数学月間(SGK)だより

谷 克彦

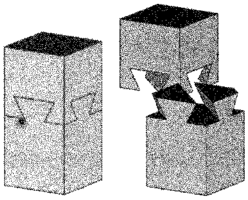
2020年度の数学月間(7/22〜8/22)の4つの講演は，前号で報告したように，すべてZOOMによるリモートで実施されました．そして，後半の数学月間イベントもすべてZOOMによるリモートになりました．企画講演の第3回は，12月26日(土)，第4回は3月27日(土)，いずれも15：00-17：00に，それぞれ27名，30名の参加で実施しました．この1年間は直接の会合ができず，物足りなさの残る年度でした．とくに，インターネットを使わない会員各位にはご不便をおかけします．ここに年度後半の概要を報告いたしますので，ご利用ください．なお，内容詳細は，NPO数学月間の会HPの記事，および，そこにあるリンクからYouTubeに公開した講演動画をご覧ください．

●企画講演第3回

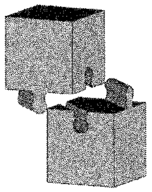
〈3Dジグソーパズルのデザインと数学〉

——手嶋吉法(千葉工大)

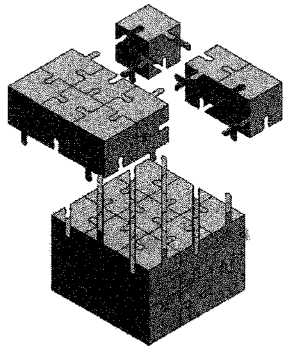
3Dジグソーパズルとは立体ジグソーパズルのことですが，市販されている地球儀ジグソーなどは，球表面の地図ですので，2Dジグソーになり，3Dジグソーではありません．3Dジグソーパズルの起源は，2000年の池上祐司氏(理研，機械設計)の発明だそうです．講演者もこの直後に理研に在籍し池上氏とともに研究しました．現在も大学で研究テーマの一つとしておられるとのことです．今回の講演内容は，町屋佑季氏(修士論文)の研究に関わります．3Dジグソーパズルは，ピースが全部ばらばらに分解できるものでなければなりません．例えば，3×3×3のジグソーパズルは，ばらばらになる27個のピースよりなります．



四方継



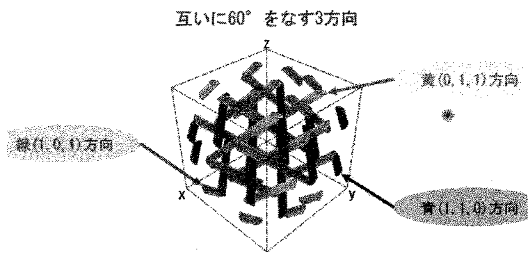
四方継を応用し互い違いに配置したほぞ(1方向へのスライド)



3方向へのスライド

3Dジグソーパズルのヒントは，日本の伝統的な継手(柱を繋ぐ技術)「四方継」にあります．池上式3Dジグソーパズルは「四方継」を応用して作られました．

ジグソーの仕組みを見ると，「溝」と「ほぞ」は，常にかみ合っているわけですから，このかみ合わせ部分を1本のパイプで表現すると，ジグソーパズルの構造は空間のパイプの組み合わせとしてモデル化できます．



池上式3Dジグゾーパズル内部の3方向のほぞ

上図のような，無限に伸びたパイプの組み合わせで作られた周期的な構造は，その対称性を空間群で記述できます．この構造例では，空間群は $Im\bar{3}m$ で，ジグソー立方体の点群は $m\bar{3}m$ であろうと推察されます．

町屋佑季氏は，作った3×3×3，4×4×4，5×5×5などの各3Dジグソーパズルを分解し，それぞれを構成するピースの形の種類と個数を分類し報告しています．これらの結果を，立方体内のサイト・シンメトリーとその同価ピースの個数という視点で再検討すると，非常に興味深い知見が得られると思います．

●企画講演第４回

〈「虹の数学」を高校・大学で講義して〉

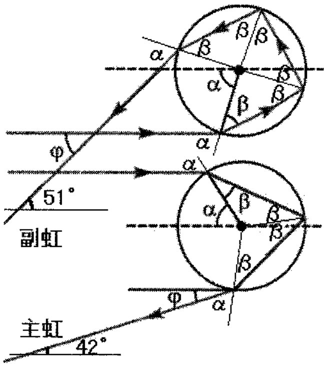
——真島秀行（お茶の水女子大名誉教授）

講演者は，2002年から，高大連携プロジェクト，教養基礎の一環として，「虹の数学」を，附属高校1，2年生に開設しました．これは物理と数学の授業と連携して実施され，種々の現象の理解に数学が関わっていることを体験させることが狙いです．虹シート（ビーズ）などの教材があり虹の実験も行えるとのことです．

講演内容の詳細は，数学月間HPにリンクがありますので，YouTube動画や資料pdfをご覧ください．ここに掲載する短い記事が，物理の視点から現象の理解を深め，数学へのガイドとなれば幸いです．

■幾何光学の視点

虹の現象は，幾何光学による理解と，波動光学による理解とがあります．まず，幾何光学による基礎的な知識から理解できることは，主虹の外側に副虹（主虹より遥かに暗い）が見えることの説明です．筆者が作成した模式図をご覧ください．主虹と副虹が生じる原理がわかるでしょう．



太陽からの光は散乱角$180°-\varphi$の方向に散乱されて目に届きます（φは散乱角の補角）．

雨滴内部で1回反射して見える主虹の場合は，$180°-\varphi=180°-4\beta+2\alpha$，2回反射して見える副虹の場合は，$180°-\varphi=360°-6\beta+2\alpha$で，屈折の法則，$\sin\alpha/\sin\beta=n$（水の屈折率は，可視光域で，$n=4/3$に近い）を用いて計算すると，主虹と副虹の場合，それぞれ，角度$\varphi=42°, \varphi=51°$が得られます．しかし，目に届く光線はキッチリ角度φだけに来るわけではありません．太陽からは平行光線が雨滴に入射しますが，雨滴の球表面の曲率のため，入射点で入射角αは変化します．そのため光線の屈折経路は図示した1本ではなく，そのまわりに拡がります．光線の集まる「焦点」は非点収差のために「火面」と呼ばれる拡張された概念になり，火面の形は光線束の包絡面になります．幾何光学での説明はここまでです．幾何光学だけでは，主虹と副虹で色の配列順番が逆転することは言えても，波長による屈折率の変化（光の分散）を語るには，波動論の概念が必要です．

■波動光学の視点

波長と分散，位相と干渉などの現象は，本来，光の波動論で導入できる概念です．可視光の波長は，雨滴直径の1/1000程度になります．

雨滴球内を進む波面の形状は，ホイヘンスの原理から説明でき，火面の各点を波源とし生ずる球面波を，位相のずれを考慮し重畳して得られる同位相の波面フロントです．この波面フロントを位相面内の変位x（光線方向に垂直）の3次関数で記述したのがエアリーの功績です．雨滴から観測者までの距離は非常に大きいため，雨滴表面の位相面を波源とする球面波は観測位置ではほとんど平面波の重畳で，この電場を表す式がエアリー積分です：

$$A(\theta)=\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(x^3-\theta x)dx$$

ここでθは光線に沿った視角の外れ量に比例した変数です．エアリー積分$A(\theta)$は光線電場の振幅ですので，θ方向に観測される虹の強度は$|A(\theta)|^2$になります．小さい雨滴サイズが均一で，空気がきれいだと，主虹のすぐ内側にかすかに色づいた過剰虹が観察できることがあります．過剰虹の現象は，このような光の干渉の効果のために生じるものです．

エアリー積分の数値計算は，被積分関数を級数に展開したもので行われましたが，収束が悪いためになかなか困難でした．

後に，ストークスはエアリー積分が解となる微分方程式の解の漸近挙動を研究しました．この近似手法は，量子力学のWKB解でも用いられています．

（たに・かつひこ／NPO法人数学月間の会理事）