

数学月間(SGK)だより

谷 克彦

2019年は、「数学月間の会」がNPO法人に生まれ変わった年です。「数学月間懇話会(第15回)」は恒例の7月22日に実施。とっとりサイエンス・ワールド(7/28, 8/4, 8/25)には万華鏡のワークショップで参加しました。加えて、新たな試み「数学月間企画講演会」を以下の3講演実施しました。10月26日に(1)多元構造グラフ—亀井図(亀井喜久男, 愛知県立大学)。12月14日に(2)ベイズ決定方式の最適性のハッセ図表現(松原望, 東大名誉教授), (3)イスラミックデザインの幾何学(谷克彦)です。これらは, 東大駒場キャンパス, 数理科学研究科・002号教室にての実施です。そのほか市民対象では, 11月16日に東京ジャーミイ特別公開文化講座, ジャーミイの模様の幾何学(谷克彦)。11月30日に万華鏡のワークショップで, チャリティ・バザーに参加しました。

2020年3月21日にも, 東京ジャーミイでの万華鏡のワークショップを予定し, 多数の申し込みがありました。新型コロナウイルスの感染拡大のため直前で中止になりました。

2020年度はイベント活動の困難が予想されるために, 急遽3月30日にYouTubeブランドチャンネル「NPO 数学月間の会」を開設しました。4月末時点で, 31本(32GB)の動画をアップしてあります。YouTubeやwebの教材作りを早くから手掛けられている方々もおられることでしょう。ぜひこのチャンネルにお力をお貸しください。

さて, 今年も数学月間(7/22—8/22)がやっていますが, 今年はZOOMを使ったりリモート開催を計画しています。集会ができないのは大打撃ですが, 会場の制約がなく, 随時開催ができるのを利点とし, 全国展開への転機としましょう。欠点は, インターネットを使う方々に限定されることです。ZOOMは使いやすい会議ソフトなので,

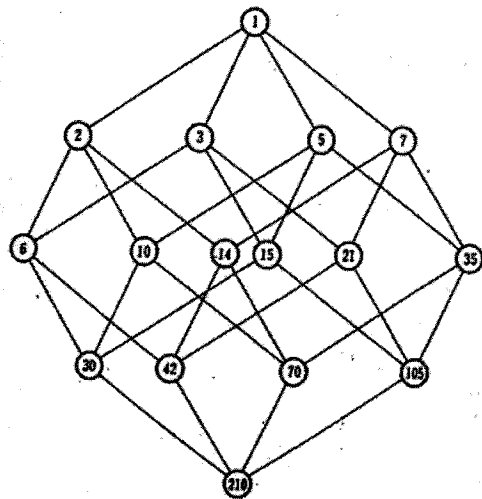
入門の敷居は高くはありません。皆様, パソコンでもスマホでも大丈夫ですから, ZOOM(無料ソフト)をインストールしてご準備ください。

NPO 法人数学月間の会の事業の1つに, ウェブサイトからの情報発信があります。構築した「NPO 数学月間の会」のウェブサイトには, 1日に1,000件以上のアクセスがあり, 発行しているメルマガも320号(4月末時点)になりました。

(1) 多元構造グラフ・亀井図

約数の構造をわかりやすく表示するグラフ(亀井図)を取り上げました。このようなグラフは数学のいろいろな分野で出会います。今回の企画講演の3つとともに, このグラフは登場します。半順序を表示するハッセ図は, このグラフを逆順にしたものです。

約数の構造に関しては, 数学Aの研究課題として高校生にもなじみやすいものであるし, 高次元立体の理解にも役立ち興味深いでしょう。



210の約数の系統的な構造グラフの例を示します。このような美しいバランスのグラフは, 亀井のアルゴリズムを用いて描くので亀井図とも呼ばれます。210は4つの互いに素な素数の積 $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ から出来ているので, 4次元超立方体と同じ構造です。

頂点1のレベルには1個, 頂点2のレベルには4つの素数, 頂点6のレベルには2つの素数の積で ${}_4C_2 = 6$ 個, 頂点30のレベルには3つの素数の積で ${}_4C_3 = 4$ 個, 頂点210のレベルは4つの素

数の積で1個です。4次元の超立方体には対称心があり、互いに点対称な頂点の積は210になることも理解できます。

4次元の超立方体の1つの次元(例えば、素数2の方向)を消すと、3次元の立方体の2つに分離します。同様なことを、それぞれの3次元立方体で考え、例えば、素数7の方向の次元を消すと、3次元の立方体は2次元の面(例えば1-3-15-5)に分離します。このような性質は高次元の超立方体の成り立ちの理解を深めます。

(2) ベイズ決定方式の最適性のハッセ図表現

ベイズの定理は、 x (原因)があるとき y (結果)が起きる確率 $P(y|x)$ と、 x と y を入れ替えた確率 $P(x|y)$ を結び付ける定理です。

2つの変数が統計的独立でない場合、そのうちの一方を知れば他方をよりよく推定できます。確率 $P(y|x)$ は因果律で容易に決まるが、結果 y を観察して原因 x を決めるのは、他の要因が結果に反映される可能性があり困難です。ベイズの定理は、 $P(y|x)$ と x の確率 $P(x)$ [事前確率]を知り、 $P(x|y)$ [事後確率]を推定できます。

新型コロナウイルスのPCR検査を例にしましょう。4月23日の厚労省データによると、検査数は135,983人、PCR検査で陽性(+)数は11,919人、罹患者はそのうちの7,315人です。罹患者/検査数 = 罹患率と定義すると、罹患率は約5.4%です。

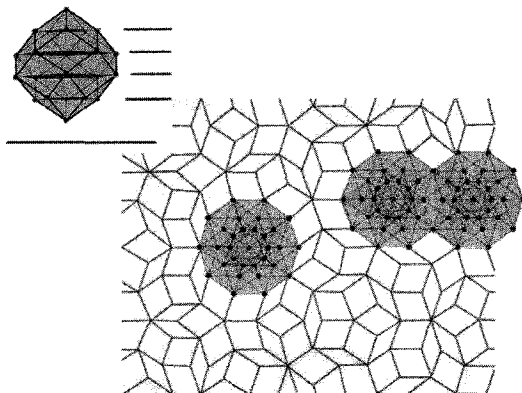
PCR検査の感度とは、罹患者がPCR検査で(+)になる確率のことで0.7、罹患者でもPCR検査が(-)となる(偽陰性)の確率は0.3程度です。検査の特異性により、非罹患者が(+)と判定(疑陽性)される確率は0.01です(酒井健司, 朝日新聞デジタル)。これらから、ベイズの定理を用いると、PCR検査で(+)と判定されたとき、真の罹患者である確率、0.80が得られます。検査感度のせいで罹患者のとりこぼしがあることや、非罹患者が圧倒的多数なので偽陽性の数も無視できないことが、全体として(+)の決定率を80%に下げているのです。

さらに、罹患率を推定すると、8.6%になりました。ここで得た数字はもちろん過大評価です。

それはPCR検査を受診できたサンプル集団が限定されているためです。表題に戻りましょう。推定過程をハッセ図表示すれば、ベイズ決定方式が最適な決定結果をカバーするということです。

(3) イスラミック・デザインの幾何学

イスラーム模様の特徴は、局所的に対称性の高い星型ロゼットがちりばめられているところです。平面群で存在が許される回転対称は、2, 3, 4, 6回に限られ、5回や、7回以上の回転対称は周期性と両立できません。ロゼット内を支配する高い対称性は局所的に作用し、全域を支配するわけではありません。イランのDarb-i Imam寺院(1453)の壁には、その500年後にヨーロッパで発見されるPenroseタイリング(1976)と同様なパターンがすでに見られることをPeter LuとPaul Steinhardtが報告しています。



周期的な5次元空間を理解するには、2次元部分空間とその3次元補空間の直積に分けて考察します。5次元超立方体の構造グラフを、3次元直交補空間に射影すると菱形30面体です。このとき計量空間内の多元構造グラフが必要で、1つの頂点を5回対称の中心に置いたグラフになります。

この構造グラフを2次元平面格子内の窓(Petrie図形)に射影して、5次元周期空間の2次元への投影が得られます。これはPenroseタイリングになります。

イスラーム模様にちりばめられた局所的に高い対称性の星型ロゼットは、高次元空間からの影を思わせ不思議な気分になります。

(たに・かつこ / NPO 数学月間の会理事)