数学月間(SGK)だより

谷 克彦

「数学月間懇話会」は2018年で第14回になりました．数学月間初日の7月22日に開催するのが恒例だったのですが，2018年に限り，個人的都合によって8月22日に実施しました．いずれにしても暑い最中です．参加される40人超の熱心な方々との出会いが毎年楽しみです．

第14回の「数学月間懇話会」は，2018年8月22日，14：00－17：30，東大駒場キャンパス，数理科学研究科002教室にて，以下のテーマで実施しました．企画意図は3つの分野(企業，自然科学，パズル)と数学の関わりです：

1. 企業での数学活用の実際：渡邉好夫(リコーICT研究所AI応用研究センター，技術顧問)
2. エントロピーと対数，対称性：宮原恒昱(首都大学東京名誉教授・客員教授)
3. パズル玩具と数学の接点――「解ければ終わり」ではもったいない：秋山久義(数学遊戯研究家)

17：30より構内カフェテリアにて懇親会がありました．

この「数学月間懇話会」に2週間ほど先立つ2018年8月8日に，数学月間を熱心に提唱した片瀬豊氏(数学月間の会代表)が亡くなりました．88歳でした(奇しくも8の5つ並びです)．懇話会の冒頭に，ご冥福を祈り，みんなで黙禱をしました．片瀬氏の遺志を継いで，社会と数学の架け橋として活動をする数学月間の会をNPO法人化する準備を進めています．数学月間の会に入会し一緒に活動しませんか．数学月間活動がさらに社会に波及することを願っています．

■本年の講演

(1) googleやamazonなどが典型ですが，いろいろなデータが収集され予測に使われています．皆さんも日ごろ実感されていることでしょう．ビッグデータのこの時代に，企業もデータサイエンスに無関心ではいられません．しかし数学のかかわりはそれだけではありません．開発設計では，動作原理の物理に立脚した数学モデルやシミュレーションが企業でも早くから使われております．皆さんが使うコピー機を例にとると，紙搬送機構のトラブルがほとんど起きなくなったと思いませんか．これを解決できたのは，現象のモデリングとシミュレーションです．電子写真プロセスでは，紙の表/裏に温度差が生じます．紙中の水分が低温側に移動し紙を縮ませるという機構を，物質輸送の連続の式や熱エネルギー拡散式で説明し，紙の力学定数を用いた変形モデリングが実験と理論の両面から完成でき，合理的な制御を可能にしたからです．

皆さんもコンピュータ普及の初期には，自分でプログラミングをしたことがおありでしょう．その後，汎用の優れたソフトウエアの普及とともに自分でプログラミングすることがなくなりました．しかし最近では，プログラミングしやすい環境の整備もあり，目的に特化したプログラミングを自分でする時代が再来しました．企業でも，現象の物理を正しく踏まえたモデリングやシミュレーションが重要です．

もちろん，ディープ・ラーニングやAIはますます用いられるでしょう，粒子フィルターとベイズ推定による被写体追尾を搭載したデジタルカメラの例が紹介されました．

(2) エントロピーといえばボルツマンを思い浮かべます．天才ボルツマン(オーストリアの物理学者)のウィーンにある墓碑には，

$$S=k\log W$$

と刻まれています．Sはエントロピー，Wは可能な微視的な状態数，kはボルツマン定数です(1877年)．対数をとると，

$$\log(A\cdot B)=\log A+\log B$$

のように，積が和になります．加算量であるエントロピーと，積で増加する微視的な状態数とを結ぶには対数の登場となるわけです．

熱現象の不可逆性(エントロピーの増大)を証明したボルツマンの統計力学に先立つ1850年に，クラウジウスはエントロピーの熱力学的定義をし

ました．系の温度を T とし，可逆過程で熱量 δQ が系に流入すると

$$dS = \delta Q/T$$

だけエントロピーが増加するというものです．系の内部エネルギーやエントロピーは状態量ですが，熱量は状態量ではありません．状態量とは，系の二つの状態間の変化経路にかかわりなく，これら状態間の状態量の差は一意に決するものです．したがって，状態量の周回積分(系のある状態から出発しここに戻る経路に沿った積分)値はゼロです．例えば，エネルギーは状態量ですから

$$\oint dE = 0$$

で，このような性質の dE を全微分といいます．

熱や仕事の流入がなければ，系の内部エネルギーは保存(熱力学の第1法則)され，閉じた系の内部で何か変化が起きれば，その系のエントロピーは増大することがあっても減少することはなく，可逆変化時のみエントロピーは不変(熱力学の第2法則)になります．

系の微視的状態の数 $W = N!/n_1!n_2!n_3!\cdots n_m!$ を，各状態の実現確率

$$P_i \quad (n_i = P_i N,\ \sum_{i=1}^{m} P_i = 1)$$

を用い，さらに $\log W$ をスターリングの公式で近似変形すると

$$\log W = -\sum_{i=1}^{m} P_i N \log P_i$$

が得られます．この形は，情報エントロピーの定義と同じものです．

エントロピーは微視的な状態数の表現で，エントロピーが小さいとは可能な状態数が少ないこと．言い方を変えれば，予想がしやすいということになります．

（3） パズルやマジックの多くは，数学に深いかかわりがあります．試行錯誤して，答えが見つかればそれで終わりとするのが普通です．でもそれでは勿体ない．正解が発見でき本質に肉薄したところにいるのだから，その奥にある数学原理が発見できそうです．

講演で取り上げたパズルの一つに「クロスバー・パズル」があります．パズルを手にしてみんな挑戦しましたが，そう簡単に解けるものではありません．秋山氏のプレゼン図を引用し，このパズルを紹介しましょう．

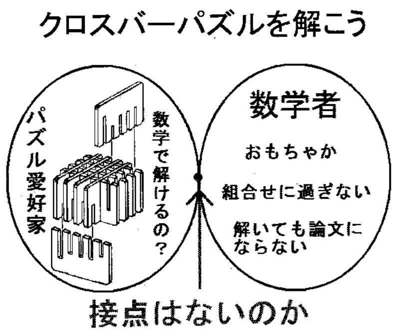

図1

クロスバー・パズルというのは，10枚の板よりなり，各板は5つの溝が切ってある櫛形をしています．5つの溝のうち1つは深く，1つは浅い．

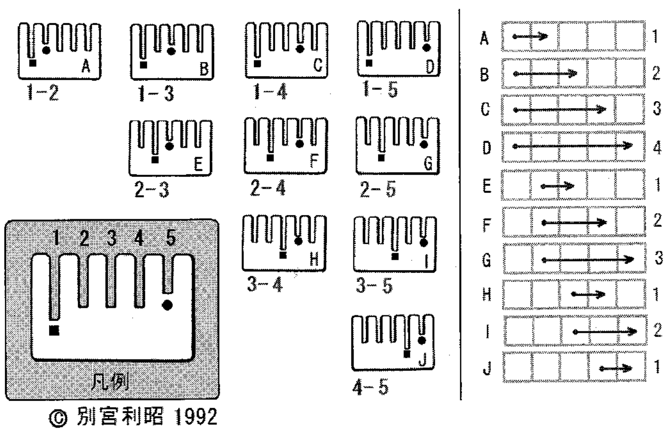

図2

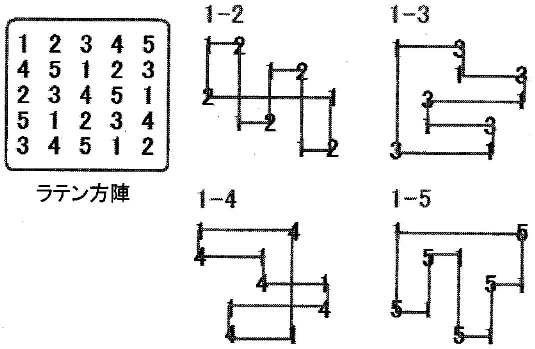

図 3

残りの 3 つの溝は中間(半分)の深さです．8 枚の板は，溝の配列パターンが全部異なります．この 10 枚の板を縦/横に組み合わせ，完成図(図 1 の左図)のような形に組み上げます．

縦/横(直交)に組み合うときに，深い溝には浅い溝を組み合わせなければできません．中間の深さのもの同士が組み合わないところが出ると行き詰ります．全部組み上げるのはとても難しい．

そこでラテン方陣(5 つの数字を並べて，縦/横のどの列/行にも同じ数字が出てこない並べ方)の登場です．組み上げたクロスバー・パズルでは，深い溝と浅い溝が，縦/横の列/行に 1 つずつあります．ラテン方陣とクロスバー・パズル，この両者は似ていると思いませんか．

このラテン方陣から出る解は，図 3 に示したグラフの解(4 つ)以外にもあり，計 10 個です．ラテン方陣自体 56 個ありますから，必要条件を満たす解候補は 560 通りです．これを力技で調べるのではないところがパズル愛好家の数学です．組み上げた板のベクトル(深い溝→浅い溝)の絶対値総和に注目すると，横板 5 枚および縦板 5 枚のそれぞれのベクトルの絶対値総和は，10, 10 となるか，12, 8(または，8, 12)となるかであることに気づき，結局，解は全部で 22 通りあることがわかります．

(たに・かつひこ／ SKG 世話人)