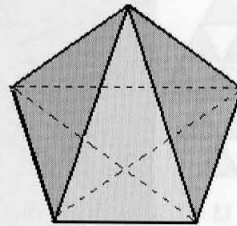
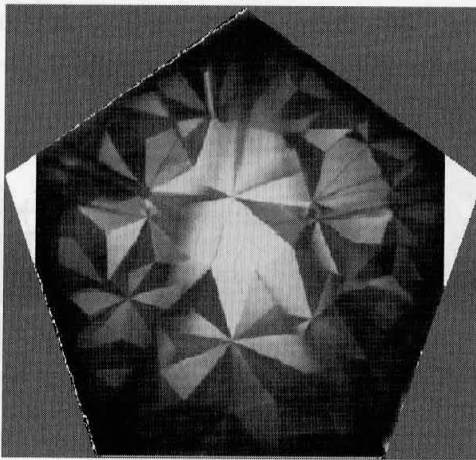


写真 3b Penrose 万華鏡(3分割された正五角形の“鏡張り室”による)

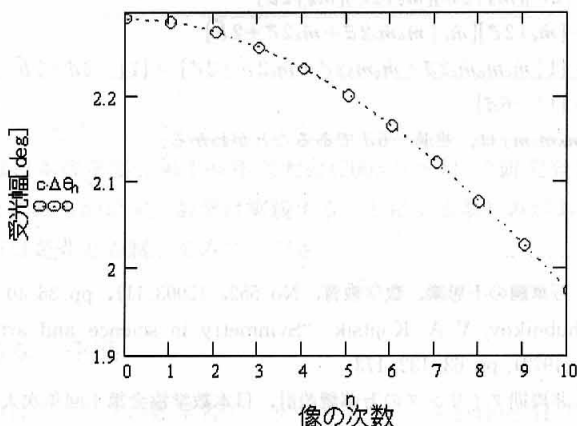
5. 結論

万華鏡で生じる映像は，“鏡張り室”の壁鏡が生成元となり生じる群の対称性を持つわけではない。そもそも，“鏡張り室”の壁鏡の演算に，結合法則が常に保証されるわけではない。限定された作用領域をもつ対称操作(壁鏡の場合は鏡映操作)同士が，結合可能となる場合には，その作用領域は局所的に制限される。壁鏡を生成元とする代数系は，一般には，亜群構造となり，その詳細研究は興味深い。結局，鏡のなす角 $360/n$ で， n が偶数以外のときは，群が生成されない。作製・実験してみることは，思わぬ発見につながることを認識しました。

万華鏡の定理 万華鏡の映像では，映像の重ね合わせは起こせない。また，映像の空白も起こらない。

●注……………

1)



$$s = a/L (= 1/25 \text{ 程度})$$

$$\Delta\theta_0 = 2 \cdot \tan^{-1}(s/2)$$

$$\tan(\Delta\theta_n) = \frac{\tan \theta_n - \tan \theta_{n-1}}{1 + \tan \theta_n \cdot \tan \theta_{n-1}}$$

この式に

$$\tan \theta_n = s(n+1/2)$$

$$\tan \theta_{n-1} = s(n-1/2)$$

を代入すれば

$$\Delta\theta_n = \tan^{-1} \left[\frac{s}{1 + s^2(n^2 - 1/4)} \right]$$

を得る。

2) 万華鏡製作の3要素

A) “鏡張り室”の構造(鏡の組み合わせ方)⇒本稿の主題：幾何，空間群論の活躍場。

B) 具(物体，光源，移動機構)⇒物理，化学知識を総動員しての創意工夫。

C) 外觀デザイン⇒芸術・工芸の腕の見せ所。

[例：B)に関して] 万華鏡の映像が，心をとらえるのは，映像が千変万化するためだ。次々と移り変わる映像を作るには，入れる物体(砂粒など)とその移動機構のくふうが必要だ。花火のように中心からパッと広がる映像，周囲から現れ中心に吸い込まれる映像などは，“鏡張り室”のどの頂点からどの方向に，砂粒を動かせばできるだろうか？

オイル中に粉を入れゆったり移動させる機構なども効果がある。

3) 定規(幅3cm×長さ30cm)程度の大きさの鏡を2枚用意しよう。ガラスを切るのは難しいが，1mm厚程度のポリカーボネートやアクリル板なら，ナイフやアクリルカッターで容易に切ることができます。通常鏡は透明な基板の後ろに反射膜があるため，像が2重になるので，できれば万華鏡では表面鏡が望ましい。表面を研磨したアルミやステンレスなどの金属板は表面鏡になります。材料，組み立て方に関しては，[6]が詳しい。[7]では，並進の生じる(“鏡張り室”=正三角形)ものと，並進はないが平面を埋める10回対称(“鏡張り室”=2等辺三角形)のものを作製した。

4) C_pmm や $C_p m$ は，点群記号 [国際記号では，単に pmm や pm などと表記]。 p 回回転軸 C_p は，鏡映面(mirror) m の交線に生じる。 p が偶数のときは，回転軸 C_p により，互いに変換される鏡映操作は，2種類の組(共役類が2つ)に分かれる。このため mm と表記する。 p が奇数のときは，回転軸 C_p により，すべての鏡映操作が互いに変換しあう(1つの共役類に入る)。そこで m と表記する。

5) Seitz 演算子 $[\sigma | v]$ は, $[\sigma | v]r = \sigma r + v$ のように作用する [8]. 原点から a 離れた位置にある鏡 m_a は, Seitz 演算子で表記すると, $[\tilde{m}_a | 2a]$ である.

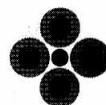
$$\begin{aligned} & [\tilde{m}_c | 2c][\tilde{m}_b | 2b][\tilde{m}_c | 2c][\tilde{m}_a | 2a] \\ &= [\tilde{m}_c | 2c][\tilde{m}_c | \tilde{m}_b \tilde{m}_c 2a + \tilde{m}_b 2c + 2b] \\ &= [1 | \tilde{m}_c \tilde{m}_b \tilde{m}_c 2a + \tilde{m}_c \tilde{m}_b 2c + \tilde{m}_c 2b + 2c] = [1 | -2a + 2b - 2a + 2c] \\ &= [1 | -6a] \end{aligned}$$

かくして, $m_c m_b m_c m_a$ は, 並進 $-6a$ であることがわかる.

●文献.....

- [1] 谷克彦：万華鏡の不思議，数学教育，No. 552，(2003.11)，pp. 36-40
- [2] A. V. Shubnikov, V. A. Koptsik：“Symmetry in science and art” in Russian, Nauka, (1972), pp. 63, 132, 173
- [3] 谷克彦：非周期タイリングの万華鏡設計，日本数学協会第1回年次大会，(2003.8)，pp. 74-77
- [4] I. Grossman, W. Magnus, 浅野啓三訳：群とグラフ，河出書房，(1970)，pp. 39-74, Translation of Groups and their graphs, Random House, (1964)
- [5] 谷克彦：ペンローズ万華鏡，日本万華鏡大賞エントリー作品，(2003.11)
- [6] 三好泰弘さんのホームページ，<http://www.hey.ne.jp/~kaleido/index.htm>
- [7] 埼玉大学ジュニアサイエンス，(2003.8)，後援(日本数学協会，埼玉県，さいたま市)
- [8] C. J. Bradley, A. P. Cracknell：“The mathematical theory of symmetry in solids”，Oxford, (1972)，pp. 45

(たに・かつひこ／(株)リコー・中央研究所)



数 学 文 化

003

特集＝形で遊ぼう

算木で3次方程式を解く

西森敏之

佐々木遊方の『立体書法』——六面体と矩形による統一

戸村 浩

日本数学協会＝編集

