洩れなく見つけよう　ピタゴラス数

竹内淳実（2015．8．5）

ピタゴラスの定理、直角三角形の三辺、$A^2+B^2=C^2$　図形での証明は魅力的です。そして、ピタゴラス数、ＡＢＣの３数が共に整数である組み合わせ、は無限にあることは、ユークリッドが証明しています。

$2^2-1^2=3$、$3^2-2^2=5$、$4^2-3^2=7$、$5^2-4^2=9$、$6^2-5^2=11$、・・・と無限に続きます。そして奇数の２乗も奇数ですから、ピタゴラス数が無限にあることになります。

けれどもこれが総てではありません。

$A^2+B^2=C^2$の式で、AB は互いに素、A は奇数、B は偶数として、洩れなく順にピタゴラス数を求めましょう。先ずは A から、次いで B へと順を追って確かめましょう。

１．　奇数辺 A から求める。　A≧3 を、3 から順に求めます

１‐１．

$A^2=C^2-B^2=(C-B)(C+B)$の式を用います。

総ての奇数は、１を含む素数の積で表されます。

３＝１ｘ３、５＝１ｘ５、７＝１ｘ７、９＝１ｘ９、１１＝１ｘ１１・・・・・ですから上記の式で$A^2=A_1{}^2 \times A_2{}^2$とおいて、$C-B=A_1{}^2$，$C+B=A_2{}^2$から、B と C とを求めれば、（3、4、5）（5、12、13）（7、24、25）（9、40、41）（11、60、61）・・・・・・が得られます。総ての奇数で <u>C－B＝１</u> であるピタゴラス数が存在します。

１－２．

１５、２１、３３、３５・・・。は素数ではありません。

１５＝１ｘ（３ｘ５）＝３ｘ５、２１＝１ｘ（３ｘ７）＝３ｘ７、

３３＝１ｘ（３ｘ１１）＝３ｘ１１、３５＝１ｘ（５ｘ７）＝５ｘ７ですから、C－B＝１のピタゴラス数の他に、もう１組のピタゴラス数が存在します。同じく上記の式から、

（15、8、17）（21、20、29）（33、56、65）（35、12，37）

ここで１５、２１、３３のピタゴラス数では$C-B=3^2=9$、３５では$C-B=5^2=25$であることに注目してください。ピタゴラス数が正しいかどうか検算するのに役立ちます。

3～100 までの奇数４９個の内、素数２４個（3、5、7、11、13，17、19、23，29、31、37、41，43，47，53，59．61、67，71，73，79，83、89、97）とその累乗数５個（9、25、27、49，81）では各 1 組、その他の数２０個（15，21，33、35、39、45，51、55，57、63，65、69，75、77、85、87、91、93，95，99）では各 2 組、合計 69 組のピタゴラス数があります。順序良く並べてください。道具を使わず、用紙とペン、そして筆算、暗算で楽しみましょう。

１－３．

１０５＝１ｘ３ｘ５ｘ７＝１ｘ（３ｘ５ｘ７）＝３ｘ（５ｘ７）＝５ｘ（３ｘ７）

＝７ｘ（３ｘ５）ですから 4 組のピタゴラス数（105、5512、5513）（105、608、617）

（105、208、233）（105、88、137）が見出されます。

引き続き 101～200 までの奇数 50 個についてピタゴラス数を求めましょう。予め、素数、

その累乗数、など数の性質を確かめ、存在するピタゴラス数の組数を確かめましょう。

１－４．

古くから知られているピタゴラスの算出式、A＝$m^2－n^2$、B＝２ｍｎ、C=$m^2＋n^2$との関係にも、この際触れておきます。ｍｎは互いに素であって、m>ｎ、奇数偶数の組み合わせとします。$m^2－n^2$＝（ｍ－ｎ）（ｍ＋ｎ）と奇数の積に変換されますが、逆にまた奇数Gと奇数 H（G>H）の積は、その平均値（G+H）/２の２乗とその差の半分（G－H）/２の２乗の差、

G x H＝【(G+H) /２＋ (G－H) /２】 x 【(G+H) /２－ (G－H) /２】

＝【(G+H) /２】^{2}－【(G－H) /２】^{2}に転換できます。

これを用いると

１０５＝1 x （３ｘ５ｘ７）＝（５３－５２）（５３＋５２）＝53^2-52^2

＝3 x （５ｘ７）＝（１９－１６）（１９＋１６）＝19^2-16^2

＝5 x （３ｘ７）＝（１３－8）（１３＋8）＝13^2-8^2

＝7 x （３ｘ５）＝（１１－4）（１１＋4）＝11^2-4^2

であって、今回の算出法と古典的算出法とは一致します。

２．　偶数辺 B よりピタゴラス数を求める。

２－１．

既に奇数辺 A より総てのピタゴラス数が算出できることを示しました。偶数辺 B よりもまた総てのピタゴラス数を求められます。

奇数辺は全奇数で存在しますが、偶数辺では、２で割って奇数となる数は除外されます。言い換えれば全遇数の集合の半分がピタゴラス数の集合です。

B^2＝C^2－A^2＝（C―A）（C ＋A）を用いて、以下ピタゴラス数を（B、A、C）で表示します。

４＝√２ｘ２√２とおいて、(C―A) ＝ (√２)^2、(C+A) ＝ (２√２)^{2}とすれば、A＝３、C＝５、即ち（４、3、5）が求まります。

８＝√２ｘ４√２より　　　(8、15、17)

１２＝√２ｘ６√２＝２√２ｘ３√２より　　(12、35、37)（12、5、13)

１６＝√２ｘ８√２より　　　(16、63、65)

２０＝√２ｘ１０√２＝２√２ｘ５√２より　　(20、99, 101)（20、21, 29)

６０＝√２ｘ３０√２＝２√２ｘ１５√２＝３√２ｘ１０√２＝５√２ｘ６√２より

(60, 899、901)（60、221, 229)（60、91, 109)（60、11, 61)

B≦100 の遇数では、２５個の数に合計４９組ピタゴラス数があります。順序良く見つけだし、A より求めたピタゴラス数と比べましょう。

２－２

先ほど示した古典式、B＝２ｍｎ、A＝$m^2－n^2$、C＝$m^2＋n^2$　を上記６０の４組の数で検証しましょう。

６０＝２ｘ（３０ｘ１）より　　　(60、899、901)

＝２ｘ（１５ｘ２）より　　　(60、221、229)

＝２ｘ（１０ｘ３）より　　　(60、91、109)

＝２ｘ（６ｘ５）より　　　(60、11、61)

と一致します。

３．　斜辺 C よりピタゴラス数を求める。

A より求めたピタゴラス数では、A を X 軸としてみると、尖塔のように、上に延びるものが多く見られます。B より求めたものでは、道路の勾配を示す形が多いでしょう。ピタゴラス数を図形との見栄えで求めたい場合には、C より求めてみましょう。

３－１．

ここでは、古典にある $C=m^2+n^2$ を用います。小さい数字から順を追って並べてみます。条件は、ｍｎは互いに素、ｍ＞ｎ、ｍｎは奇数偶数の組み合わせです。C<１００の範囲で追ってみましょう。

$2^2+1^2=5$	(3、4、5)	
$3^2+2^2=13$	(5、12、13)	
$4^2+1^2=17$	(15、8、17)	
$4^2+3^2=25$	(7 、24、25)	
$5^2+2^2=29$	(21，20、29)	
$6^2+1^2=37$	(35、12、37)	
$5^2+4^2=41$	(9、40、41)	
$7^2+2^2=53$	(45、28、53)	
$6^2+5^2=61$	(11、60、61)	
$7^2+4^2=8^2+1^2=65$	(33、56、65)	(63、16、65)
$8^2+3^2=73$	(55、48、73)	
$7^2+6^2=9^2+2^2=85$	(13、84、85)	(77、36，85)
$8^2+5^2=89$	(39、80，89)	
$9^2+4^2=97$	(65，72、97)	

と、１６組が得られました。これら総ては、A＜100 の範囲で求めた中に、また B≦100 の範囲で求めた中にも含まれております。C＜100 の範囲のものを選抜したにすぎません。

３－２．

C＜４００のピタゴラス数は何組あるかと設問すれば、

$20^2=400$ ですから、ｍの最大値は１９で、$19^2+6^2=397$、$18^2+7^2=373$、$17^2+10^2=389$、$16^2+11^2=377$、$15^2+8^2=289$、$14^2+13^2=325$、とｍの大きい順に、m^2+n^2 の最大値を求めます。m≦14 では、全組み合わせが該当ピタゴラス数 C となります。互いに素、奇数偶数の組み合わせに留意して数えてください。

４．　ピタゴラス数に親しもう

折角求めたピタゴラス数です。これを用いて暫く遊びましょう。

例えば、直径６５の円に内接する直角三角形で、ピタゴラス数となるのは、何組あるか、など考えましょう。

また、直方体の空間の対角線の２乗は三辺の２乗の和に等しくなります。

$A^2+B^2+C^2=D^2$　です。A、B、C、D　すべてが整数になるものを「ピタゴラスの４数」といいます。これは、上に並べたピタゴラス数から簡単に求まります。

（3、4、5）と（5，12、13）とから、　（3，4、12、13）もその一つです。このようにして、D＜100 の範囲で、１５組のピタゴラスの４数が見つかります。探してください。

ピタゴラス数と多様に付き合うと自然に計算力が身につきます。　（おわり）