

数学の周辺の話 → 数学への共感喚起

-----第4回数学月間懇話会(2008.07.22) 谷 克彦-----

結晶空間群の拡張 空間歪群, 高次元空間

繰り返し(周期)のある世界. 準結晶格子.

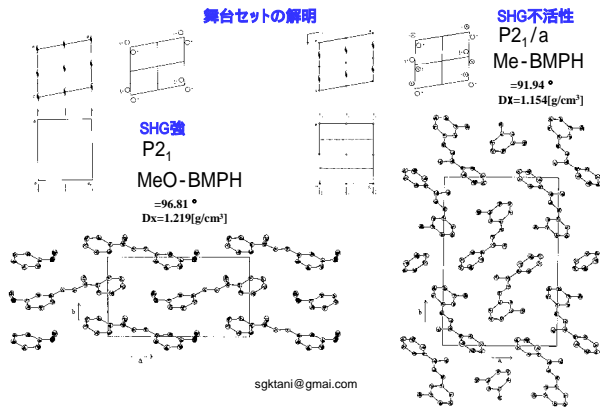
逆問題 データ解析, RMCシミュレーション

双対空間 Fourier変換

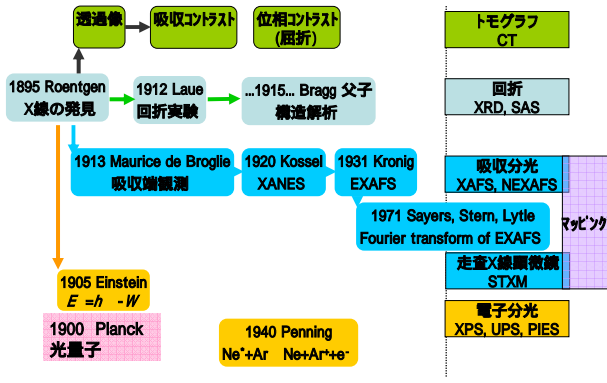
最速降下曲線 最小作用の原理
抽象化は数学の醍醐味

sgktani@gmail.com

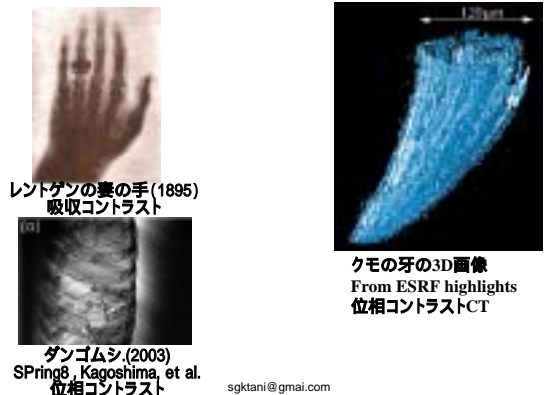
デバイスは、材料という“舞台”での、電子や光のパフォーマンスを利用する
Two packing modes of MeO-BMPH and Me-BMPH



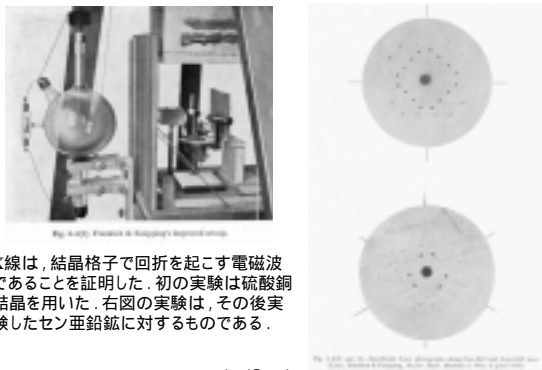
X線が関与する主要な評価技術



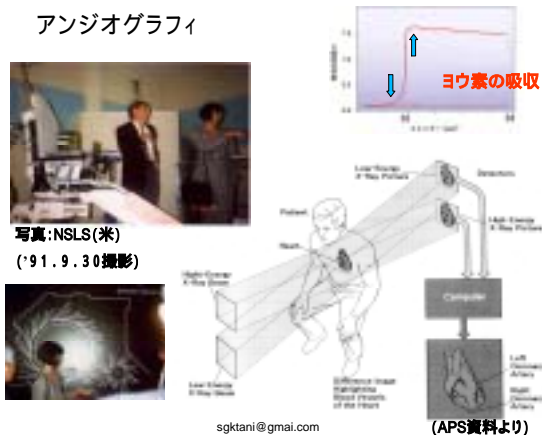
X線による透過像



Laueの実験

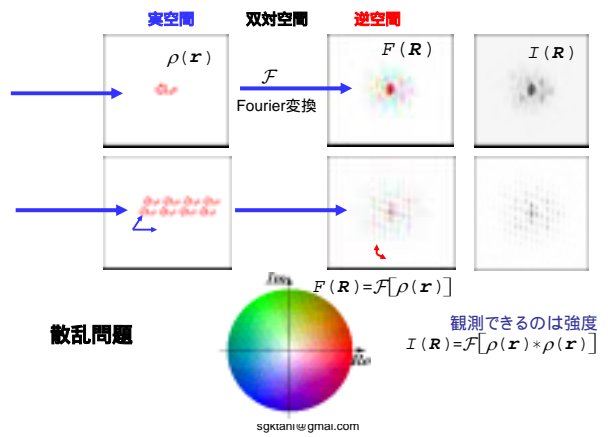
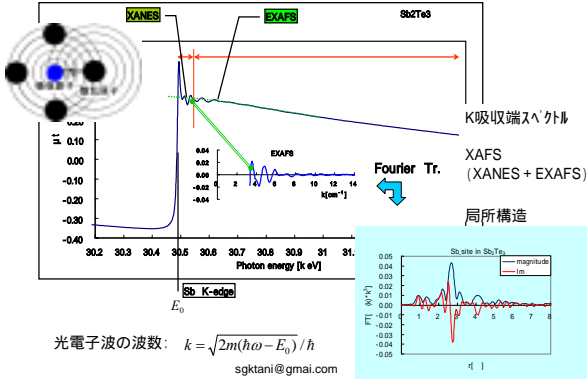


アンジオグラフィ

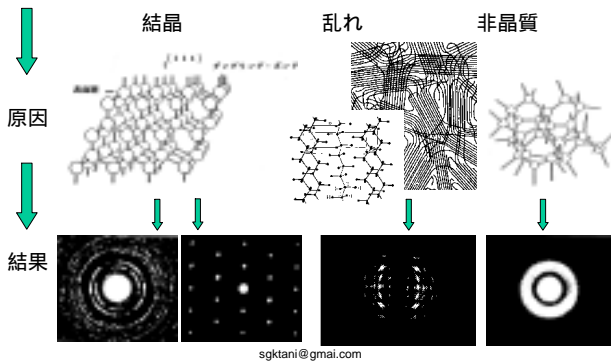


(APS資料より)

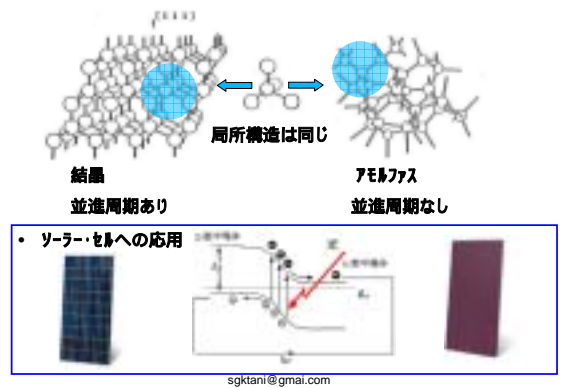
$$\chi(k) = \text{Im} \sum_b -\frac{1}{kR_{ab}^2} f_b(k, \tau) \exp\{i(2kR_{ab} + 2\delta_a(k))\} \exp\left\{-\frac{2R_{ab}}{\lambda(k)}\right\} \exp(-2\sigma^2 k^2)$$



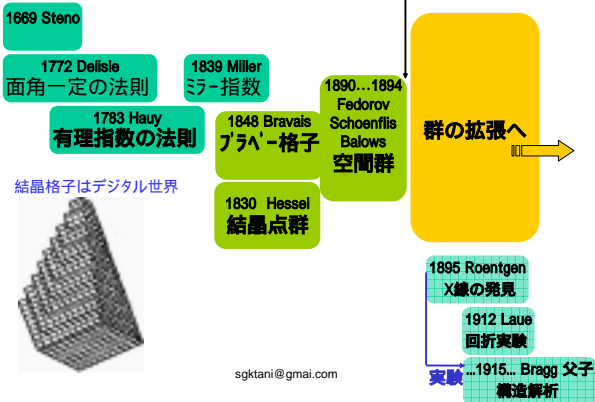
因果律(NMC principle)



結晶とアモルファス (Siの例)

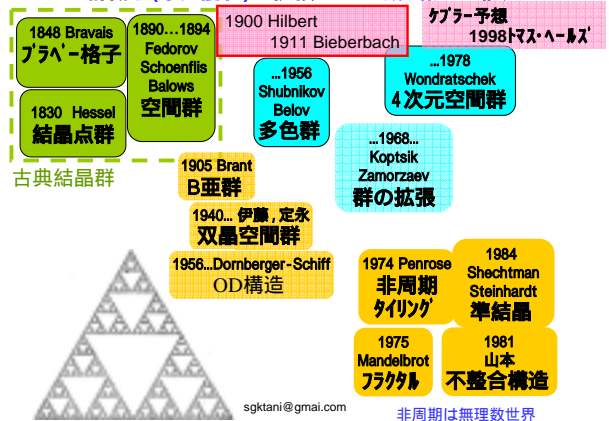


古典結晶群の完成まで

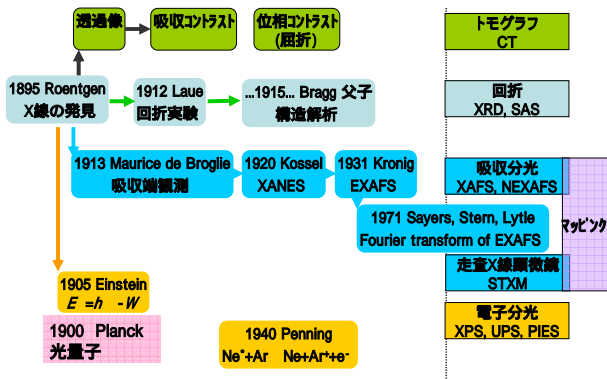


群概念(予定調和)の拡張

生成と乱れの記述へ



X線が関与する主要な評価技術



sgktani@gmail.com

2次元の結晶世界・・・独立な2方向に並進

・5種類の格子

3次元の結晶世界・・・独立な3方向に並進

・14種類の格子

ブラベー(1848) [ラウエの実験(1912)で実証]

4次元の結晶世界・・・独立な4方向に並進

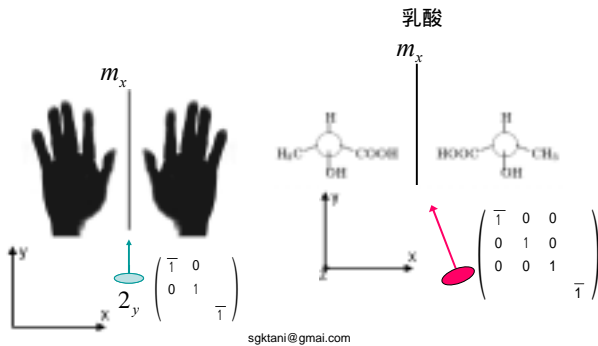
・74種類の格子(対掌体10含む)

ブラウン, マッケイ, ペーロフ, ヴォンドラチェック(1963~1978)

sgktani@gmail.com

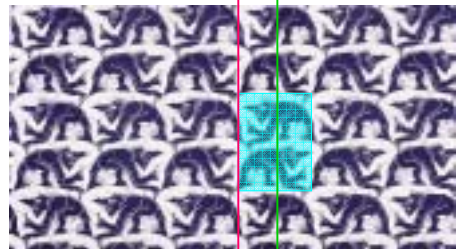
3次元鏡映と4次元空間の回転

鏡像は虚像!



sgktani@gmail.com

繰り返し(周期)のある世界 並進, 格子



遼瀋(1944)より

M.C. Escher

Pg

sgktani@gmail.com

色平面群の例

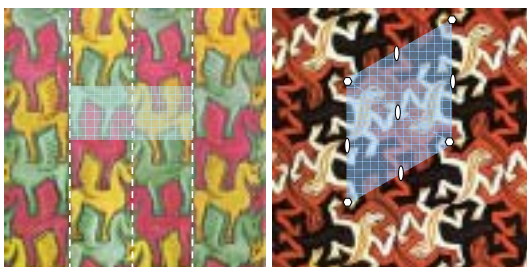
2次元空間 + 1次元性質空間

Pg

P_b(3)

P6

P6(3)



爬虫類(1943)より

By M. C. Escher

sgktani@gmail.com

回教の東京ジャーミー
(東京, 代々木上原)

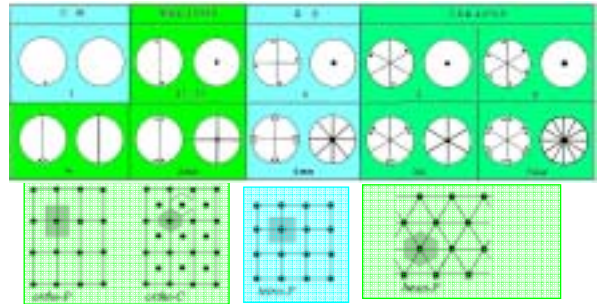




4mm

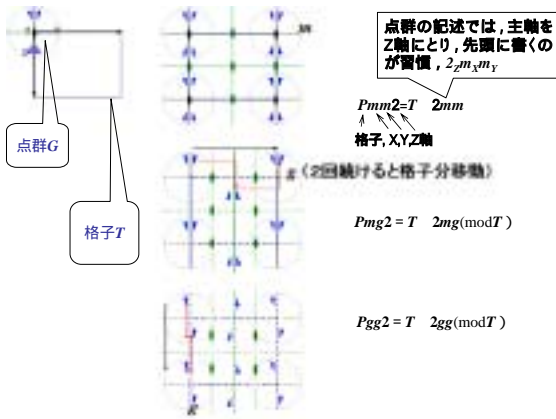
m

2次元の結晶点群



2次元のブラベー格子

sgktani@gmail.com



sgktani@gmail.com

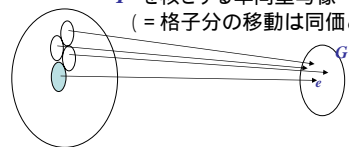
空間群 は、点群Gあるいは $G(\text{mod } T)$ の並進群Tによる拡大

$$= G \times T \quad = G(\text{mod } T) \times T$$

$$\Phi \triangleright T \quad (T \text{ は正規部分群})$$

$$\Phi / T \cong G$$

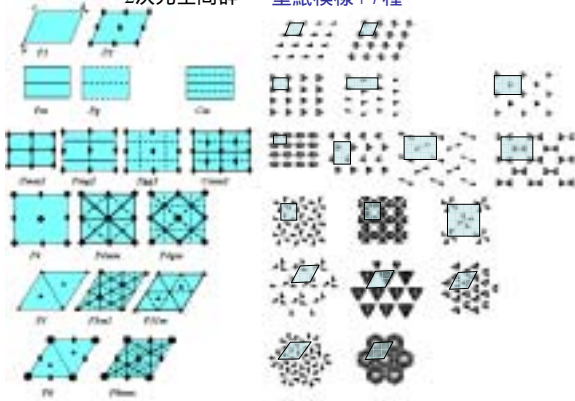
T を核とする準同型写像
(= 格子分の移動は同価とみなす)



sgktani@gmail.com

2次元空間群

壁紙模様17種



sgktani@gmail.com

中間まとめ

結晶世界は周期的 ⇔ 並進群(格子)が存在 T

デジタル世界, 有理数の世界, ピタゴラス派の理想世界

空間群 点群 に縮小 $\Phi/T \cong G_{cryst}$
並進で重なるものは同じと思え mod(T)

因果律: 結晶 現象 $G_{cryst} \subseteq G_{diff}$
NMCurie原理

実空間 | 逆空間
結晶 | 構造因子 | 回折像
 $f(r) \leftrightarrow F(R) \rightarrow |F(R)|$
Fourier双対空間 ⇔ 逆問題は一意に解けない

空間群の拡張
準周期構造, 群概念の拡張, 高次元への拡張, 色群.

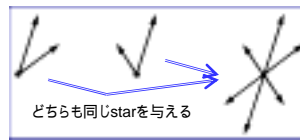
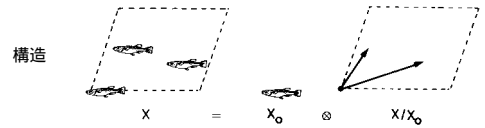
sgktani@gmail.com

操作のいかなる連続も閉じている “群”
……… 予定調和の世界, 死の世界.

いくつかの操作により生成される “群をなさない”
……… 成長する世界, 万華鏡像, 自己組織化.

sgktani@gmail.com

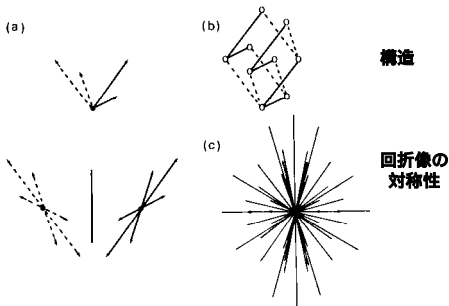
回折像の対称性 = 原子間ベクトルの集合(star)の対称性



どちらも同じstarを与える

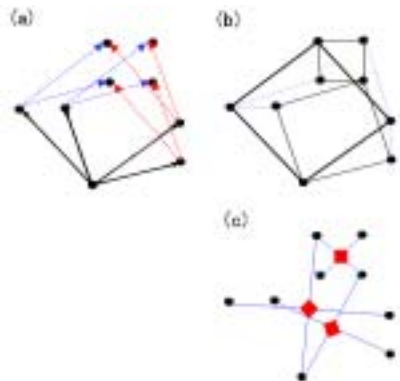
sgktani@gmail.com

回折像に鏡映対称を生じる構造例



sgktani@gmail.com

回折像に4回対称を生じる構造例

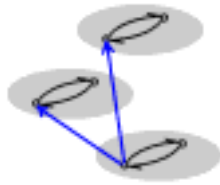


sgktani@gmail.com

(1) Uniqueness of composition



(2) Associativity in composition



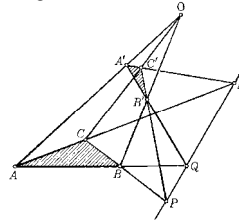
(3) Existence of right/left unit and inverse elements



sgktani@gmail.com

次元を上げて見るとわかる

Desarguesの定理



2次元で考える



3次元で考える

sgktani@gmail.com

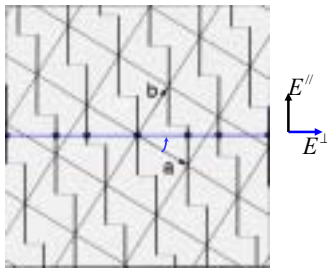
1次元準結晶(格子)

有理数の世界から
無理数の世界へ

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{(1+\sqrt{5})/2}$$

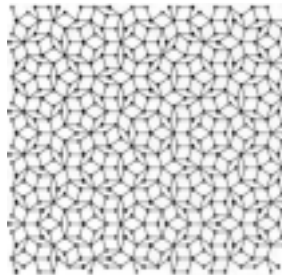
cos, sin の2つの長さが現れる
フィボナッチ数列

tan が無理数なら非周期



sgktani@gmail.com

Penroseのタイル貼り - 2次元準結晶(格子)



5次元E₅の超立方格子

4次元E₄に射影
(E₄は単位密度)

2次元E₂に射影
(E₂は単位密度)

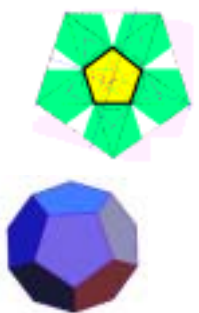
sgktani@gmail.com

Al-Mn系合金準結晶の電子線回折像



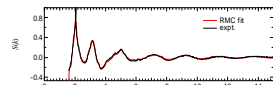
Shechtman(1984)
Hiraga(1985)

sgktani@gmail.com

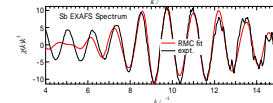


RMC(リバースモンテカルロ)法
Sb-In系合金(アモルファス-結晶)相変化の構造解析

スペクトル1
diffraction



スペクトル2
EXAFS-Sb



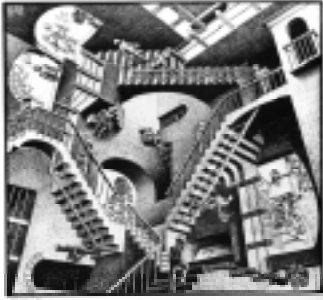
スペクトル3
.....

計算スペクトル → スコア評価 ← 測定スペクトル

構造
原子数(8k ~ 30k個)

ランダムに原子を選び
位置を変化させる

sgktani@gmail.com



Relativity(1953) by M.C.Escher

sgktani@gmail.com

閑話休題



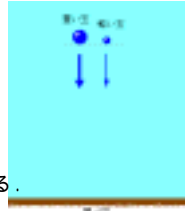
ケプラーからニュートンへ

ケプラー： チコ・ブラーエの膨大な観測データを解析した

1. 惑星の軌道は楕円である。(1605)
2. 面積速度一定.
3. $a^2/T^3 = \text{一定}$ (楕円の長半径 a , 公転周期 T)

ガリレオ (1564 ~ 1642) 落体の法則

$$x = (1/2)gt^2$$



ニュートン (プリンキピア; 1687)

万有引力の逆2乗則から、楕円軌道が導ける。
流率法 (幾何学的微分法)

sgktani@gmail.com

変分原理 (最小作用の原理へ)

事の起り:

最速降下曲線を求めよ (幾何学者には良(知られた曲線になる)
ヨハン・ベルヌーイが、ライプニッツの雑誌に提起 (1696.7)

締め切り: 1697.1.1 イースターまで

(ライプニッツは、不公平がないよう期限延長を提案した)

回答者: ライプニッツ, ニュートン, ヤコブ・ベルヌーイ, ロピタル

ニュートン:

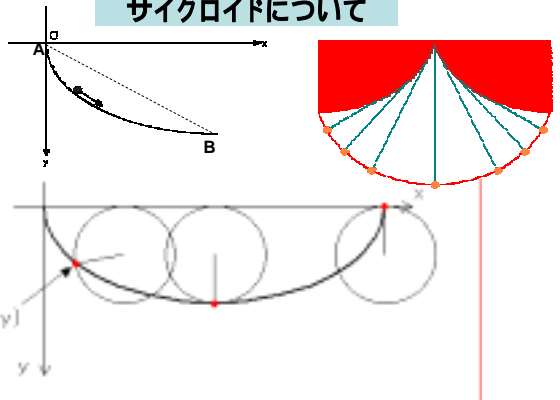
王立造幣局の仕事が大忙しで、午後四時までは家にも帰れず
くた(たに寝ていたのじゃが、その問題を解くまでは要なかった。
といっても、朝の四時までは解けてしまったんじゃが、
ニュートンはその解答を匿名で送り返した。

ヨハン・ベルヌーイ:

この獅子の爪跡を見れば、あのイギリスの天才の仕業だと分かる、
とたいそう悔しがった。

sgktani@gmail.com

サイクロイドについて



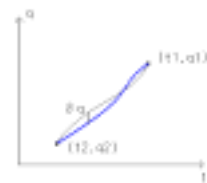
sgktani@gmail.com

最小作用の原理

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad \text{作用}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{q} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{オイラー, ラグランジュにより発展} \quad \text{ハミルトン}$$



$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q)$$

Newtonの力学

$$L = \int \left(\frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi} + \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}}{c} - \rho\phi \right) dV$$

Maxwellの電磁気学

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

sgktani@gmail.com

抽象化は本質を明らかにし、飛躍を呼ぶ!

原理とは 実験結果を一般化したもの
仮説検証の機会が広がる

---ポアンカレ: 科学の価値 (1905), 科学と仮説 (1902) ---

- エネルギー保存の原理
- 作用反作用相等の原理
- 相対性の原理
- 質量保存の原理
- 最小作用の原理

注) 対称性と保存則 ネーター (1882-1935) の定理
因果律, 線形応答

sgktani@gmail.com

- 論理(解析型)と直感(幾何型)
- 視覚(運動)空間
- 高次元幾何空間 射影で認識
- 大量データの解析(コンピュータ)
統計, 確率, シミュレーション(RMCなど),
- カオス

sgktani@gmail.com



兩話休題



sgktani@gmail.com

数学月間テーマ

数学と基礎科学
数学と生命科学
数学と社会科学
数学の教育再生
数学と工業

.....
映画, 認識・識別, シミュレーション, 建築,
芸術, 暗号, 脳, 選挙,
.....

sgktani@gmail.com

on the shoulders of giants

もしも私が, ほかの人たちより
わずかでも遠くを見たとすれば,
それは巨人たちの肩の上に
乗っているからなのです.
.....ニュートン(1675).....

• **アインシュタイン(1879-1955)**
数学は現実の世界とのつながりをもたない

• **ポアンカレ(1854-1912)**
物理学は何が真実か教えてくれない

- マルコム.E.ラインズ; 物理と数学の不思議な関係 -

sgktani@gmail.com

双対性, 相反性, 正負: 類比概念

- 数学と科学(宇宙)に類比はあるのか?
- 宇宙は, 数学をフルに利用(模倣)しているのか?
- 数学にはあるが, 宇宙で未発見の類比は見出されるのか??
- +/- 陽電子/電子, etc.
- 有理数/実数 デジタル/アナログ
- Fourier変換対 実空間/逆空間
- 時間の正負 可逆/非可逆(微視的/巨視的)
; コッホ曲線, フラクタル パーコレーション
- 実数/虚数 物理量/位相計測

注) 双対性: 位数2の異種配置間の同型
- 高橋秀俊; 数理解と現象(1975)より -

sgktani@gmail.com

数学月間(7/22 ~ 8/22)のこころ

↓
数学への共感促進 数学愛好者の増加

数学の魅力

- (a) 抽象化は, 本質を抽出する.
これぞ数学. 論理を発展・展開!
- (b) 数学を身近の課題に適用し, 課題を考察・解決.
数学はあらゆる所に現れる!

抽象化は, 精神を自由にし, 飛躍が呼ぶ.
しかし, 始めから抽象化されたものでは, 面白くない.
- 伏見康治; 文様の科学(数学セミナー'67.5 - '69.10)より -

• 数学と社会のつながりを考える
• 日常生活から教材を

日本数学協会, SGK世話人: 谷 克彦
sgktani@gmail.com