

数学月間(SGK)だより

谷 克彦

7月22日～8月22日は、数学と社会の架け橋＝数学月間です。毎年、7月22日に数学月間懇話会を開催していますが、2020年(第16回)は集会ができないので、ZOOMを用いリモート(参加無料)で行いました。全期間で54名の参加者(複数の日に参加した場合はまとめて一人とカウント)がありました。リモートのメリットは、会場や開催日時の設定に自由がきく、遠隔地からの参加も容易などです。一方、モニターを介してのつながりなので何かたぐるしさが感じられます。インターネットの利用者でないとい会員であっても参加できないのは、不公平で申し訳なく感じています。この対策として、数学月間の会のウェブを充実し、講演ビデオ(YouTubeチャンネルを利用)や資料を公開しています。この紙面では十分な説明ができませんので、数式や図などは上記ウェブサイトをご覧ください。

数学月間期間に、4つの講演を実施しました。

(1) 7月22日, 15:00～16:30「AstronomyとAstronautics(ケプラーから宇宙エレベータまで)」八坂哲雄(九州大学名誉教授)

(2) 7月23日, 15:00～16:30「Do★MATH同志社中学校数学博物館の紹介」園田毅(同志社中)

(3) 7月29日, 14:00～15:30「感染症の数理モデル」稲葉寿(東大)

(4) 8月22日, 15:00～16:30「X線や中性子で見る表面・界面」桜井健次(元物質・材料研究機構)

(1) ケプラーから宇宙エレベータまで

地動説を支持したガリレオやケプラーは、コペルニクスの死から20～30年後に生まれます。ケプラーは1571年生まれで、1599年にティコ・ブラーエのもとで働き始めますが、ティコ・ブラー

エはその1年半後の1601年に亡くなります。ティコ・ブラーエは20年以上の長きにわたって正確な天体観測を行ってきた偉大な観測者です。

ケプラーはティコ・ブラーエの観測記録から火星の記録をもらい、太陽に対する火星の軌道の説明を手掛けました。円軌道を仮定し説明を進めましたが、どうしても観測値と8%の誤差がでます。苦心の末、ケプラーは火星の軌道は円ではなく楕円であることを発見しました。ケプラーは、惑星の軌道に関する有名な3つの法則を発見しました(1609年, 1618年)。

これらの3つの法則は、ケプラーの死後(13年後)生まれたニュートンによるニュートン力学(万有引力)で、すべて導くことは容易ですが、ケプラーの法則からニュートン力学を作るのは非常に難しいことで、ニュートンの天才が必要でした。

■BS放送(波長25mmのマイクロ波)の電波を受信するパラボラアンテナは、東京では、方位角224°(南西)、仰角38°に向けます。これは、赤道上空にある静止衛星の方向です。

静止衛星は、赤道上空約 $h = 36,000$ [km]の静止軌道にあり、地球の自転と同じ角速度で公転しているので、地球から見ると静止しているように見えます。地球の赤道半径は、約 $R = 6,400$ [km]ですから、静止軌道の半径は、約 $R + h = 42,400$ [km]で、静止軌道の一週 $2\pi(R + h) = 266,000$ [km]を、周期 $T = 24$ [時間]で回りますから、秒速約3 [km/s]となります。この静止軌道上では遠心力と地球に引かれる重力がちょうど釣り合っています。それでは、静止軌道上に重心を保ったまま静止衛星を上・下(地球から遠くなる方向・地球中心に向かう方向)に少しずつ伸ばし細長い静止衛星にすればどうでしょう。これが宇宙エレベータの原理です。

宇宙エレベータの発案は、宇宙旅行の父、ソ連のコンスタンチン・ツィオルコフスキー(1895年)です。軌道エレベータ、ヤコブの梯子などの呼び名もあります。

(2) Do★Math 同志社中学校数学博物館の紹介

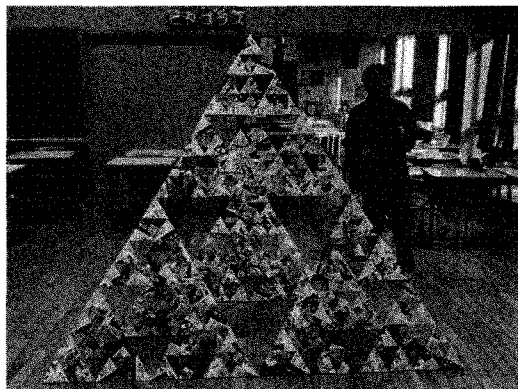
多くの人々が数学に関心をもつようなイベントを数学月間では応援しています。講演会、講習会、ワークショップ、さまざまな活動形態がありますが、子供たちが楽しめて数学感覚が身に着く「数学まつり(フェスティバル)」は、英国のMMPでも米国のMAMでも、とっとりサイエンスワールドでも大変人気があります。学校カリキュラムの補完ではなく、数学力を伸ばす地域の数学サークル活動、あるいは、学校の昼休みにみんなが参加する数学ゲームなどが、米国の学校で効果を上げています。

国立数学博物館 MoMath (National Museum of Maths) は、米国唯一の数学博物館で、ニューヨークのマディソン・スクエアに、2012年12月15日オープンしました。ここには30以上の対話型の展示があります。東京でも MoMath のような常設の数学展示は、科学技術館、リスピーア、東京理科大「数学体験館」(2013年オープン)などがあります。

■同志社中学校数学博物館 Do★Math は、2016年6月にオープンしました。キャンパス移転の2010年に、全教科が専門教室をもつ方式が採用され、数学科も6つの教室(数学1, 2, 3それぞれの専用教室)とメディアスペース(博物館として展示)があります。博物館には、「見る読むゾーン」、「触れる体験ゾーン」などがあり、特に、「触れる体験」というのは、この時期最も重要と思われる。ピタゴラスの定理、自然数の2乗和や3乗和、正4面体の2分割、などを図形で体験できるパズル、ソーマキューブ [体積 $3 \times 3 \times 3$ のキューブを7つのパーツ(体積4のパーツ6個と体積3のパーツ1個)で組み立てる]、誕生日当てゲーム [2進数の利用]、ハノイの塔などがあります。展示は、教職員が製作したものや、生徒が自由研究で製作したものがあります。シェルピンスキーのフラクタル模型(写真)は、授業で生徒が牛乳パックを用いて1辺14cmの正4面体を1人1つ製作したものを合体して完成しました。

単独の学校の教育の場で、このような米国の

MoMath や、数学サークル活動を思わせる意欲的な活動が実現しました。Do★Math は授業で使用するだけでなく、生徒が昼休みに親しむこともできます。一般市民の見学も受け付けています。自分の手で体験し身に着けるものはとても大切です。



(3) 感染症の数理モデル

これまでに人類はいろいろなパンデミックを経験してきました。1918年のインフルエンザ(スペイン風邪)は4000万人以上の死者、2015年のHIV感染者は3670万人、マラリアは年間3億~5億人の患者を生みます。最近のSARS、エボラなどの新興感染症や、再興感染症などにより感染症撲滅という1980年代までの楽観論は消滅しました。人口増加、都市集中、環境破壊などによって、感染症流行リスクはますます増大し、現在COVID-19は予断をゆるさない状況です。

■感染症の数理モデルは、SIRモデルが基本ですが、これは、ケルマックとマッケンドリックが提唱(1927)したものです。全人口をS(感染感受性のある集団)、I(感染者集団)、R(免疫のできた回復者)の3つのグループに分け、それらのグループ間の相互作用(遷移)を数式で記述し、数理モデルができます。

数理モデルは、感染拡大の様子を予測でき、種々の介入(ワクチン接種、隔離、接触制限、ロックダウンなど)を行うことで、感染性人口を絶滅させる(感染源にならないようにする)対策の策定に必要です。

COVID-19では、もう少し進化させた、SEIR数理モデルが必要で、これは、E(潜伏期間にある感染者集団)が加わったモデルです。特にCOVID-19は、Eグループのものが感染源になることや、免疫のできた回復者の免疫が消えることなどがわかり始めており、一筋縄ではいかないモデリングになります。

■基本再生産数 R_0 (R -naught)

感染感受性のある集団にいる一人の感染者が、その全感染期間に再生産する(感染させる)2次感染者の数を基本再生産数 R_0 と定義します。全員感受性のある集団で、1次感染者数、2次感染者数、3次感染者数、……と等比級数で増加するときの公比が R_0 です。

R_0 は患者数と感染感受性のある人(未感染者)との接触回数に比例するので、環境状況でこの数値は変化します。感染が広がると未感染者が減り、実際の集団には免疫のある人も混ざった状態になるので、全員感受性がある集団で定義した R_0 よりも小さい R (実効再生産数)が期待できますが、適切でない介入があれば、逆に R の増加もあり得ます。

結局、 $R > 1$ であればその集団の感染者人口の成長率は正になり、流行は拡大していき、 $R < 1$ であればその集団の感染者人口の成長率は負であって流行は自然に消滅する。何らかの介入をして、すみやかに、 $R < 1$ とすることが対策になります。

■多状態のSEIRモデル

集団に2つの状態(例えば、学童と社会; 病院と社会; 東京と地方; 大学と社会; 等々)がある場合は、それぞれにSEIRモデルを作り、さらに2つの状態間の相互作用を考える複雑なモデル(コンパートメント・モデルという)になります。2つの状態にはそれぞれの実効再生産数 R があります。

現実に近い多状態SEIRモデルを作り、その次世代行列の最大固有値として、 R を計算します。そして、どのような介入(例えば、ワクチン接種、ロックダウン、外出制限、休校)をすれば、 R が

下げられるかを検討します。

集団の2つの状態の R が1未満であるため、感染が制御されているように見え、通常の生活に戻り始めるかもしれませんが、要注意です。

イギリスでも約200万人の大学生が全国から復帰し、フレッシュズフルー*1のようなCOVID-19感染拡大が懸念されます。若者が無症候で感染を広げる最悪モデルでは、学年末までに96%感染と予測されました。学生集団は軽症ですが、体力の弱いスタッフや周囲のコミュニティと相互作用があります。コンパートメント・モデルでシミュレーションし、いろいろな介入施策の検討がなされています*2。

日本でも、東京と他都市の R が、それぞれ1をわずかに下回っている状況ですが安心はできません。東京と他都市の相互作用により全体が増加し1を超える R になる可能性はあります。

■免疫は持続するか

もし、回復したものの再感染を許容するモデルにするならば、新規感染率に対する、回復者再感染率の比を σ とし、 $\sigma R_0 < 1$ なら収束に向かいます。

従来の感染症の常識では、免疫を得ると再感染はしないということを前提にしていますが、COVID-19に関しては、再感染をしないような免疫が獲得できないかもしれません。免疫抗体が数か月で減衰するという報告が中国やスペインからなされている状況です。もし、免疫が獲得できないのであればワクチン自体が成立しないことにもなります。

(4) X線や中性子で見える表面・界面

真空の屈折率は1ですが、電磁波が物質に入るとその速度は真空中の $1/n$ (n は物質の屈折率)に

*1 フレッシュズフルーとは、大学で最初の数週間に新入生が発症した一連の病気に付けられたイギリス英語

*2 Isaac Newton Institute によって実施された「感染症のパンデミックのダイナミクスを理解する上での数学的および統計的課題」(IDP) <https://www.newton.ac.uk/event/idp>

なります。私たちは可視光に対する物質の屈折率になじんでいます。光よりも周波数の低い電波に対しても、周波数の高い X 線に対しても物質の屈折率があります。物質の屈折率は、X 線領域では、1 よりわずかに小さく $n = 1 - \delta$, $\delta \sim 10^{-6}$ になります。屈折率が 1 より小さいならば真空中の光速を越えてしまうと心配する必要はありません。ここでいう光速は位相速度のことです。

可視光に比べて X 線の周波数は 10^4 倍も大きく、例えば、30 keV の X 線の周波数は 10^{19} Hz です。

物質は原子が集まって構成されており、物質が振動電場に置かれると、物質中に種々の振動する双極子が生じて、これらが入射する振動電場と同じ周波数で振動するので、同じ周波数の電磁波の放射が起こります。これが物質による電磁波の散乱現象です。

物質中に生じる分子分極やイオン分極による双極子の固有振動は赤外や可視光の領域にあります。これらの種々の分極は赤外や可視光領域の誘電率(振動電場に対する応答)に寄与しますが、振動電場の周波数が高くなると、これらの振動は追従できずに次々に落ちこぼれていきます。特に、X 線の周波数域になると、追従できるのは原子内に束縛されている電子の振動による「電子分極」だけになります。

さて、電子分極だけに注目すると、原子内のいろいろな軌道に束縛された電子の固有振動数は 10^{15} Hz 程度(この振動数の近傍の電磁波では吸収共鳴が起こる)です。

$$n^2 = \epsilon = 1 - 4\pi \left(\frac{q^2}{m\omega^2} \right) \sum_{j=1}^N \frac{\omega_j^2}{\omega^2 - \omega_{0j}^2 - i\Gamma_j \omega}$$

$$\cong \begin{cases} 1 + 4\pi \sum_{j=1}^N \left(\frac{q^2}{m\omega_{0j}^2} \right) & \text{for } \omega \ll \omega_0 \\ 1 - 4\pi N \left(\frac{q^2}{m\omega^2} \right) & \text{for } \omega_0 \ll \omega \end{cases}$$

上式を見ると、(1)束縛電子 j の固有振動数 ω_{0j} より遥かに小さい周波数 ω の可視光領域では、屈折率は 1 よりわずかに大きく、(2)束縛電子 j の固有振動数 ω_{0j} より遥かに大きい周波数 ω の X 線領域では、屈折率は 1 よりわずかに小さ

くなることがわかります。結局、電子分極だけが追従できる高い周波数の X 線領域に対する物質の屈折率 n は、1 よりごくわずかに小さいこととなります。

■表面界面

X 線に対する物質の屈折率は 1 より小さいので、空気中(≒真空中)から、物質表面へ臨界面以内ですれすれに入射する X 線ビームは、表面で全反射します。X 線を曲げるレンズは作れませんが、全反射を使うと、適当な形状のミラーを組み合わせて X 線ビームを集光させる反射光学系を作ったり、光ファイバーのような X 線導波路を作ったりすることが可能になります。

全反射する X 線は、スキンドープと呼ばれる物質の極表面しか侵入できませんから、極表面の分析に利用できます。

もし、X 線の入射角を変えながら反射率を測定するならば、物質表面の深さ方向の構造情報を得ることができます。これには、物質の深さ方向に種々の屈折率層が積層しているモデルを考え、多層膜のフレネル反射率をシミュレーションし、観測された反射率と一致するようにモデルの各屈折率層のパラメータを決定する方法を用います。

(5) 新学習指導要領下の統計教育の実効性

8月22日の追加プレゼンとして、真島秀行氏(学術会議、数学教育分科会委員長)による、統計教育の実効性向上に関する学術会議緊急提言の要旨解説がありました。

高校カリキュラムには、数列、ベクトル、統計なども含まれているのだが、統計は実際にセンター試験にも出題されないし軽視されている。

新型コロナウイルス感染拡大で、統計データが頻繁に国民の目に入る昨今の状況を見ると、統計教育への関心を高める良い時期でもある。

令和4年から始まる新学習指導要領で統計をきちんと教育するには、教える側の先生への講習等の準備を始める必要があります。

(たに・かつひこ / NPO 法人数学月間の会理事)