

一つの数学的対象も、さまざまな視点から見ると異なる性質が表に現れる。複雑そうなものも視点を変えるだけで単純に見えることがある。逆に、異なる対象を一つの視点から見て共通する性質を持つことに気付くことがある。適切な視点を得て、対象の本質が明らかになったとき「わかった」と実感でき、解決への道が開ける。

数学の重要な役割は、個々の問題を解くだけでなく、問題を定式化して解くための対象を表現する数学的言語と推論、計算技術、つまり「技術を伴う表現形式の体系」を用意することにある。そのような体系の一つである「座標」がどのように用いられるか示してみる。

[例1] (つるかめ算)

[問題] つるとかめが合わせて10匹いる。足の数は全部で26本である。つるとかめはそれぞれ何匹ずつか。

(解1) (出席された生徒さんの解)

かめが10匹とすると足の数は40本。実際の数との差は $40-26=14$ 本

かめをつるに替えると、1匹につき足の数が2本減る。

$14 \div 2 = 7$ より7匹をつるに替えればよい。かめの数は $10-7=3$

つる7匹、かめ3匹 (解答終)

(解2) つるの数を x 、かめの数を y とする

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+4y=26 \end{cases}$$

連立方程式を解いて、 $x=7, y=3$ (解答終)

(解1) は少ない予備知識で理解できるところが優れている。

(解2) は文字式の計算技術を要するが、つるかめ算以外の問題にも、広く適用できる可能性が含まれている。

さらに(解2)の連立方程式とその解は、2本の直線と交点の座標を表すと解釈することができる。

[例2] 事前提示の[問題3]

新入社員49人参加の8日間の合宿研修を行う。毎日7人ずつ7つのグループに分けて研修するが、どの2人も必ず1日は同じグループに入るようにしたい。このような組み分けは可能か。

(解答) 可能である。

(解説) 整数を7で割った余りの集合を F とする。 $F = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$

F には自然に和と積が定義できる。

例: $3+6=2 \pmod{7}$, $3 \times 6=4 \pmod{7}$ 7は素数でなので、 $a \in F, a \neq 0$ であれば $ab=1 \pmod{7}$ となる $b \in F$ が存在する。この b は a の逆数と考えられる。

例 $1 \times 1=1, 2 \times 4=1, 3 \times 5=1, 6 \times 6=1 \pmod{7}$

平面座標と類似のものとして、 $S = \{(a, b) \mid a, b \in F\}$ とし、

S の元が各新入社員を表すとする.

8日間の組み分け

1日目

$$y=x \quad \{ (0, 0), (1, 1), \dots, (5, 5), (6, 6) \}$$

$$y=x+1 \quad \{ (0, 1), (1, 2), \dots, (5, 6), (6, 0) \}$$

$$y=x+2 \quad \{ (0, 2), (1, 3), \dots, (5, 0), (6, 1) \}$$

...

$$y=x+6 \quad \{ (0, 6), (1, 0), \dots, (5, 4), (6, 5) \}$$

2日目

$$y=2x, y=2x+1, \dots, y=2x+6$$

3日目

$$y=3x, y=3x+1, \dots, y=3x+6$$

...

6日目

$$y=6x, y=6x+1, \dots, y=6x+6$$

7日目

$$y=0, y=1, \dots, y=6$$

8日目

$$x=0, x=1, \dots, x=6$$

これは、通常の座標平面において異なる2直線は、

(i)傾きが等しければ共有点を持たない。

(ii)傾きが異なれば1点のみを共有する。

また、異なる2点を通る直線は1本だけ存在するという性質が、 S でも成り立つことから確かめられる。

[例3]4次元の立方体

3次元空間に住んでいる人には、4次元の立方体を目で見ることでも手で触れることもできない。そこで、「2次元に住む知的生物が立方体をどう理解するか」を想像し、それとの類推で4次元の立方体の形をつかんでみよう。

1辺の長さが1の正方形ABCDを、「どの辺とも垂直な方向に」(この方向は π (平面)上の生物には見えない)1だけ平行移動する。辺ABが動くと正方形ABB'A'ができる。 π 上の生物には見えないが、 π 上のABと便宜上 π 上に描いたA'B'を辺とする正方形ABB'A'が外の世界にあると考えることができる。同じようにBC,CD,DAが動いて正方形ができるので、正方形ABCD, A'B'C'D'を合わせ、6枚の正方形で囲まれる立方体を考えることができる。

3次元から4次元も同じように考えてみよう。

立方体ABCD-EFGHを「どの辺にも垂直な方向に」平行移動する。面ABCDが動いて立方体ABCD-A'B'C'D'ができる。他の面からも立方体が得られ、はじめと終わりの立方体を合わせ4次元の立方体は8個の立方体で囲まれた図形と考えられる。辺が動くと正方形、頂点が動くと辺になるので、4次元立方体の面、辺、頂点の数もわかる。

現実の空間の中になく図形は考え難いが、座標を利用すると様子がわかりやすくなる。

xy -平面上 $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ を頂点とする図形は正方形

xyz -空間内 $A(0,0,0) B(1,0,0) C(1,1,0) D(0,1,0)$

$A'(0,0,1) B'(1,0,1) C'(1,1,1) D'(0,1,1)$ を頂点とする図形は立方体である。この立方体の点で、 $z=0$ を満たすものは正方形 $ABCD$, $z=1$ を満たすものは正方形 $A'B'C'D'$ である。同じように、 $x=0, x=1, y=0, y=1$ のそれぞれから正方形が得られ、2次元の生物にも「0または1を3個並べたものを頂点とする図形」が6枚の面で囲まれていると理解できる。

3次元の空間に生きる人にとっても、16個の点 (a_1, a_2, a_3, a_4) , a_i は0または1 を頂点とする図形を4次元立方体と考えることができる。この図形上で、

$\{(0, 1, t, 0) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ は、 $(0, 1, 0, 0)$ と $(0, 1, 1, 0)$ を結ぶ辺

$\{(s, 1, t, 0) \mid 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ は、 $(0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0)$ を頂点とする面であることがわかる。

4次元立方体の辺、 $(t, *, *, *)$, $0 \leq t \leq 1$, $*$ は0または1

$(*, t, *, *)$

$(*, *, t, *)$

$(*, *, *, t)$

と表せるので、全部で32本あることがわかる。

このように、座標という表現形式を利用し、感覚だけではとらえにくい4次元の立方体を把握することができる。
