ピタゴラス数　　　　2008・7・28　　　　竹内淳実

直角三角形にかかわるピタゴラスの方程式

$X^2+Y^2=Z^2$　の自然数解は，m，n を任意の整数 m＞n とするとき，

$X=m^2-n^2$，$Y=2mn$，$Z=m^2+n^2$　が一般的な形である。これによって，ピタゴラス数は無限に求められるが，ここでは，X を任意に選んで，Y，Z を求める方法を紹介する。

ピタゴラス数は，X が　3≦X　である総ての奇数について成立する。

上の式から　$X^2=Z^2-Y^2=(Z+Y)(Z-Y)$ が成立する。

$X^2=A\times B$ と二つの数の積（A＞B）で表すと，

A＝（X＋Y），B＝（X－Y）で，これから Y，Z を求める。

X＝3 では，X＝3×1 であるから，（Z＋Y）＝3^2＝９，（Z－Y）＝１とおくと，Y＝4，Z＝5　(3,4,5)が得られる。

同様に X＝5 では，X＝5×1 であるから，Z＋Y＝5＝25，Z－Y＝1 と置くと，Y＝12，Z＝13（5, 12, 13）が得られる。

3≦X　である総ての素数 X について，（Z＋Y）＝X^2，（Z－Y）＝１と置くことができ，是が唯一の解となる。

一般に奇数は素数の積で表される。いま　$X=X_0X_1$として，$X_0>X_1$であれば，（Z＋Y）＝$X_0{}^2$，（Z－Y）＝$X_1{}^2$として，Y，Z を求められる。

例１．　X＝15＝5×3 から，　（Z＋Y）＝5^2＝25，（Z－Y）＝3^2＝９と置いて，

　　2Z＝25＋9＝34, 2Y＝25＝9＝16, 即ち Y＝８, Z＝17　(15, 8, 17)を得る。

　　勿論 X＝15×1 として (15, 112, 113)もある。

例２．積数が増えればその組み合わせ数だけの解が得られる。

X＝105＝７×5×3＝〔(7×5×3）×１〕=〔(7×5）×3〕=〔(7×3）×5〕=〔(5×3）×7〕から４種のピタゴラス数，則ち

（105, 5512, 5513)　(105, 608, 617)　(105, 208, 233) (105, 88, 137)　を得る。

注意：$X^2=A\times B$ の形としては，例えば

$X^2=[(7^2\times5^2\times3)\times3]=[(7\times5^2\times3^2)\times7]$などからもピタゴラス数（105,1836,1839）(105,784,791)は求まるが，

約数を含み，（35, 612, 613）（15, 112, 113）となる。

X と Y とは互いに素　として，これらの解を除外する。

X が偶数の場合は，(Z－Y)＝１とおいた場合，(Z＋Y)が偶数なので，Y，Z の整数解は得られない。また，X，Y がともに偶数であれば，約数を含むこととなるので，Ｙは必然的に奇数となる。この Y を X と置き換えてもなんら差し支えない。

<u>X を奇数とするピタゴラス数で，すべてのピタゴラス数を表現できる。Y は偶数，Z は奇数であり。また（X，Y，Z）＝１とする。</u>

例１．X＝4 とすると，$X^2 = 4^2 = 2^4 = 2^3 \times 2$

(Z＋Y)＝2^3＝８，(Z－Y)＝２　から，Ｙ＝３，Ｚ＝５で (3, 4, 5)となる。

例２．Ｘ＝８とすると　$X^2 = 2^6 = 2^5 \times 2 = 2^4 \times 2^2$から（Ｙ＝15，Ｚ＝17）と(Ｙ＝６，Ｚ＝10)の２解が得られるが, (15, 8, 17) (3, 4, 5) にほかならない。

これを用いて，例えば,「110～120 の総ての奇数を X とするピタゴラス数を求めよ。」と数学初級向けの恰好の出題が出来る。